ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 8, с. 1339–1350

УДК 517.956.2

ПРОБЛЕМА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНЫХ-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2020 г. А. Ашыралыев[1,2,3,*], М. Ашыралыев[4,**], М. А. Ашыралыева[5,***]

[1] 99138 Никосия, Ближневосточный университет, ТРСК, Турция

[2] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

[3] 050010 Алматы, Институт математики и математического моделирования, Казахстан

[4] 34353 Стамбул, Бахчешехир университет, Турция

[5] 744000 Ашхабад, Туркменский государственный университет им. Махтумкули, Туркменистан

*e-mail: aallaberen@gmail.com

**e-mail: maksat.ashyralyyev@eng.bau.edu.tr

***e-mail: ashyrmaral2010@mail.ru

Поступила в редакцию 15.02.2020 г.
Переработанный вариант 15.02.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Рассматривается задача идентификации для уравнения смешанного телеграфного-параболического типа с неизвестным параметром, зависящим от пространственных переменных. Однозначная разрешимость данной задачи доказана и неравенства устойчивости для ее решения установлены. В качестве приложений получены оценки устойчивости для решений четырех задач идентификации для телеграфных-параболических уравнений с неизвестным источником, зависящим от пространственных переменных. Библ. 41.

Ключевые слова: задача идентификации источника, уравнение телеграфного-параболического типа, устойчивость, гильбертово пространство.

DOI: 10.31857/S0044466920080037

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретические методы и приложения различных локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа широко исследованы многими исследователями (см. [1]–[3] и библиографию в них). В частности, были изучены различные нелокальные краевые задачи для уравнений гиперболически-параболического типа и численные методы для приближенных решений этих задач (см. [4]–[8] и библиографию в них).

Дифференциальные уравнения с неизвестными параметрами играют важную роль в различных областях науки и техники. По этой причине такого рода уравнения были широко изучены в ряде публикаций (см. [9]–[32] и библиографию в них). Однако теория задач идентификации для уравнений смешанного типа еще не получила должного внимания.

Основной целью данной работы является исследование задачи идентификации для уравнения смешанного телеграфного-параболического типа с неизвестным параметром, зависящим от пространственных переменных. Хорошо известно, что различные краевые задачи для телеграфных-параболических уравнений с параметром приводятся к следующей краевой задаче для телеграфного-параболического уравнения с неизвестным параметром p в гильбертовом пространстве H с самосопряженным положительно-определенным оператором A:

$$\begin{gathered} u''(t) + \alpha u'(t) + Au(t) = f(t) + p, \quad 0 < t < 1, \\ u'(t) + Au(t) = g(t) + p, \quad -1 < t < 0, \\ u(-1) = \varphi, \quad u(\lambda) = \psi, \quad -1 < \lambda \le 1, \\ u(0+) = u(0-), \quad u'(0+) = u'(0-), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $A \geq \delta I$, $\delta > 0$ и $\alpha \geq 0$. Здесь $u(t)$ и p обозначают

$$u(t) = u(t; f(t), g(t), \varphi, \psi), \qquad p = p(f(t), g(t), \varphi, \psi).$$

Пара $(u(t), p)$ есть решение обратной задачи (1.1), если выполнены следующие условия:

1) $u(t) \in D$ для $t \in [-1, 1]$, $p \in H$ и функция $Au(t)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Здесь $D = D(A)$ обозначает область определения оператора A;

2) $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$ и непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1, 0]$. Производные в конечных точках отрезков понимаются как соответствующие односторонние производные;

3) $(u(t), p)$ удовлетворяет уравнениям и краевыем условиям (1.1).

Решение задачи (1.1), определенное таким образом, с этого момента будет означать решение задачи (1.1) в пространстве $C(H) \times H$. Здесь $C(H) = C([-1, 1], H)$ обозначает пространство непрерывных на $[-1, 1]$ функций со значением в H и нормой

$$\|u\|_{C(H)} = \max_{-1 \leq t \leq 1} \|u(t)\|_H.$$

Заметим, что задача (1.1) в случае $\alpha = 0$ была ранее рассмотрена авторами. Корректность этой задачи в случае $\alpha = 0$ была установлена в работе [33]. Разностные схемы первого и второго порядка для приближенного решения краевой задачи (1.1) в случае $\alpha = 0$ были построены и изучены в работах [34] и [35] соответственно. Алгоритмы численного решения этих разностных схем были обсуждены в работах [36], [37].

