ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 8, с. 1329–1338

УДК 517.956.2

НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО $p(x)$-ЛАПЛАСИАНА С ТРЕХФАЗНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ $p(x)$[1)]

© 2020 г. Ю. А. Алхутов[1,*], М. Д. Сурначёв[2,3,**]

[1] 600000 Владимир, ул. Горького, 87, ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Россия

[2] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

[3] 119049 Москва, Ленинский пр-т, 4, НИТУ МИСИС, Россия

*e-mail: yurij-alhutov@yandex.ru

**e-mail: peitsche@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.11.2019 г.
Переработанный вариант 15.12.2019 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Для эллиптического $p(x)$-лапласиана с трехфазным кусочно-постоянным показателем p на плоскости со стыком трех фаз в точке доказано неравенство Харнака и установлена гёльдеровская непрерывность решения. Библ. 22.

Ключевые слова: $p(x)$-лапласиан, неравенство Харнака, гёльдеровская непрерывность, метод Мозера, трехфазный показатель.

DOI: 10.31857/S0044466920080025

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка задачи

В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\right) = 0. \tag{1.1}$$

Предполагается, что область D содержит начало координат и разделена осью абсцисс и положительной осью ординат на части

$$\begin{gathered} D^{(1)} = D \cap \{x : x_2 < 0\}, \\ D^{(2)} = D \cap \{x : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}, \quad D^{(3)} = D \cap \{x : x_1 < 0,\ x_2 > 0\} \end{gathered} \tag{1.2}$$

и показатель p постоянен на каждой из частей. А именно,

$$\begin{gathered} p(x) = p_i \quad \text{на} \quad D^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \text{где} \quad 1 < p_3 < p_2 < p_1. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Целью настоящей работы являются доказательство гёльдеровской непрерывности решений уравнения (1.1) и получение неравенства Харнака для неотрицательных решений.

Для определения решения рассматриваемого уравнения введем пространство Соболева–Орлича

$$W(D) = \{u \in W^{1,1}(D) : |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D)\},$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00184).

где $W^{1,1}(D)$ – соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Последовательность $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \to u$ в $L^1(D)$ и выполняется

$$\lim_{j\to\infty}\int_D (\nabla u - \nabla u_j)^{p(x)}dx = 0.$$

Известно [3], [4], что для показателя, заданного (1.2), (1.3), гладкие функции плотны в $W(D)$: для любой $u \in W(D)$ найдется последовательность $u_j \in C^\infty(D)\cap W(D)$ так, что $u_j \to u$ в $W(D)$.

Под решением уравнения (1.1) будем понимать функцию $u \in W(D)$ такую, что интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi dx = 0 \tag{1.4}$$

выполнено для всех $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Решения уравнения (1.1) будем называть $p(x)$-гармоническими функциями.

1.2. История вопроса

Изучение задач с переменным показателем нелинейности было инициировано работами В.В. Жикова [1], [2], где для интегральных функционалов с переменным показателем вида

$$F[u] = \int_D f(x,\nabla u)dx, \quad \text{где} \quad f(x,\xi) = \frac{|\xi|^{p(x)}}{p(x)} - b\cdot\xi, \tag{1.5}$$

был обнаружен эффект Лаврентьева, т.е. задача нахождения инфимума этого функционала по естественному энергетическому пространству (соответствующему $W(D)$, снабженному граничным условием) и по множеству гладких функций из этого пространства приводит к различным результатам. Пример Жикова [2] был основан на структуре типа шахматной доски, когда $p(x) = 1 < p_1 < 2$ в $\{x = (x_1,x_2) : |x| < 1,\ x_1x_2 > 0\}$ и $p(x) = p_2 > 2$ в $\{x = (x_1,x_2) : |x| < 1,\ x_1x_2 < 0\}$.

Таким образом, возникает неоднозначность понятия решения, неоднозначность в способе постановки краевой задачи. Возникает, по крайней мере, два типа решений – W-решения, соответствующие естественному энергетическому пространству, и H-решения, которые получаются замыканием множества гладких функций в этом пространстве. Более того, W-решения и H-решения имеют различные свойства. В частности, для примера Жикова минимизант по всему естественному энергетическому пространству с нулевым условием на границе круга будет разрывен, а минимизант того же функционала по замыканию гладких финитных функций в этом пространстве будет непрерывен по Гельдеру. Используя ту же конфигурацию показателя, можно привести пример, когда W-решение задачи Дирихле в круге для эллиптического $p(x)$-лапласиана с гладкой граничной функцией будет разрывно, а H-решение непрерывно.

В той же работе было отмечено, что в ситуации, когда граница раздела фаз имеет более простую структуру, $p(x) = p_1$ в $\{x_2 > 0\}$, $p(x) = p_1$ в $\{x_2 < 0\}$, эффект Лаврентьева отстутствует, гладкие функции плотны в соответствующем соболевском пространстве и неоднозначность в определениии краевой задачи отсутствует. Естественно, в качестве линии раздела фаз здесь может быть взята и достаточно гладкая гиперповерхность, лишь бы был ограниченный оператор продолжения функции, определенной на подобласти, соответствующей большему значению показателя, во всю область.

