

УДК 517.956.4

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА¹⁾

© 2020 г. В. Т. Волков¹, Н. Н. Нефедов^{1,*}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Россия

*e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 31.10.2019 г.
Переработанный вариант 31.10.2019 г.
Принята к публикации 11.02.2020 г.

Для сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция, называемого в приложениях уравнением типа Бюргерса и имеющего периодическое по времени решение с внутренним переходным слоем, асимптотический анализ применен при решении некоторых обратных задач восстановления параметров модели (определения коэффициента линейного усиления и граничных условий) по известной информации о наблюдаемом решении прямой задачи на заданном временном отрезке (периоде). Проведены численные эксперименты, демонстрирующие эффективность предлагаемого подхода. Библ. 26. Фиг. 3.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, уравнение типа реакция-диффузия-адвекция, внутренний слой, коэффициентная обратная задача.

DOI: 10.31857/S0044466920060125

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе показана возможность применения методов асимптотического анализа при решении обратных задач для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа Бюргерса (уравнения реакция-диффузия-адвекция) с периодическими по времени коэффициентами. В частности, рассмотрены задачи о восстановлении коэффициента линейного усиления (коэффициента реакции), описывающего свойства среды, и граничных условий по известной информации о наблюдаемом решении прямой задачи на некотором временном интервале (периоде). Подобные задачи возникают в газовой динамике, в нелинейной теории волн, биофизике, химической кинетике и многих других практических приложениях и описываются нелинейными параболическими уравнениями с малыми параметрами при производных (см., например, [1] и ссылки в этой работе). Эти задачи интенсивно изучаются в связи с тем, что они выступают в качестве математических моделей, выявляющих основные механизмы, определяющие поведение и более сложных моделей нелинейной теории волн. К этому классу задач относятся уравнения Бюргерса [2]–[4] и уравнения типа Бюргерса [5]–[10].

Особенностью задач указанного типа является то, что их решения могут содержать узкие пограничные и/или внутренние слои (стационарные и/или движущиеся фронты). Как следствие, эти задачи чрезвычайно сложны для численного решения. Однако наличие малого параметра приводит к появлению двух противоположных эффектов: с одной стороны, чем меньше этот параметр, тем более неустойчивое численное решение будет получено; с другой стороны, чем меньше этот параметр, тем более точную априорную информацию о решении можно извлечь с помощью асимптотического анализа. Эти два факта дают возможность объединить асимптотический и численный подходы для построения эффективных методов решения как прямых, так и соответствующих обратных задач. Асимптотико-численный анализ сингулярно возмущенных задач типа реакция-диффузия-адвекция может быть найден, например, в работах [11]–[15]. Обратные коэффициентные задачи широко исследуются в связи с многими приложениями (см., например, [16]–[19] и ссылки в этих работах).

Идея использования асимптотического анализа при построении эффективных численных методов решения обратных задач для сингулярно возмущенных уравнений была впервые реали-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 18-11-00042).

зована в работе [20], где рассматривалась коэффициентная обратная задача для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа реакция-диффузия-адвекция. В указанной работе использовался подход, основанный на строгом асимптотическом анализе и заключающийся в выделении априорной информации о положении движущегося фронта в решении прямой задачи и пограничных слоях в решении сопряженной задачи для построения специальной адаптированной сетки [21]–[23]. Предложенный метод позволил значительно оптимизировать численный счет и существенно повысить стабильность решения соответствующей обратной задачи. В то же время нужно отметить, что применение стандартных методов решения обратных коэффициентных задач, даже использующих эффективные численные методы и априорную информацию о структуре решения, с нашей точки зрения, не является достаточно эффективным подходом. В настоящей работе предлагается и иллюстрируется концепция асимптотического решения обратных коэффициентных задач для сингулярно возмущенных уравнений, решения которых содержат переходные слои.

Важной особенностью асимптотического подхода к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами является то, что асимптотический анализ позволяет свести исходную нелинейную сингулярно возмущенную задачу к набору более простых задач, которые не содержат малых параметров и имеют меньшую пространственную размерность (а иногда и вовсе содержат не дифференциальные, а алгебраические уравнения), получив при этом достаточно точное качественное и количественное описание решения. Таким образом, кроме оптимизации численных расчетов, применение асимптотического анализа дает возможность установить более простые связи между входными данными и параметрами обратной задачи (коэффициенты в уравнении, граничные и начальные условия и т.п.), которые необходимо определить, что позволяет существенно упростить процедуру решения обратных задач.