В настоящей работе доказывается основная теорема об устойчивости решения задачи (1.1) в пространстве $C(H) \times H$. Результат этой теоремы в приложениях позволяет получить оценки устойчивости для решений четырех задач идентификации для телеграфных-параболических уравнений с неизвестным источником, зависящим от пространственных переменных.

Чтобы сформулировать результаты, введем оператор $G = A - \frac{\alpha^2}{4} I$. Нетрудно заметить, что оператор G является самосопряженным положительно-определенным в пространстве H, если $\delta > \frac{\alpha^2}{4}$. В настоящей работе мы предполагаем, что

$$\alpha > 0, \qquad \delta \geq \frac{\alpha^2}{3} + 1.$$

Пусть $\{c(t),\ t \geq 0\}$ является косинус оператор-функцией, определенной по формуле:

$$c(t) = \frac{e^{itG^{1/2}} + e^{-itG^{1/2}}}{2}.$$

Тогда из определения синус оператор-функции $s(t)$

$$s(t)u = \int_0^t c(\tau) u \, d\tau$$

следует, что

$$s(t) = G^{-1/2} \frac{e^{itG^{1/2}} - e^{-itG^{1/2}}}{2i}.$$

Теорию косинус оператор-функции, см. [38], [39]. Прежде всего приведем леммы, необходимые в дальнейшем.

Лемма 1. *Имеют место следующие оценки*:

$$\|c(t)\|_{H \to H} \leq 1, \quad \|s(t)\|_{H \to H} \leq t, \quad \left\|A^{1/2} s(t)\right\|_{H \to H} \leq 2, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

$$\left\|AG^{-1}\right\|_{H \to H} \leq 4, \quad \left\|\alpha A^{-1/2}\right\|_{H \to H} \leq \sqrt{3}, \tag{1.3}$$

$$\left\|e^{-tA}\right\|_{H\to H}\le e^{-\delta t},\quad t\ge 0,\quad \left\|A^{1/2}e^{-tA}\right\|_{H\to H}\le\frac{1}{\sqrt{2et}},\quad t>0. \tag{1.4}$$

Доказательство этих оценок основывается на спектральном разложении самосопряженного положительно-определенного оператора в гильбертовом пространстве.

Лемма 2. *Оператор*

$$I-e^{-(1+\lambda)A},\quad -1<\lambda\le 0,$$

имеет ограниченный обратный оператор:

$$E=(I-e^{-(1+\lambda)A})^{-1},$$

для которого верна следующая оценка:

$$\|E\|_{H\to H}\le\frac{1}{1-e^{-(1+\lambda)\delta}}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Используя свойства положительной определенности и самосопряженности оператора A, имеем

$$\left\|e^{-(\lambda+1)A}\right\|_{H\to H}\le\sup_{\delta\le\rho<\infty}e^{-(\lambda+1)\rho}\le e^{-(\lambda+1)\delta}<1. \tag{1.6}$$

Доказательство оценки (1.5) следует из неравенства (1.6). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Оператор*

$$I-e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}e^{-A}\left[c(\lambda)+\left(\frac{\alpha}{2}-A\right)s(\lambda)\right],\quad 0<\lambda\le 1,$$

имеет ограниченный обратный оператор:

$$Q=\left(I-e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}e^{-A}\left[c(\lambda)+\left(\frac{\alpha}{2}-A\right)s(\lambda)\right]\right)^{-1},$$

для которого имеет место следующая оценка:

$$\|Q\|_{H\to H}\le\frac{1}{1-e^{-\delta}\sqrt{\delta^2+\delta}}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Используя $\alpha>0$, $\delta\ge\frac{\alpha^2}{3}+1>1$, определения для $c(t)$ и $s(t)$, свойства положительной определенности и самосопряженности оператора A, имеем

$$\left\|e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}e^{-A}\left[c(\lambda)+\left(\frac{\alpha}{2}-A\right)s(\lambda)\right]\right\|_{H\to H}\le\sup_{\delta\le\rho<\infty}e^{-\rho}\left|\frac{e^{i\lambda\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}}+e^{-i\lambda\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}}}{2}+\frac{\frac{\alpha}{2}-\rho}{\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}}\frac{e^{i\lambda\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}}-e^{-i\lambda\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}}}{2i}\right|=$$

$$=\sup_{\delta\le\rho<\infty}e^{-\rho}\left|\cos\left(\lambda\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}\right)+\frac{\frac{\alpha}{2}-\rho}{\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}}\sin\left(\lambda\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}\right)\right|=$$

$$=\sup_{\delta\le\rho<\infty}e^{-\rho}\left|\sqrt{\frac{\rho^2+\rho-\alpha\rho}{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}}\cos\left(\lambda\sqrt{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}-\mu_0\right)\right|\le\sup_{\delta\le\rho<\infty}e^{-\rho}\sqrt{\frac{\rho^2+\rho-\alpha\rho}{\rho-\frac{\alpha^2}{4}}}\le$$

$$\le\sup_{\delta\le\rho<\infty}e^{-\rho}\sqrt{\rho^2+\rho-\alpha\rho}\le\sup_{\delta\le\rho<\infty}e^{-\rho}\sqrt{\rho^2+\rho}\le e^{-\delta}\sqrt{\delta^2+\delta}<1.$$