В работе [3] (см. также [4]) было найдено некоторое общее условие геометрического характера, гарантирующее плотность гладких функций в соболевском пространстве с переменным показателем: для каждого $x \in D$ существуют положительные числа $h(x)$, $r(x)$, и вектор $\xi(x)$ такие, что $B^x_{r(x)} + C(x) \subset D$, $C(x) = \bigcup_{t\in(0,1)} B^{t\xi(x)}_{th(x)}$, и $p(z) \le p(z+y)$ для всех $z \in B^x_{r(x)}$, $y \in C(x)$. Здесь B^x_r обозначает шар радиуса r с центром в точке x. Для случая кусочно-постоянного показателя, принимающего два различных значения, где границей раздела фаз является гиперплоскость, это условие выполнено, а в ситуации примера Жикова оно не выполнено (нарушается в окрестности точки контакта четырех клеток).

Интересным примером, когда условие из [3] выполняется, является следующий: плоскость разделена тремя лучами, выходящими из начала координат, на три сектора A_i, и в каждом из этих секторов показатель принимает постоянное значение $p_i > 1$. Если $p_3 < p_2 < p_1$, то в качестве $C(x)$ можно выбрать сектор, являющийся пересечением сектора A_1 и полуплоскости, которая отделяется прямой, являющейся продолжением границы между A_3 и A_2, лежащей с той же стороны от этой прямой, что и сектор A_2. Конфигурация, рассматриваемая в настоящей работе, относится как раз к такому типу.

В работе [5] В.В. Жиков нашел аналитическое условие на показатель суммируемости (логарифмическое условие),

$$|p(x) - p(y)| \le k(\ln|x - y|^{-1})^{-1}, \quad |x - y| \le 1/2,$$

обеспечивающее отсутствие эффекта Лаврентьева, это условие было несколько уточнено в [6]. С современным состоянием науки в области интегральных функционалов и уравнений с переменным показателем нелинейности и связанных вопросов теории функций читатель может ознакомиться по обзорной статье В.В. Жикова [7], ее переводной версии [8], книгам [9]–[12].

В работе [13] было установлено свойство гёльдеровости $p(x)$-гармонических функций при выполнении логарифмического условия на показатель p. В работе [14] было показано, что для гёльдеровской непрерывности $p(x)$-гармонической функции в точке x_0 достаточно выполнения логарифмического условия лишь в этой точке (то есть $|p(x) - p(x_0)| \le k(\ln|x - x_0|^{-1})^{-1}$, $x \in B_r^{x_0} \subset D$, $r \in (0, 1/2)$), в работе [16] была показана непрерывность $p(x)$-гармонических функций в точке при ослабленном логарифмическом условии.

В работе [17] были рассмотрены локальные минимизанты функционала (1.5), где $b \equiv 0$, в области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $p(x) = p_1$ в $\{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$, $p(x) = p_2$ в $\{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n < 0\}$, D имеет непустое пересечение с гиперплоскостью $\Sigma = \{x_n = 0\}$. Эти локальные минимизанты являются $p(x)$-гармоническими функциями. Было показано, что они непрерывны по Гёльдеру в D. В [15] это свойство было обобщено на случай показателя p, удовлетворяющего логарифмическому условию лишь в точке $x_0 \in \Sigma$. При этом условии была показана гёльдеровская непрерывность H- и W-решений в точке x_0. В работе [18] для показателя из [17] было получено неравенство типа Харнака и показано отсутствие неравенства Харнака в классической форме. В [19] этот результат был обобщен на показатель, который в $D \cap \{x_n > 0\}$ и $D \cap \{x_n < 0\}$ удовлетворяет логарифмическому условию, и $p(x', -x_n) \ge p(x', x_n)$ для всех $x = (x', x_n) \subset D \cap \{x_n > 0\}$, а в [20] аналогичные утверждения были получены в ситуации, когда логарифмическое условие выполнено лишь в рассматриваемой точке $x_0 \in \Sigma$.

До настоящего времени исследования в области регулярности решений эллиптических и параболических уравнений велись либо для случая непрерывного показателя $p(\cdot)$ (с логарифмическим модулем непрерывности или достаточно близким к таковому), или для двухфазного случая, где граница раздела фаз достаточно гладкая.

Более сложные геометрические конфигурации не исследовались, несмотря на то, что они представляют очевидный интерес для приложений. Настоящая работа является первым шагом в этой области.

1.3. Основные результаты

Введем нужные для формулировки основных теорем обозначения. Через Q_R будем обозначать открытый квадрат с вершинами в точках $(R, 0)$, $(0, R)$, $(-R, 0)$, $(0, -R)$. Также для $i = 1, 2, 3$ положим $Q_R^{(i)} = Q_R \cap D^{(i)}$, $\tilde{Q}_R = Q_R \setminus \overline{Q}_R^{(3)}$. Пусть T_R^- — треугольник с вершинами в точках $(0, -R)$, $(R/2, -R/2)$, $(-R/2, R/2)$.