Эти идеи были применены в работах [24], [25] и заключались в том, что если имеется экспериментальная возможность фиксировать параметры движущегося фронта (фронта ударной волны, фронта реакции или пламени и т.д.) в некоторый момент времени, то методы асимптотического анализа позволяют с заданной точностью свести исходную обратную задачу для уравнения в частных производных к существенно более простой задаче, связывающей измеренные параметры фронта с коэффициентом в уравнении, который необходимо восстановить. При этом вопрос об определении неизвестного коэффициента сводился к простому дифференцированию наблюдаемого решения прямой задачи в фиксированный момент времени.

Структура работы такова. В разд. 2 приведена постановка прямой коэффициентной задачи и сформулирована теорема существования решения и его асимптотическое приближение, в рамках условий которой решается обратная задача. В разд. 3 приводится и обсуждается ее асимптотическое решение. В разд. 4 описывается численный эксперимент, демонстрирующий эффективность предложенного подхода.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямую задачу для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа реакция-диффузия-адвекция, называемого в приложениях уравнением типа Бюргера, и применяемого, например, в нелинейной теории волн для описания квадратично нелинейных волн в среде без дисперсии с линейным усилением (см. [8]–[10]). А именно,

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= -u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + q(t) \cdot u, \\ (x, t) \in D &:= \{x \in (-1, 1); t \in \mathbb{R}\}, \\ u(-1, t) &= u_{\text{left}}(t), \quad u(1, t) = u_{\text{right}}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= u(x, t + T), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

где ε — малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), а функции $q(t)$, $u_{\text{left}}(t)$ и $u_{\text{right}}(t)$ — достаточно гладкие и T -периодические по переменной t . Для этой задачи будет сформулирована теорема существования решения, в рамках которой будет поставлена обратная коэффициентная задача и получено ее асимптотическое решение.

Рассматриваемая нами прямая задача (1) является частным случаем рассмотренной в [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= A(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B(u, x, t), \\ (x, t) &\in \mathcal{D} := \{x \in (-1, 1); t \in \mathbb{R}\}, \\ u(-1, t) &= u_{\text{left}}(t), \quad u(1, t) = u_{\text{right}}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= u(x, t + T), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

где ε – малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), а функции $A(u, x, t)$, $B(u, x, t)$ (в (1) $A(u, x, t) = -u$, $B(u, x, t) = q(t) \cdot u$), $u_{\text{left}}(t)$ и $u_{\text{right}}(t)$ – достаточно гладкие и T -периодические по переменной t . В работе [11] при определенных условиях на входящие в задачу функции было доказано существование периодического решения, его устойчивость, а также получено асимптотическое приближение решения по параметру ε . Поэтому ниже мы приведем основной результат работы [11] для задачи (2), который будет применен при формулировке условий теоремы существования решения прямой задачи (1), а также использован для решения обратной задачи для (1).

2.1. Условия, теорема существования решения задачи (2)

Если положить $\varepsilon = 0$ в уравнении (2), получим так называемое вырожденное уравнение

$$A(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B(u, x, t) = 0, \tag{3}$$

где t – параметр. Уравнение (3) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и рассматривается с одним из следующих начальных условий из задачи (2):

$$u(-1, t) = u_{\text{left}}(t) \quad \text{для} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$u(1, t) = u_{\text{right}}(t) \quad \text{для} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Относительно этих начальных задач мы предполагаем следующее.

Условие 1. Задачи (3),(4) и (3),(5) имеют решения $u = \varphi^l(x, t)$ и $u = \varphi^r(x, t)$, определенные при $(x, t) \in \overline{\mathcal{D}}$, T -периодические по t и удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} \varphi^l(x, t) &< \varphi^r(x, t) \quad \text{для} \quad (x, t) \in \overline{\mathcal{D}}, \\ A(\varphi^r(x, t), x, t) &< 0, \quad A(\varphi^l(x, t), x, t) > 0 \quad \text{для} \quad (x, t) \in \overline{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Для формулировки следующего условия введем функцию $I(x, t)$:

$$I(x, t) := \int_{\varphi^l(x, t)}^{\varphi^r(x, t)} A(u, x, t) du.$$

Условие 2. Пусть уравнение

$$I(x, t) = 0 \tag{6}$$

имеет гладкое T -периодическое решение $x = x_0(t)$, удовлетворяющее следующим неравенствам:

$$-1 < x_0(t) < 1 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R},$$

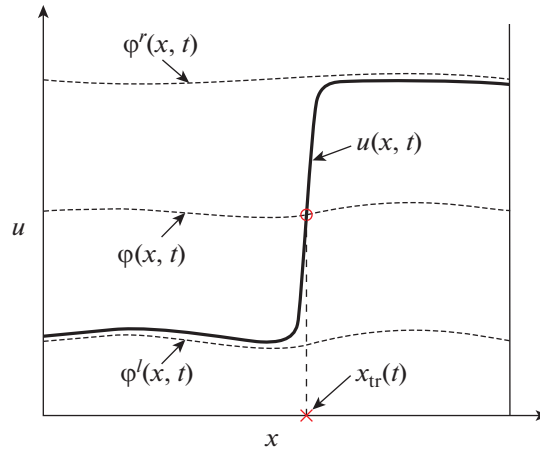
$$\int_{\varphi^l(x_0(t), t)}^s A(u, x_0(t), t) du > 0 \quad \text{для любого} \quad s \in (\varphi^l(x_0(t), t), \varphi^r(x_0(t), t)) \quad \text{и} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Условие 3. Корень $x_0(t)$ уравнения (6) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x_0(t), t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из условия 3, в частности, следует, что $x_0(t)$ – простой корень уравнения (6) при $t \in \mathbb{R}$.

В работе [11] показано, что при сформулированных выше условиях задача (2) имеет T -периодическое по переменной t решение вида периодически движущегося фронта: на интервале $(-1, 1)$ существует точка $x_{\text{fr}}(t; \varepsilon)$, движущаяся по периодическому во времени закону, в окрестности ко-



Фиг. 1. Внутренний слой (движущийся фронт) в фиксированный момент времени \$t\$.

торой наблюдается узкий внутренний переходный слой. А именно, для всех \$t\$ слева от указанной точки (при \$-1 < x < x_{tr}(t, \epsilon)\$) решение близко к \$\varphi^l(x, t)\$, а справа (при \$x_{tr}(t, \epsilon) < x < 1\$) – к \$\varphi^r(x, t)\$, определенных в условии 1. В окрестности \$x_{tr}(t; \epsilon)\$ возникает область быстрого изменения решения – внутренний переходный слой, а такие решения называются контрастными структурами.

Заметим, что положение точки перехода заранее неизвестно, и его можно определить как точку пересечения решения и некоторого уровня \$\varphi^{(0)}(x, t)\$: \$\varphi^l(x, t) < \varphi^{(0)}(x, t) < \varphi^r(x, t)\$. Пример решения, имеющего внутренний слой, приведен на фиг. 1.

Обратная задача будет заключаться в определении неизвестного коэффициента \$q(t)\$, при котором фронт будет двигаться по заданному временному закону или этот коэффициент находится по наблюдению траектории движения фронта. Показано, что для рассматриваемого класса уравнений коэффициентная обратная задача сводится к существенно более простой задаче – линейному алгебраическому уравнению, связывающему наблюдаемое положение движущегося фронта с коэффициентами в уравнении и граничными условиями. Таким образом, если имеется возможность наблюдения траектории движения фронта на временном периоде, то вопрос об определении неизвестного коэффициента уравнения или граничного режима сводится к набору простых алгебраических операций.

Основным результатом работы [11] является следующий.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда для достаточно малых \$\epsilon\$ существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение \$u(x, t, \epsilon)\$ задачи (2) такое, что для любого сколь угодно малого, но фиксированного \$v\$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x, t, \epsilon) = \begin{cases} \varphi^l(x, t), & x \in [0, x_0(t) - v], & t \in R, \\ \varphi^r(x, t), & x \in [x_0(t) + v, 1], & t \in R. \end{cases}$$

Более того, \$x_{tr}(t; \epsilon) - x_0(t) = O(\epsilon)\$, \$t \in R\$, \$u(x, t, \epsilon) - \varphi^l(x, t) = O(\epsilon)\$ для \$x \in [0, x_0(t) - v]\$, \$t \in R\$ и \$u(x, t, \epsilon) - \varphi^r(x, t) = O(\epsilon)\$ для \$x \in [x_0(t) + v, 1]\$, \$t \in R\$.

Замечание 1. В работе [11] получено более подробное описание структуры переходного слоя и более точное асимптотическое приближение решения.