Этот результат позволяет получить неравенство (1.7). Лемма 3 доказана.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Докажем основную теорему о непрерывной зависимости решения задачи (1.1) от начальных данных.

Теорема 1. *Предположим, что* $\varphi \in D(A)$, $\psi \in D(A)$, $f(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[0, 1]$ *и* $g(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[-1, 0]$. *Тогда для решения* $(u(t), p)$ *задачи* (1.1) *в* $C(H)\times H$ *имеют место следующие неравенства*:

$$\|u\|_{C(H)} + \left\|A^{-1}p\right\|_H \le M(\delta,\lambda)\left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_H\right], \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\max_{0\le t\le 1}\|u''(t)\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|\alpha u'(t)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|u'(t)\|_H + \|Au\|_{C(H)} + \|p\|_H \le \\ \le M(\delta,\lambda)\left[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f'(t)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_H + \|g(0)\|_H + \|f(0)\|_H\right],\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $M(\delta,\lambda)$ *не зависит от* φ, ψ, $f(t)$ *и* $g(t)$.

Доказательство. Решение задачи (1.1) имеет вид

$$u(t) = v(t) + A^{-1}p, \quad -1 \le t \le 1, \tag{2.3}$$

где $v(t)$ является решением следующей нелокальной краевой задачи:

$$\begin{gathered}v''(t) + \alpha v'(t) + Av(t) = f(t), \quad 0 < t < 1,\\ v'(t) + Av(t) = g(t), \quad -1 < t < 0,\\ v(\lambda) - v(-1) = \psi - \varphi,\\ v(0+) = v(0-), \quad v'(0+) = v'(0-),\end{gathered} \tag{2.4}$$

для дифференциального уравнения с самосопряженным положительно-определенным оператором A в гильбертовом пространстве H. Сначала получим решение нелокальной краевой задачи (2.4). Известно, что при гладких начальных данных следующие краевые задачи:

$$\begin{gathered}v'(t) + Av(t) = g(t), \quad -1 < t < 0,\\ v(-1) = v_{-1},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}v''(t) + \alpha v'(t) + Av(t) = f(t), \quad 0 < t < 1,\\ v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_0',\end{gathered}$$

имеют единственные решения (см. [38], [40])

$$v(t) = e^{-(1+t)A}v_{-1} + \int_{-1}^{t} e^{-(t-\tau)A}g(\tau)d\tau, \quad -1 \le t \le 0, \tag{2.5}$$

$$v(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(c(t) + \frac{\alpha}{2}s(t)\right)v_0 + e^{-\frac{\alpha}{2}t}s(t)v_0' + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau)}s(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le 1, \tag{2.6}$$

соответственно. Используя (2.5), мы получаем $v(0)$ и $v'(0)$. Тогда подставив эти результаты в (2.6), имеем

$$\begin{gathered}v(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(c(t) + \frac{\alpha}{2}s(t)\right)\left(e^{-A}v_{-1} + -1\int_{-1}^{0} e^{\tau A}g(\tau)d\tau\right) + e^{-\frac{\alpha}{2}t}s(t)\left(-Ae^{-A}v_{-1} + g(0) - A\int_{-1}^{0} e^{\tau A}g(\tau)d\tau\right) + \\ + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau)}s(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le 1.\end{gathered} \tag{2.7}$$

В случае $-1 < \lambda \le 0$, используя (2.5) и условие $v(\lambda) - v(-1) = \psi - \varphi$, получаем

$$v(-1) = e^{-(1+\lambda)A}v_{-1} + \int_{-1}^{\lambda} e^{-(\lambda-\tau)A}g(\tau)d\tau + \varphi - \psi.$$

Из леммы 2 следует существование оператора $(I - e^{-(1+\lambda)A})^{-1}$ и, следовательно, имеет место равенство

$$v_{-1} = (I - e^{-(1+\lambda)A})^{-1}\left(\int_{-1}^{\lambda} e^{-(\lambda-\tau)A}g(\tau)d\tau + \varphi - \psi\right), \quad -1 < \lambda \le 0. \tag{2.8}$$