Основные результаты настоящей работы содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Пусть u — неотрицательное ограниченное решение уравнения* (1.1) *в Q_{4R}. Тогда*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{T_{2R}^-} u \le C \operatorname*{ess\,inf}_{Q_{2R}} (u + R), \tag{1.6}$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от величин p_1, p_2, p_3.

Из этого утверждения вытекает гёльдеровская непрерывность решений рассматриваемого уравнения.

Теорема 2. *Любое ограниченное решение уравнения* (1.1) *в D непрерывно по Гёльдеру в области D.*

В работах [18], [19] показано, что даже в случае двухфазного показателя из [17], что соответствует $p_2 = p_3 \neq p_1$, неравенство Харнака в классической форме невозможно, в частности, в неравенстве (1.6) нельзя T^-_{2R} заменить на Q_{2R}, и нельзя убрать дополнительное слагаемое R в правой части.

Используя те же методы, что и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что решения уравнения (1.1) будут локально ограниченными.

Далее через $C(p)$ будем обозначать различные положительные величины, которые зависят только от p_1, p_2, p_3. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^2$ и $f \in L^1(E)$ обозначим

$$\fint_E f dx = \frac{1}{|E|}\int_E f dx.$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В этом разделе мы докажем теорему 1. Далее полагаем, что $0 < R < 1/4$, $Q_{4R} \subset D$, w — неотрицательное решение уравнения (1.1), $w \le M$ в Q_{4R}, и $u = w + R$.

2.1. Оценки степеней решения

Пусть $0 < r \le R$, $\eta \in C_0^\infty(Q_{4R})$, $0 \le \eta \le 1$. Выбирая в интегральном тождестве (1.4) пробную функцию $\varphi = u^\beta(\eta r)^{p_1}$, где $\beta < 1 - p_1$, будем иметь

$$\int_{Q_{4R}^{(1)}} (r|\nabla u|)^{p_1} u^{\beta-1}\eta^{p_1} dx \le C(p)\int_{Q_{4R}} u^{\beta+p(x)-1} r^{p_1-p(x)}(r|\nabla\eta|)^{p(x)}\eta^{p_1-p(x)} dx. \tag{2.1}$$

Так как $u^{p(x)}r^{p_1-p(x)} \le u^{p_1}$, то

$$u^{\beta+p(x)-1}r^{p_1-p(x)}(r|\nabla u|)^{p(x)}\eta^{p_1-p(x)} \le (\eta^{p_1} + (r|\nabla\eta|)^{p_1})u^{\beta+p_1-1},$$

и из (2.1) следует

$$\int_{Q_{4R}^{(1)}} (r|\nabla u|)^{p_i} u^{\beta+p_1-p_i-1}\eta^{p_1} dx \le C(p)\int_{Q_{4R}} u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1} + (r|\nabla\eta|)^{p_1}) dx. \tag{2.2}$$

Для $x = (x_1, x_2)$ обозначим $\tilde{x} = (x_1, -x_2)$, для функции f обозначаем $\tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$. Положим

$$G_R = \{x \in Q_{4R} : x_2 > 0, \quad u(x) < \tilde{u}(x)\}$$

и, предполагая, что G_R не пусто, возьмем в (1.4) пробную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} (u^\gamma(x) - \tilde{u}^\gamma(x))\eta^{p_1}(x) & \text{в} \quad G_R, \\ 0 & \text{в} \quad Q_{4R}\setminus G_R, \end{cases}$$

где постоянная $\gamma \le 1 - p_2$ будет уточнена позже. Используя соотношение $0 \le u^\gamma - \tilde{u}^\gamma \le u^\gamma$ в G_R, найдем

$$|\gamma|\int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)} u^{\gamma-1}\eta^{p_1} dx \le |\gamma|\int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\tilde{u}|\tilde{u}^{\gamma-1}\eta^{p_1} dx + p_1\int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\eta| u^\gamma\eta^{p_1-1} dx. \tag{2.3}$$

Оценим подынтегральные выражения в правой части (2.3) по наравенству Юнга, воспользуемся определением G_R и тем, что $\gamma < 0$. Для $i = 2, 3$ по неравенству Юнга имеем

$$|\nabla u|^{p_i-1}|\nabla\tilde{u}|\tilde{u}^{\gamma-1} \le \varepsilon_1|\nabla u|^{p_i}\tilde{u}^{\gamma-1} + \varepsilon_1^{1-p_i}|\nabla\tilde{u}|^{p_i}\tilde{u}^{\gamma-1} \le \varepsilon_1|\nabla u|^{p_i}u^{\gamma-1} + \varepsilon_1^{1-p_i}|\nabla\tilde{u}|^{p_i}\tilde{u}^{\gamma-1}, \tag{2.4}$$

и

$$|\nabla u|^{p_i-1}|\nabla\eta|u^{\gamma}\eta^{p_1-1}\leq\varepsilon_2|\nabla u|^{p_i}u^{\gamma-1}\eta^{p_1}+\varepsilon_2^{1-p_i}\eta^{p_1-p_i}u^{\gamma+p_i-1}|\nabla\eta|^{p_i}. \tag{2.5}$$