2.2. Теорема существования решения задачи (1)

Функции \$\varphi^l(x, t)\$ и \$\varphi^r(x, t)\$ в задаче (1) определяются как решения следующих задач Коши:

$$\begin{aligned} \varphi^l(x, t): \quad & -u \frac{du}{dx} + q(t) \cdot u = 0, \quad u(-1, t) = u_{left}(t); \\ \varphi^r(x, t): \quad & -u \frac{du}{dx} + q(t) \cdot u = 0, \quad u(1, t) = u_{right}(t), \end{aligned} \tag{7}$$

и находятся в явном виде:

$$\begin{aligned} \varphi^l(x, t) &= q(t) \cdot (x + 1) + u_{\text{left}}(t), \\ \varphi^r(x, t) &= q(t) \cdot (x - 1) + u_{\text{right}}(t). \end{aligned} \tag{8}$$

В силу условия 1 потребуем выполнения неравенств

$$\begin{aligned} \varphi^l(x, t) &= q(t) \cdot (x + 1) + u_{\text{left}}(t) < 0, \\ \varphi^r(x, t) &= q(t) \cdot (x - 1) + u_{\text{right}}(t) > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

при $(x, t) \in \bar{D} := \{x \in [-1, 1], t \in \mathbb{R}\}$. Несложные вычисления показывают, что эти неравенства выполняются при следующих условиях.

Условие 4. Пусть

$$u_{\text{right}}(t) > 0, \quad u_{\text{left}}(t) < 0, \quad 2q(t) + u_{\text{left}}(t) < 0, \quad -2q(t) + u_{\text{right}}(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Функция

$$I(x, t) = \int_{\varphi^l(x, t)}^{\varphi^r(x, t)} A(u, x, t) du, \tag{10}$$

определенная в условии 2 теоремы 1 в случае задачи (1) принимает вид

$$I(x, t) = \int_{\varphi^l(x, t)}^{\varphi^r(x, t)} -u du = \frac{1}{2} (\varphi^l(x, t) + \varphi^r(x, t)) (\varphi^l(x, t) + \varphi^r(x, t)). \tag{11}$$

Таким образом, уравнение

$$I(x, t) = 0, \tag{12}$$

определяющее главный член асимптотики положения фронта $x_0(t)$, с учетом формул (8) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} \cdot (2q(t) + u_{\text{left}}(t) - u_{\text{right}}(t)) \cdot (2q(t) \cdot x + u_{\text{left}}(t) + u_{\text{right}}(t)) = 0.$$

В силу условия 4 первая скобка отрицательна при всех $t \in \mathbb{R}$, поэтому $x_0(t)$ определяется из уравнения

$$2q(t) \cdot x + u_{\text{left}}(t) + u_{\text{right}}(t) = 0. \tag{13}$$

Условие 5. Пусть также для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $q(t) > 0$ и

$$-1 < \frac{u_{\text{left}}(t) + u_{\text{right}}(t)}{2q(t)} < 1.$$

Это требование обеспечит выполнение условий 2 и 3, в частности, обеспечивает существование T -периодического решения (13)

$$x_0(t) = -\frac{u_{\text{left}}(t) + u_{\text{right}}(t)}{2q(t)} \tag{14}$$

при $-1 < x_0(t) < 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Кроме того,

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x_0(t), t) = (2q(t) + u_{\text{left}}(t) - u_{\text{right}}(t))q(t) < 0 \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Потребуем также выполнения дополнительного условия, позволяющего избежать рассмотрения специальных ситуаций при решении обратной задачи.

Условие 6. Пусть также при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$|u_{\text{left}}(t) + u_{\text{right}}(t)| \neq 0.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема существования решения прямой задачи (1), являющаяся следствием теоремы 1 при перечисленных выше условиях.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 4–6. Тогда для достаточно малых ε существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) такое, что для любого сколь угодно малого, но фиксированного ν выполнены предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi^l(x, t), & x \in [0, x_0(t) - \nu], & t \in R, \\ \varphi^r(x, t), & x \in [x_0(t) + \nu, 1], & t \in R. \end{cases}$$

Более того, при всех $t \in R$ имеют место оценки $x_{\text{tr}}(t; \varepsilon) - x_0(t) = O(\varepsilon)$, а также $u(x, t, \varepsilon) - \varphi^l(x, t) = O(\varepsilon)$ для $x \in [0, x_0(t) - \nu]$ и $u(x, t, \varepsilon) - \varphi^r(x, t) = O(\varepsilon)$ для $x \in [x_0(t) + \nu, 1]$.

Сделаем важное для формулировки основного результата обратной задачи замечание.