В случае $0 < \lambda \le 1$, используя (2.7) и условие $v(\lambda) - v(-1) = \psi - \varphi$, имеем

$$v(-1) = e^{-\frac{\alpha\lambda}{2}}\left(c(\lambda) + \frac{\alpha}{2}s(\lambda)\right)\left(e^{-A}v_{-1} + \int_{-1}^{0} e^{\tau A}g(\tau)d\tau\right) +$$
$$+ e^{-\frac{\alpha\lambda}{2}}s(\lambda)\left(-Ae^{-A}v_{-1} + g(0) - A\int_{-1}^{0} e^{\tau A}g(\tau)d\tau\right) + \int_{0}^{\lambda} e^{-\frac{\alpha}{2}(\lambda-\tau)}s(\lambda-\tau)f(\tau)d\tau + \varphi - \psi.$$

Из леммы 3 следует существование оператора $\left(I - e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}e^{-A}\left[c(\lambda) + \left(\frac{\alpha}{2} - A\right)s(\lambda)\right]\right)^{-1}$ и поэтому имеет место следующее равенство:

$$\begin{gathered} v_{-1} = \left(I - e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}e^{-A}\left[c(\lambda) + \left(\frac{\alpha}{2} - A\right)s(\lambda)\right]\right)^{-1}\left\{\int_{0}^{\lambda} e^{-\frac{\alpha}{2}(\lambda-\tau)}s(\lambda-\tau)f(\tau)d\tau + \varphi - \psi + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}\left(s(\lambda)g(0) + \left[c(\lambda) + \left(\frac{\alpha}{2} - A\right)s(\lambda)\right]\int_{-1}^{0} e^{\tau A}g(\tau)d\tau\right)\right\}, \quad 0 < \lambda \le 1. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Таким образом, для решения нелокальной краевой задачи (2.4) имеем равенства (2.5) и (2.7), где v_{-1} определена формулой (2.8), когда $-1 < \lambda \le 0$, и формулой (2.9), когда $0 < \lambda \le 1$. Тогда, используя (2.3) и равенство

$$p = A\psi - Av(\lambda), \tag{2.10}$$

получаем решение задачи (1.1).

Теперь докажем неравенство (2.1). Если $-1 < \lambda \le 0$, используя формулу (2.8) и оценки (1.4), (1.5), получаем

$$\|v_{-1}\|_H \le M_1(\delta,\lambda)\left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_H\right]. \tag{2.11}$$

При $0 < \lambda \le 1$, используя равенство (2.9) и оценки (1.2), (1.4), (1.7), имеем

$$\|v_{-1}\|_H \le M_2(\delta)\left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_H\right]. \tag{2.12}$$

Используя формулу (2.5) и оценки (1.4), получаем следующее неравенство:

$$\|v(t)\|_H \le \|v_{-1}\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_H, \quad -1 \le t \le 0. \tag{2.13}$$

Наконец, используя формулу (2.7) и оценки (1.2), (1.4), имеем

$$\|v(t)\|_H \le 2\|v_{-1}\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_H + 5\max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_H, \quad 0 \le t \le 1. \tag{2.14}$$

Объединяя оценки (2.11)–(2.14), получаем следующую оценку устойчивости:

$$\|v\|_{C(H)} \le M_3(\delta,\lambda)\left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_H\right].$$

Этот результат позволяет получить оценку (2.1), используя неравенство треугольника и формулы (2.3), (2.10).

Теперь перейдем к получению оценки (2.2). При $-1 < \lambda \le 0$, интегрирование по частям в равенстве (2.8) дает формулу

$$Av_{-1} = (I - e^{-(1+\lambda)A})^{-1}\left[g(\lambda) - e^{-(1+\lambda)A}g(-1) - \int_{-1}^{\lambda} e^{-(\lambda-\tau)A}g'(\tau)d\tau + A\varphi - A\psi\right].$$

Используя эту формулу и оценки (1.4), (1.5), получаем

$$\|Av_{-1}\|_H \le M_4(\delta,\lambda)\left[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_H + \|g(0)\|_H\right]. \tag{2.15}$$