Учитывая соотношения (2.4), (2.5) в (2.3) и выбор срезающей функции η, после соответствующего выбора ε_1 и ε_2 найдем

$$\int\limits_{G_R}|\nabla u|^{p(x)}u^{\gamma-1}\eta^{p_1}dx\leq C(p)\left(\int\limits_{G_R}|\nabla\tilde{u}|^{p(x)}\tilde{u}^{\gamma-1}\eta^{p_1}dx+\int\limits_{G_R}u^{\gamma+p(x)-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_1-p(x)}dx\right). \tag{2.6}$$

Выберем постоянную γ, положив

$$\gamma=\beta+p_1-p_2.$$

По неравенству Юнга получаем

$$(r|\nabla\tilde{u}|)^{p_2}\tilde{u}^{\beta+p_1-p_2-1}\leq(r|\nabla\tilde{u}|)^{p_1}\tilde{u}^{\beta-1}+\tilde{u}^{\beta+p_1-1}.$$

Аналогично, поскольку $\tilde{u}\geq R\geq r$, то

$$r^{p_2}|\nabla\tilde{u}|^{p_3}\tilde{u}^{\beta+p_1-p_2-1}\leq(r|\nabla\tilde{u}|)^{p_3}\tilde{u}^{\beta+p_1-p_3-1}\leq(r|\nabla\tilde{u}|)^{p_1}\tilde{u}^{\beta-1}+\tilde{u}^{\beta+p_1-1}.$$

Поэтому умножая (2.6) на r^{p_2} получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{G_R\cap Q_{4R}^{(2)}}(r|\nabla u|)^{p_2}u^{\beta+p_1-p_2-1}\eta^{p_1}dx\leq\\ \leq C(p)\left(\int\limits_{G_R}(r|\nabla\tilde{u}|)^{p_1}\tilde{u}^{\beta-1}\eta^{p_1}dx+\int\limits_{G_R}\tilde{u}^{\beta+p_1-1}\eta^{p_1}dx+r^{p_2}\int\limits_{G_R}u^{\gamma+p(x)-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_1-p(x)}dx\right).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Или, так как

$$(r|\nabla u|)^{p_3}u^{\beta+p_1-p_3-1}\leq(r|\nabla u|)^{p_2}u^{\beta+p_1-p_2-1}+u^{\beta+p_1-1},$$

$$\tilde{u}^{\beta+p_1-1}\leq u^{\beta+p_1-1}\quad \text{в}\quad G_R,$$

$$r^{p_2}u^{\gamma+p_i-1}|\nabla\eta|^{p_i}\eta^{p_1-p_i}\leq u^{\beta+p_1-1}(r|\nabla\eta|)^{p_i}\eta^{p_1-p_i}\leq u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1}+(r|\nabla\eta|)^{p_1})$$

для $i=2,3$, то оценку (2.7) можно переписать в виде

$$\int\limits_{G_R\cap Q_{4R}^{(2)}}(r|\nabla u|)^{p_3}u^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx\leq C(p)\left(\int\limits_{G_R}(r|\nabla\tilde{u}|)^{p_1}\tilde{u}^{\beta-1}\eta^{p_1}dx+\int\limits_{G_R}u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1}+(r|\nabla\eta|)^{p_1})dx\right). \tag{2.8}$$

Из (2.2) по определению $\tilde{u}$ и $\tilde{\eta}$ имеем

$$\int\limits_{G_R}(r|\nabla\tilde{u}|)^{p_1}\tilde{u}^{\beta-1}\eta^{p_1}dx\leq\int\limits_{Q_{4R}^{(1)}}(r|\nabla u|)^{p_1}u^{\beta-1}\tilde{\eta}^{p_1}dx\leq C(p)\int\limits_{Q_{4R}}u^{\beta+p_1-1}(\tilde{\eta}^{p_1}+(r|\nabla\tilde{\eta}|)^{p_1})dx.$$

Подставляя эту оценку в (2.8), получаем

$$\int\limits_{G_R\cap Q_{4R}^{(2)}}(r|\nabla u|)^{p_3}u^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx\leq C(p)\int\limits_{Q_{4R}}u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1}+\eta^{p_1}+(r|\nabla\eta|)^{p_1}+(r|\nabla\tilde{\eta}|)^{p_1})dx. \tag{2.9}$$

Положим

$$v(x)=\begin{cases}u(x), & \text{если}\quad x\in Q_{4R}^{(1)},\\ \min(u(x),\tilde{u}(x)), & \text{если}\quad x\in Q_{4R}^{(2)}.\end{cases}$$

В силу определения v и оценки (2.2) получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_{4R}^{(2)}\setminus G_R}(r|\nabla v|)^{p_3}v^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx=\int\limits_{Q_{4R}^{(2)}}(r|\nabla\tilde{u}|)^{p_3}\tilde{u}^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx\leq\\ \leq\int\limits_{Q_{4R}^{(1)}}(r|\nabla u|)^{p_3}u^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx\leq C(p)\int\limits_{Q_{4R}}u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1}+(r|\nabla\eta|)^{p_1})dx,\end{gathered}$$