Замечание 2. Из доказательства теорем 1 и 2 также следует непрерывная зависимость решения задачи (1) от малых возмущений коэффициента $q(t)$, т.е. если в задаче (1) вместо $q(t)$ стоит зависящий гладким образом от малых параметров ε и δ коэффициент $\tilde{q}(t, \varepsilon, \delta)$, причем $\tilde{q}(t, \varepsilon, \delta) - q(t) = O(\varepsilon + \delta)$, то имеет место следующий результат (аналог теоремы 2):

$x_{\text{tr}}(t; \varepsilon, \delta) - x_0(t) = O(\varepsilon + \delta)$, а также $u(x, t, \varepsilon, \delta) - \varphi^{(-)}(x, t) = O(\varepsilon + \delta)$ для $x \in [0, x_0(t) - \nu]$ и $u(x, t, \varepsilon, \delta) - \varphi^{(+)}(x, t) = O(\varepsilon + \delta)$ для $x \in [x_0(t) + \nu, 1]$ при всех $t \in R$.

Аналогичный результат имеет место и для малых возмущений граничных условий.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Продемонстрируем эффективность развиваемого подхода в определении характеристик математической модели, описываемой задачей (1). Постановку обратной задачи можно записать в операторном виде:

$$A(q) = f,$$

где $A: C(q(t) : t \in R) \rightarrow C(f(t) : t \in R)$.

В данной работе точный оператор A задачи мы заменяем на приближенный оператор $A_\varepsilon: C \rightarrow C$, определяемый формулой (14). Из теоремы 2 следует, что $\|A - A_\varepsilon\|_C = O(\varepsilon)$. В результате решается следующая задача:

$$A_\varepsilon(q_\varepsilon) = f.$$

Мы предполагаем, что имеется возможность наблюдения положения фронта, т.е. $f(t) = x_{\text{tr}}(t; \varepsilon)$ на интервале времени, равном периоду T . При этом мы предполагаем, что условия существования решения задачи (1) выполнены.

3.1. Асимптотическое решение обратной коэффициентной задачи определения коэффициента линейного усиления

Одним из результатов асимптотического анализа, проведенного в [11], является равномерная по $t \in R$ оценка

$$|x_{\text{tr}}(t; \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (16)$$

Поэтому уравнение (13), определяющее $x_0(t)$, можно переписать в виде

$$2q(t) \cdot x_{\text{tr}}(t; \varepsilon) + u_{\text{left}}(t) + u_{\text{right}}(t) = O(\varepsilon). \quad (17)$$

Таким образом, если имеется возможность наблюдения положения фронта $x_{\text{tr}}(t; \varepsilon) = f(t)$ на интервале времени, равном периоду T , то коэффициентная обратная задача для уравнения типа Бюргера сводится к существенно более простой задаче — линейному алгебраическому уравнению, связывающему наблюдаемое положение движущегося фронта с коэффициентами в уравнении и граничными условиями. Решение этого уравнения относительно $q(t)$, в силу замечания 2, является асимптотическим решением обратной коэффициентной задачи для (1) с точностью $O(\varepsilon)$.

Так как наблюдаемое положение фронта известно, как правило, с некоторой ошибкой порядка $O(\delta)$

$$x_{tr}(t; \varepsilon) = x_{obs}(t) + O(\delta), \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

то (17) можно переписать в виде

$$2q \cdot x_{obs}(t) + u_{left}(t) + u_{right}(t) = O(\varepsilon) + O(\delta). \quad (19)$$

Таким образом, из этого уравнения имеем, что

$$q(t, \varepsilon, \delta) = -\frac{u_{left}(t) + u_{right}(t)}{2x_{obs}(t)} \quad (20)$$

в силу замечания 2 является асимптотическим решением обратной коэффициентной задачи (1) с точностью $O(\varepsilon + \delta)$.

Замечание 3. Уравнение (17) дает возможность асимптотического решения обратной задачи граничного управления: определения одной из граничных функций $u_{left}(t)$ или $u_{right}(t)$ при условии, что две другие q и x_{obs} известны или заданы (точно или приближенно).

4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В качестве модельной задачи, иллюстрирующей возможность и эффективность применения предложенного подхода при конечных значениях малого параметра и погрешностях входных данных, рассмотрим задачу (1) для следующего набора функций и параметров

$$q^{model}(t) = 5 + \cos t, \quad u_{left}(t) = -20 + \sin t, \quad u_{right}(t) = 15 - \cos t, \quad T = 2\pi, \quad \varepsilon = 10^{-1}. \quad (21)$$

Наш вычислительный эксперимент предполагает получение входных данных (симуляцию входных данных обратной задачи) – наблюдаемого положения внутреннего слоя $x_{obs}(t) = f(t)$ на основании решения прямой задачи (1) с набора функций и параметров (21). Задача (1) численно решается как начальная задача на стабилизацию к периодическому режиму. Возможность использования такого подхода следует из того, что при наших условиях теоремы 2 решение задачи (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Подробно численный алгоритм решения периодической задачи (1), использующий данные асимптотического анализа, и применение его для симуляции данных рассматриваемой обратной задачи описан в работах [21] и [26], поэтому мы не приводим его здесь. Отметим, что для численного решения этим методом прямой задачи (1) нам необходимо знать решение $u(x, t)$ в начальный момент времени $u(x, 0) \equiv u_{init}(x)$. В качестве начального условия $u_{init}(x, \varepsilon)$ можно, как решение следующей стационарной задачи:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -g \frac{\partial g}{\partial x} + q(0)g, \quad x \in (-1, 1), \\ g(-1) &= u_{left}(t)|_{t=0}, \quad g(1) = u_{right}(t)|_{t=0}. \end{aligned}$$

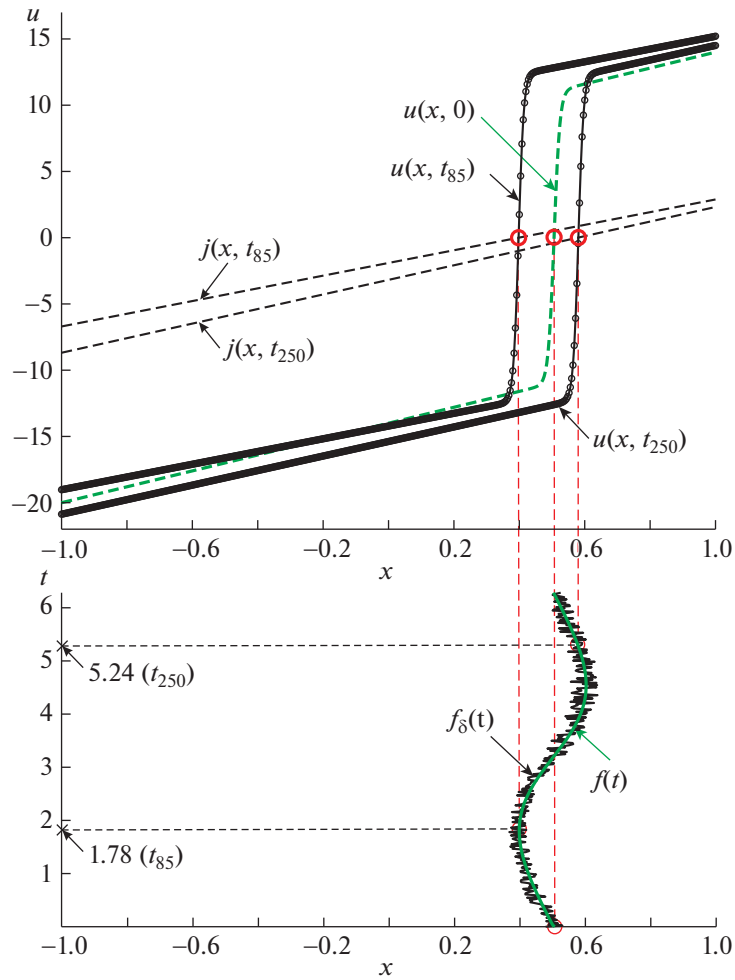
Решение которой близко к решению задачи (1) и может быть найдено с помощью счета на установление. В качестве начального условия счета на установление была взята функция

$$g_0(x, \varepsilon) = \frac{u_{right}(t)|_{t=0} - u_{left}(t)|_{t=0}}{2} \tanh(\varepsilon^{-1}(x - x_{00})) + \frac{u_{right}(t)|_{t=0} + u_{left}(t)|_{t=0}}{2}, \quad x_{00} = 0.2.$$