а из (2.9) находим

$$\int\limits_{G_R\cap Q_{4R}^{(2)}} (r|\nabla v|)^{p_3} v^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx = \int\limits_{G_R\cap Q_{4R}^{(2)}} (r|\nabla u|)^{p_3} u^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le$$

$$\le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1}+\tilde\eta^{p_1}+(r|\nabla\eta|)^{p_1}+(r|\nabla\tilde\eta|)^{p_1})dx.$$

Так как $v = u$ в $Q_{4R}^{(1)}$, вновь по неравенству (2.2) получаем

$$\int\limits_{Q_{4R}^{(1)}} (r|\nabla v|)^{p_3} v^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1}+(r|\nabla\eta|)^{p_1})dx.$$

Складывая последние оценки, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\tilde Q_{4R}} (r|\nabla v|)^{p_3} v^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1}+\eta^{p_1}+(r|\nabla\eta|)^{p_1}+(r|\nabla\tilde\eta|)^{p_1})dx. \tag{2.10}$$

На последнем шаге сделаем непрерывное кусочно-линейное преобразование из $\tilde Q_{4R}$ в $D^{(3)}$ с помощью симметричного переноса вдоль биссектрисы третьего квадранта относительно координатных осей. А именно, сопоставим каждой точке $x\in\tilde Q_{4R}$ точку $\hat x\in D^{(3)}$, симметричную точке x относительно точки пересечения прямой, проходящей через точку x параллельно биссектрисе квадранта $\{x_1<0,\ x_2>0\}$, с границей этого квадранта. Если точка x имеет координаты (x_1,x_2), то координаты $(\hat x_1,\hat x_2)$ точки $\hat x$ задаются по правилу

$$(\hat x_1,\hat x_2)=\begin{cases}(x_1+2x_2,-x_2), & \text{если}\quad x_1+x_2\le 0,\\ (-x_1,2x_1+x_2), & \text{если}\quad x_1+x_2\ge 0.\end{cases}$$

Это преобразование является липшицевым с якобианом, равным минус единице всюду, кроме прямой $x_1+x_2=0$. Образ E_{4R} множества $Q_{4R}^{(3)}$ есть четырехугольник с вершинами в точках $(-4R,0)$, $(0,0)$, $(2R,-2R)$, $(0,4R)$, следовательно, $E_{4R}\subset Q_{4R}$.

Продолжим функцию v из E_{4R} в $Q_{4R}^{(3)}$: для $x\in Q_{4R}^{(3)}$ положим $\hat v(x)=v(\hat x)$.

Рассмотрим теперь множество

$$\hat G_R=\{x\in Q_{4R}^{(3)}: u(x)<\hat v(x)\}.$$

Предполагая, что $\hat G_R$ не пусто, выберем в интегральном тождестве (1.4) пробную функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}(u^{\beta+p_1-p_3}(x)-\hat v^{\beta+p_1-p_3}(x))\eta^{p_1}(x) & \text{в}\quad \hat G_R,\\ 0 & \text{в}\quad Q_{4R}^{(3)}\setminus\hat G_R.\end{cases}$$

Выбор такой функции обоснован определением функции v. Поскольку $0\le u^{\beta+p_1-p_3}-\hat v^{\beta+p_1-p_3}\le$ $\le u^{\beta+p_1-p_3}$ в $\hat G_R$, получим

$$\begin{aligned}|\beta+p_1-p_3|\int\limits_{\hat G_R}|\nabla u|^{p_3}u^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le |\beta+p_1-p_3|\int\limits_{\hat G_R}|\nabla u|^{p_3-1}|\nabla\hat v|\hat v^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx\,+\\ +\ p_3\int\limits_{\hat G_R}|\nabla u|^{p_3-1}|\nabla\eta|u^{\beta+p_1-p_3}\eta^{p_1-1}dx.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Далее по неравенству Юнга и определению множества $\hat G_R$ имеем

$$|\nabla u|^{p_3-1}|\nabla\hat v|\hat v^{\beta+p_1-p_3-1}\le\varepsilon_1|\nabla u|^{p_3}u^{\beta+p_1-p_3-1}+\varepsilon_1^{1-p_3}|\nabla\hat v|^{p_3}\hat v^{\beta+p_1-p_3-1},$$

$$|\nabla u|^{p_3-1}|\nabla\eta|u^{\beta+p_1-p_3}\eta^{p_1-1}\le\varepsilon_2|\nabla u|^{p_3}u^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}+\varepsilon_2^{1-p_3}u^{\beta+p_1-1}|\nabla\eta|^{p_3}\eta^{p_1-p_3}$$

и, пользуясь выбором срезающей функции и условием на показатель p, после выбора постоянных ε_i, где $i = 1, 2$, из (2.11) найдем

$$\int\limits_{\hat{G}_R} |\nabla u|^{p_3} u^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le C(p)\left(\int\limits_{\hat{G}_R} u^{\beta+p_1-1}|\nabla\eta|^{p_3}\eta^{p_1-p_3}dx + \int\limits_{\hat{G}_R}|\nabla\hat{v}|^{p_3}\hat{v}^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx\right).$$