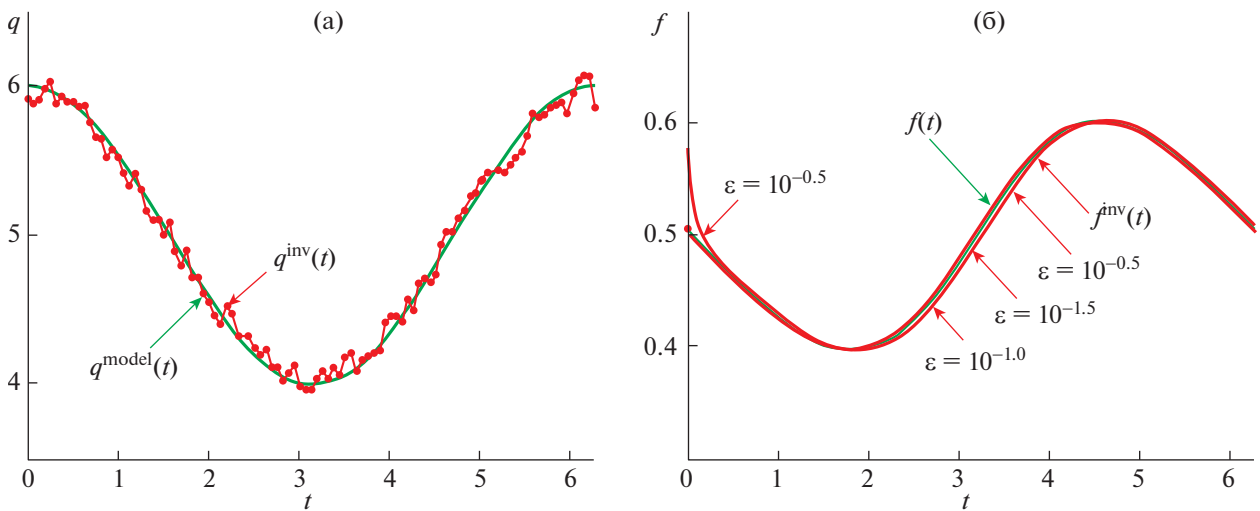
Заметим, что функции $g_0(x)$ и начальное положение фронта реакции x_{00} используются только для того, чтобы смоделировать входные данные обратной задачи $x_{t,p}(t) \equiv f_\delta(t)$ и не влияют на решение соответствующей обратной задачи.

На фиг. 2 представлен результат симуляции входных данных обратной задачи, т.е. функции $f(t)$, для набора параметров (21).

В предыдущем разделе было показано, как методы асимптотического анализа позволили свети постановку исходной обратной задачи для (1) к уравнению (20), которое непосредственно связывает искомый коэффициент $q(t)$ с данными обратной задачи $f(t)$. В результате алгоритм на-



Фиг. 2. Пример симуляции данных $f(t)$ обратной задачи (1)–(18) для $t \in [t_0, T] \equiv [0, 2\pi]$, $q(t) = 5 + \cos t$, $u_{\text{left}}(t) = -20 + \sin t$, $u_{\text{right}}(t) = 15 - \cos t$, $\varepsilon = 10^{-1.0}$, $\delta = 7\%$, с параметрами сеток: $N = 500$, $M = 300$.



Фиг. 3. (а) – функция $q^{\text{inv}}(t)$ восстановлена для симулированных данных $f_{\delta}(t)$ ($\varepsilon = 10^{-1.0}$, $\delta = 2\%$), (б) – сравнение функции $f^{\text{inv}}(t)$ как результат решения прямой задачи для функции $q(t) \equiv q^{\text{inv}}(t)$ (в случае симуляции входных данных $f_{\delta}(t)$, $\delta = 0\%$, для $\varepsilon = 10^{-0.5}$, $\varepsilon = 10^{-1.0}$, $\varepsilon = 10^{-1.5}$ соответственно) с “точными” данными.

хождения коэффициента $q^{\text{inv}}(t)$ из уравнения (20) для рассматриваемого набора функций (21) примет вид

$$q^{\text{inv}}(t) = -\frac{u_{\text{left}}(t) + u_{\text{right}}(t)}{2f(t)}. \quad (22)$$

Результаты расчетов представлены на фиг. 3 и демонстрируют эффективность предложенного в работе подхода. Результаты расчетов показывают, что предложенный подход работает и для фиксированных значений малого параметра ($\varepsilon = 10^{-0.5}$) и погрешностей входных данных.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрировано дальнейшее развитие асимптотико-численных методов решения прямых и обратных задач с пограничными и внутренними слоями. Этот подход применен к новому классу периодических по времени задач типа реакция-диффузия-адвекция с внутренними переходными слоями. Введена концепция асимптотического решения обратных коэффициентных задач. Этот подход продемонстрирован на обратной коэффициентной задаче. Для этого уравнения задача сводится к существенно более простой задаче — линейному алгебраическому уравнению, связывающему наблюдаемое положение движущегося фронта с коэффициентами в уравнении и граничными условиями. Это позволяет классифицировать исходную задачу как корректно поставленную обратную задачу. Нам представляется, что предлагаемый нами подход может быть применен к достаточно широкому классу задач с пограничными и внутренними слоями.