После домножения этого неравенства на r^{p_3} и применения неравенства Юнга придем к оценке

$$\int\limits_{\hat{G}_R} (r|\nabla u|)^{p_3} u^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le C(p)\left(\int\limits_{\hat{G}_R} u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1} + (r|\nabla\eta|)^{p_1})dx + \int\limits_{\hat{G}_R}(r|\nabla\hat{v}|)^{p_3} v^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx\right). \tag{2.12}$$

Введем функцию h, положив

$$h(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если} \quad x \in \tilde{Q}_{4R}, \\ \min(u(x), \hat{v}(x)), & \text{если} \quad x \in Q_{4R}^{(3)}, \end{cases}$$

и прибавим к обеим частям неравенства (2.12) интеграл

$$\int\limits_{Q_{4R}^{(3)}\setminus\hat{G}_R} (r|\nabla\hat{v}|)^{p_3}\hat{v}^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx.$$

В результате будем иметь

$$\int\limits_{Q_{4R}^{(3)}} (r|\nabla h|)^{p_3} h^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le C(p)\left(\int\limits_{Q_{4R}^{(3)}} u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1} + (r|\nabla\eta|)^{p_1})dx + \int\limits_{Q_{4R}^{(3)}}(r|\nabla\hat{v}|)^{p_3}\hat{v}^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx\right).$$

По определению $\hat{v}$ найдем отсюда

$$\int\limits_{Q_{4R}^{(3)}} (r|\nabla h|)^{p_3} h^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le C(p)\left(\int\limits_{Q_{4R}^{(3)}} u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1} + (r|\nabla\eta|)^{p_1})dx + \int\limits_{E_{4R}}(r|\nabla v|)^{p_3} v^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}(\hat{x})dx\right). \tag{2.13}$$

Определим функцию

$$\xi(x) = \begin{cases} \eta(x), & x \in \bar{Q}_{4R}^{(3)}, \\ \eta(\hat{x}), & x \in \tilde{Q}_{4R}. \end{cases}$$

Из оценки (2.10), в которой положим $\eta = \xi$, получаем

$$\int\limits_{E_{4R}} (r|\nabla v|)^{p_3} v^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}(\hat{x})dx \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} u^{\beta+p_1-1}(\xi^{p_1} + \tilde{\xi}^{p_1} + (r|\nabla\xi|)^{p_1} + (r|\nabla\tilde{\xi}|)^{p_1})dx. \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в (2.13), имеем

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q_{4R}^{(3)}} (r|\nabla h|)^{p_3} h^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}^{(3)}} u^{\beta+p_1-1}(\eta^{p_1} + (r|\nabla\eta|)^{p_1})dx + \\ + C(p)\int\limits_{Q_{4R}} u^{\beta+p_1-1}(\xi^{p_1} + \tilde{\xi}^{p_1} + (r|\nabla\xi|)^{p_1} + (r|\nabla\tilde{\xi}|)^{p_1})dx. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Совмещая эту оценку с (2.10), приходим к неравенству

$$\int\limits_{Q_{4R}} (r|\nabla h|)^{p_3} h^{\beta+p_1-p_3-1}\eta^{p_1}dx \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} u^{\beta+p_1-1}\Phi(r,\eta)dx, \tag{2.16}$$

где

$$\Phi(r,\eta) = \xi^{p_1} + \tilde{\xi}^{p_1} + \eta^{p_1} + \tilde{\eta}^{p_1} + (r|\nabla\xi|)^{p_1} + (r|\nabla\tilde{\xi}|)^{p_1} + (r|\nabla\eta|)^{p_1} + (r|\nabla\tilde{\eta}|)^{p_1}. \tag{2.17}$$

2.2. Мозеровская итерация

Пусть $\beta + p_1 - 1 < 0$. Так как $h \le u$ и $\beta + p_1 - 1 \le 0$, неравенство (2.16) влечет

$$\int\limits_{Q_{4R}} (r|\nabla h|)^{p_3} h^{\beta + p_1 - p_3 - 1}\eta^{p_1} dx \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} h^{\beta + p_1 - 1}\Phi(r,\eta)dx,$$

откуда

$$\int\limits_{Q_{4R}} \left(r\left|\nabla(h^{(\beta + p_1 - 1)/p_3}\eta^{p_1/p_3})\right|\right)^{p_3} dx \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} h^{\beta + p_1 - 1}\Phi(r,\eta)dx. \tag{2.18}$$

Будем использовать неравенство Соболева в форме (напомним, что $n = 2$)

$$\left(\fint\limits_{Q_{4R}} |\varphi|^{2p_3} dx\right)^{1/2} \le C(p_3)\fint\limits_{Q_{4R}} (R|\nabla\varphi|)^{p_3} dx \tag{2.19}$$

для $\varphi \in W_0^{1,p_3}(Q_{4R})$.