Авторы благодарны А.Г. Яголе и Д.В. Лукьяненко за обсуждение этой работы, способствовавшее ее улучшению, кроме того, выражают благодарность Д.В. Лукьяненко за проведение вычислительных экспериментов, иллюстрирующих эффективность развиваемого подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nefedov N.* Comparison Principle for Reaction-Diffusion-Advection Problems with Boundary and Internal Layers // Lect. Notes in Comput. Sci. 2013. 8236. P. 62–72.
2. *Burgers J.M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics. 1948. V. 1. P. 171–199.
3. *Parker A.* On the periodic solution of the Burgers equation: a unified approach // Proc. R. Soc. Lond. A. 1992. V. 438. P. 113–132.
4. *Cole J.D.* On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. V. 9. P. 225–236.
5. *Malfliet W.* Approximate solution of the damped Burgers equation // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. V. 26. P. 723–728.
6. *Fahmy E.S., Raslan K.R., Abdusalam H.A.* On the exact and numerical solution of the time-delayed Burgers equation // Int. J. Comput. Math. 2008. V. 85. № 11. P. 1637–1648.
7. *Rudenko O.V., Gurbatov S.N., Hedberg C.M.* Nonlinear Acoustics Through Problems and Examples // Victoria, BC, Canada: Trafford, 2011.
8. *Руденко О.В.* Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубической нелинейностями // ДАН. 2016. Т. 471. № 1. С. 23–27.
9. *Руденко О.В.* Модульные солитоны // ДАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 451–454.
10. *Nefedov N.N., Rudenko O.V.* On front motion in a Burgers-type equation with quadratic and modular nonlinearity and nonlinear amplification // Doklady Mathematics. 2018. V. 97. P. 99–103.
11. *Nefedov N., Recke L., Schneider K.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // J. of Math. Analysis and Appl. 2013. V. 405. № 1. P. 90–103.
12. *Антипов Е.А., Волков В.Т., Левашова Н.Т., Неведов Н.Н.* Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция–диффузия // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24. № 3. С. 259–279.
13. *Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V.* Use of Asymptotics for New Dynamic Adapted Mesh Construction for Periodic Solutions with an Interior Layer of Reaction-Diffusion-Advection Equations // Lect. Notes in Comput. Sci. 2017. 10187. P. 107–118.
14. *Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Неведов Н.Н.* Асимптотика движущегося фронта в задаче “реакция–диффузия–адвекция” // ЖВМ и МФ. 2014. Т. 54. № 10. С. 1594–1607.

15. *Volkov V., Lukyanenko D., Nefedov N.* Asymptotic-numerical method for the location and dynamics of internal layers in singularly perturbed parabolic problems // *Lect. Notes in Comput. Sci.* 2017. 10187. P. 721–729.
16. *Kabanikhin S.I.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // *J. Inverse and Ill-Posed Problems.* 2008. V. 16. № 4. P. 317–357.
17. *Belishev M.I.* Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method) // *Inverse Problems.* 1997. V. 12. № 5. P. 1–45.
18. *Beilina L., Klivanov M.V.* A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // *SIAM J. on Scientific Computing.* 2008. V. 31. № 1. P. 478–509.
19. *Kabanikhin S.I., Sabelfeld K.K., Novikov N.S., Shishlenin M.A.* Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods // *Monte Carlo Methods and Applications.* 2015. V. 21. № 3. P. 189–203.
20. *Lukyanenko D., Shishlenin M., Volkov V.* Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction–diffusion–advection equation with the final time data // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2018. V. 54. P. 233–247.
21. *Волков В.Т., Лукьяненко Д.В., Нефедов Н.Н.* Аналитико-численный подход к описанию периодических по времени движущихся фронтов в сингулярно возмущенных моделях реакция–диффузия–адвекция // *ЖВМ и МФ.* 2019. Т. 59. № 1. С. 50–62.
22. *Lukyanenko D.V., Volkov V.T., Nefedov N.N.* Dynamically adapted mesh construction for the efficient numerical solution of a singularly perturbed reaction–diffusion–advection equation // *Modeling and Analysis of Information Systems.* 2017. V. 24. № 3. P. 322–338.
23. *Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V.T.* Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction–diffusion–advection equations // *Lecture Notes in Computer Science.* 2017. 10187. P. 107–118.
24. *Lukyanenko D.V., Grigorev V.B., Volkov V.T., Shishlenin M.A.* Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction–diffusion equation with the location of moving front data // *Computers and Mathematics with Applications.* 2019. V. 77. № 5. P. 1245–1254.
25. *Лукьяненко Д.В., Волков В.Т., Нефедов Н.Н., Ягола А.Г.* Применение асимптотического анализа для решения обратной задачи определения коэффициента линейного усиления в уравнении типа Бюргерса // *Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия.* 2019. № 2. P. 38–43.
26. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2019. V. 27. № 5. 745–758.