Из (2.18), где $r = R$ и неравенства (2.19), в котором $\varphi = h^{(\beta + p_1 - 1)/p_3}\eta^{p_1/p_3}$, имеем

$$\left(\fint\limits_{Q_{4R}} h^{2(\beta + p_1 - 1)}\eta^{2p_1} dx\right)^{1/2} \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} h^{\beta + p_1 - 1}\Phi(R,\eta)dx. \tag{2.20}$$

Пусть $s \in (0, 1)$. Для $j = 0, 1, 2, \ldots$ определим $R_j = 3sR + 3(1 - s)2^{-j}R$. В оценке (2.20) выберем $\beta = \beta_j = 1 - p_1 - 2^j q$, $q > 0$, $\eta = \eta_j \in C_0^\infty(Q_{R_j})$ такую, что $\eta_j = 1$ в $Q_{R_{j+1}}$, $0 \le \eta \le 1$, $|\nabla a_j| \le (1 - s)^{-1}2^j R^{-1}$. Положим

$$Y_j = \left(\fint\limits_{Q_{R_j}} h^{\beta_j + p_1 - 1} dx\right)^{1/(1 - p_1 - \beta_j)}.$$

Отметим, что норма матрицы Якоби отображения $x \mapsto \hat{x}$, индуцированная стандартной евклидовой нормой в $\mathbb{R}^2$, не превосходит 7. Поэтому из (2.17) получаем $\Phi(R,\eta_j) \le C(p)2^{p_1 j}$ и $\Phi(R, p_j) = 0$ вне носителя η_j. Теперь из (2.20) получим

$$Y_{j+1} \le (C(p)(1 - s)^{-1}2^j)^{p_1 2^{-j}/q} Y_j.$$

Итерируя это неравенство, с учетом того, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} jx^j = x(1 - x)^{-2}, \quad |x| < 1,$$

получим

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q_{3Rs}} h^{-1} \le \limsup_{j\to\infty} Y_j \le C(p,q)(1 - s)^{-2p_1/q}\left(\fint\limits_{Q_{3R}} h^{-q} dx\right)^{1/q},$$

или же

$$\operatorname*{ess\,inf}_{Q_{3Rs}} h \ge C(p,q)(1 - s)^{2p_1/q}\left(\fint\limits_{Q_{3R}} h^{-q} dx\right)^{-1/q}. \tag{2.21}$$

2.3. Логарифмические оценки

Возьмем теперь $\beta = 1 - p_1$. Тогда оценка (2.16) принимает вид

$$\int\limits_{Q_{4R}} (r|\nabla h|)^{p_3} h^{-p_3}\eta^{p_1} dx \le C(p)\int\limits_{Q_{4R}} \Phi(r,\eta)dx. \tag{2.22}$$

Через Q_r^z будем обозначать открытый квадрат, который получается из Q_r параллельным переносом его центра в точку z. Пусть $Q_{2r}^z \subset Q_{4R}$. Выбирая в (2.22) функцию $\eta \in C_0^\infty(Q_{2r}^z)$ такую, что $\eta = 1$ в Q_r^z, $0 \le \eta \le 1$, $|\nabla\eta| \le 3r^{-1}$, будем иметь

$$\int\limits_{Q_r^z} (r|\nabla h|)^{p_3} h^{-p_3} dx \le C(p) r^2. \tag{2.23}$$

По неравенству Пуанкаре, отсюда получим

$$⨍_{Q_r^z} \left|\ln h - \overline{(\ln h)}_{z,r}\right| dx \le C(p), \quad \overline{(\ln h)}_{z,r} = ⨍_{Q_r^z} \ln h dx. \tag{2.24}$$

Из (2.24) по лемме Джона–Ниренберга (или из оценки (2.23) по теореме 7.21 из [21]) найдется такое $q_0 = q_0(p) > 0$, что

$$\left(⨍_{Q_{3R}} h^{q_0} dx \right)^{1/q_0} \le C(p) \left(⨍_{Q_{3R}} h^{-q_0} dx \right)^{-1/q_0}. \tag{2.25}$$

2.4. Завершение доказательства

Совмещая оценки (2.25) и (2.21) для $s = 2/3$, пользуясь тем, что $h = u$ в $Q_{3R}^{(1)}$, и классическим неравенством Харнака для p-лапласиана с постоянным показателем p_1 в $Q_{4R}^{(1)}$ (см. [22]), имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{T_{2R}^-} u \le C(p_1) \operatorname*{ess\,inf}_{T_{2R}^-} u \le \left(⨍_{T_{2R}^-} u^{q_0} dx \right)^{1/q_0} \le C(q_0) \left(⨍_{Q_{3R}^{(1)}} u^{q_0} dx \right)^{1/q_0} \le$$
$$\le C(p) \operatorname*{ess\,inf}_{Q_{2R}} h = C(p) \operatorname*{ess\,inf}_{Q_{2R}} (u + R),$$

что влечет требуемое утверждение. Теорема 1 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Из результатов [17] следует, что решение уравнения (1.1) непрерывно по Гёльдеру всюду в D с универсальным показателем Гёльдера всюду, кроме начала координат. Докажем, что ограниченное решение уравнения (1.1) непрерывно по Гёльдеру в начале координат. Отсюда будет вытекать и гёльдеровская непрерывность решения во всей области D.

Пусть u – ограниченное решение уравнения (1.1) в D, $Q_{4R} \subset D$ и

$$M_{4R} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_{4R}} u, \quad m_{4R} = \operatorname*{ess\,inf}_{Q_{4R}} u, \quad M_{2R}^- = \operatorname*{ess\,sup}_{T_{2R}^-} u, \quad m_{2R}^- = \operatorname*{ess\,inf}_{T_{2R}^-} u.$$

Пользуясь теоремой 1 для $u - m_{4R}$ и $M_{4R} - u$, получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{T_{2R}^-} (u - m_{4R}) \le C \operatorname*{ess\,inf}_{Q_{2R}} (u - m_{4R} + R),$$
$$\operatorname*{ess\,sup}_{T_{2R}^-} (M_{4R} - u) \le C \operatorname*{ess\,inf}_{Q_{2R}} (M_{4R} - u + R),$$

где $C = C(p)$, не ограничивая общности, можно считать, что $C > 1$. Складывая эти неравенства, будем иметь

$$M_{4R} - m_{4R} + M_{2R}^- - m_{2R}^- \le C(m_{2R} - m_{4R} + M_{4R} - M_{2R} + 2R),$$

откуда в силу неотрицательности величины $M_{2R}^- - m_{2R}^-$ приходим к оценке уменьшения осцилляции

$$M_{2R} - m_{2R} \frac{C-1}{C} \le (M_{4R} - m_{4R}) + 2R.$$

Отсюда следует, что решение непрерывно по Гёльдеру в начале координат. Теорема 2 доказана.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе впервые исследован вопрос о неравенстве Харнака и гёльдеровской непрерывности для решений эллиптического $p(x)$-лапласиана с трехфазным кусочно-постоянным показателем p в плоской области со стыком фаз в одной точке в случае, когда границей раздела фаз являются три луча, исходящие из начала координат. Ранее подобные результаты были известны, только когда показатель $p(x)$ является двухфазным и границей раздела фаз является прямая (или гиперплоскость в пространствах большей размерности). Полученный в настоящей работе результат непосредственно обобщается на многомерный случай, когда пространство разделено на три части: вначале гиперплоскостью, а затем одно из полупространств разделено гиперплоскостью, перпендикулярной первой.

Конфигурация (1.3), где $D^{(i)}$ заданы (1.2), выбрана для простоты изложения. В качестве $D^{(i)}$ можно взять секторы, разделяемые тремя лучами, выходящими из начала координат. В этом случае общая схема рассуждений останется той же, изменится лишь метод продолжения функции (операции $f \mapsto \tilde{f}$, $f \mapsto \hat{f}$ в доказательстве теоремы 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жиков В.В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 5. С. 961–995.
2. *Жиков В.В.* Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 675–711.
3. *Edmunds D.E., Rakosnik J.* Density of smooth functions in $W^{k,p}(\Omega)$ // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1992. V. 437. P. 229–236.
4. *Fan X., Wang S., Zhao D.* Density of $C^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p(x)}(\Omega)$ with discontinuous exponent $p(x)$ // Math. Nachr. 2006. V. 279. № 1–2. P. 142–149.
5. *Zhikov V.V.* On Lavrentiev's Phenomenon // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 3. № 2. P. 249–269.
6. *Жиков В.В.* О плотности гладких функций в пространстве Соболева-Орлича // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 310. С. 67–81.
7. *Жиков В.В.* О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста // Проблемы математического анализа. 2011. Т. 54. С. 23–112.
8. *Zhikov V.* On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci. 2011. V. 173. № 5. P. 463–570.
9. *Жиков В.В.* О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2017.
10. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lect. Notes Math. 2017. Berlin: Springer, 2011.
11. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Basel: Birkhäuser–Springer, 2013.
12. *Kokilashvili V., Meshkii A., Rafeiro H., Samko S.* Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Vol. 1: Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces. Vol. 2: Variable Exponent Hölder, Morrey–Campanato and Grand Spaces. Operator Theory: Advances and Applications 248, 249. Basel: Birkhäuser–Springer, 2016.
13. *Алхутов Ю.А.* Неравенство Харнака и гельдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Дифференц. ур-ния. 1997. Т. 33. № 12. С. 1651–1660.
14. *Крашенинникова О.А.* О непрерывности в точке решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 204–211.
15. *Алхутов Ю.А.* О гельдеровой непрерывности $p(x)$-гармонических функций // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 2. С. 3–28.
16. *Алхутов Ю.А., Крашенинникова О.А.* О непрерывности решений эллиптических уравнений с переменным порядком нелинейности // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 7–15.
17. *Acerbi E., Fusco N.* A transmission problem in the calculus of variations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 1994. V. 2. № 1. P. 1–16.
18. *Алхутов Ю.А., Сурначев М.Д.* О неравенстве Харнака для эллиптического (p,q)-лапласиана // Докл. АН. 2016. Т. 470. № 6. С. 623–627.
19. *Alkhutov Yu.A., Surnachev M.D.* A Harnack inequality for a transmission problem with $p(x)$-Laplacian // Applicable Analysis. 2019. V. 98. № 1–2. P. 332–344.
20. *Алхутов Ю.А., Сурначев М.Д.* О неравенстве Харнака для $p(x)$-лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$ // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 8–56.
21. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Пер. с англ. М.: Наука, 1989.
22. *Serrin J.* Local behavior of solutions of quasi-linear equations // Acta Math. 1964. V. 111. P. 247–302.