Если $0 < \lambda \le 1$, то интегрирование по частям в равенстве (2.9) позволяет нам получить

$$Av_{-1} = \left(I - e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}e^{-A}\left[c(\lambda) + \left(\frac{\alpha}{2} - A\right)s(\lambda)\right]\right)^{-1} \times$$

$$\times\left\{AG^{-1}\left(f(\lambda) - e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}c(\lambda)f(0) - \int_0^{\lambda} e^{-\frac{\alpha}{2}(\lambda-\tau)}c(\lambda-\tau)\left[\frac{\alpha}{2}f(\tau) + f'(\tau)\right]d\tau\right) + A\varphi - A\psi +\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\alpha}{2}\lambda}\left[\left(c(\lambda) + \frac{\alpha}{2}s(\lambda)\right)g(0) - \left(c(\lambda) + \left(\frac{\alpha}{2} - A\right)s(\lambda)\right)\left(e^{-A}g(-1) + \int_{-1}^{0} e^{\tau A}g'(\tau)d\tau\right)\right]\right\}.$$

Используя эту формулу и оценки (1.2)–(1.4), (1.7), имеем

$$\|Av_{-1}\|_H \le M_5(\delta)\left[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f'(t)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\| + \|g(0)\|_H + \|f(0)\|_H\right]. \tag{2.16}$$

Используя интегрирование по частям в равенстве (2.5), получаем

$$Av(t) = e^{-(t+1)A}Av_{-1} + g(t) - e^{-(t+1)A}g(-1) - \int_{-1}^{t} e^{-(t-\tau)A}g'(\tau)d\tau, \quad -1 \le t \le 0.$$

Этот результат и оценки (1.4) дают следующее неравенство:

$$\|Av(t)\|_H \le \|Av_{-1}\|_H + 3\max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_H + 2\|g(0)\|_H, \quad -1 \le t \le 0. \tag{2.17}$$

Аналогичным образом интегрирование по частям в равенстве (2.7) дает равенство

$$\begin{aligned} v(t) = {} & e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(c(t) + \frac{\alpha}{2}s(t)\right)A^{-1}\left[Ae^{-A}v_{-1} + g(0) - e^{-A}g(-1) - \int_{-1}^{0} e^{\tau A}g'(\tau)d\tau\right] + \\ & + e^{-\frac{\alpha}{2}t}s(t)\left[-Ae^{-A}v_{-1} + e^{-A}g(-1) + \int_{-1}^{0} e^{\tau A}g'(\tau)d\tau\right] + \\ & + G^{-1}\left[f(t) - e^{-\frac{\alpha}{2}t}c(t)f(0) - \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau)}c(t-\tau)\left(\frac{\alpha}{2}f(\tau) + f'(\tau)\right)d\tau\right], \quad 0 \le t \le 1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Используя эту формулу и оценки (1.2)–(1.4), получаем

$$\|Av(t)\|_H \le M_6(\delta)\left[\|Av_{-1}\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f'(t)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_H + \|g(0)\|_H + \|f(0)\|_H\right], \quad 0 \le t \le 1. \tag{2.19}$$

Принимая во внимание неравенства (2.15)–(2.17) и (2.19), получаем

$$\|Av\|_{C(H)} \le M_7(\delta,\lambda)\left[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f'(t)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_H + \|g(0)\|_H + \|f(0)\|_H\right]. \tag{2.20}$$

Дифференцируя равенство (2.18), имеем

$$v'(t) = -e^{-\frac{\alpha}{2}t}s(t)\left[Ae^{-A}v_{-1} + g(0) - e^{-A}g(-1) - \int_{-1}^{0} e^{\tau A}g'(\tau)d\tau\right] + e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(c(t) - \frac{\alpha}{2}s(t)\right)\times$$

$$\times\left[-Ae^{-A}v_{-1}+e^{-A}g(-1)+\int_{-1}^{0}e^{\tau A}g'(\tau)d\tau\right]+e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(s(t)+\frac{\alpha}{2}G^{-1}c(t)\right)f(0)-\frac{\alpha}{2}G^{-1}f(t)+$$

$$+\int_{0}^{t}e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau)}\left(s(t-\tau)+\frac{\alpha}{2}G^{-1}c(t-\tau)\right)\left(\frac{\alpha}{2}f(\tau)+f'(\tau)\right)d\tau,\quad 0\le t\le 1.$$

Используя эту формулу и оценки (1.2)–(1.4), (2.15), (2.16), получаем

$$\max_{0\le t\le 1}\|\alpha v'(t)\|_H\le M_8(\delta,\lambda)\left[\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H+\max_{0\le t\le 1}\|f'(t)\|_H+\max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_H+\|g(0)\|_H+\|f(0)\|_H\right].\tag{2.21}$$

Наконец, используя оценки (2.20) и (2.21), формулы (2.3) и (2.10) и неравенство треугольника в (1.1), завершим доказательство оценки (2.2). Теорема 1 доказана.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Обсудим несколько приложений основного результата. Рассмотрим четыре задачи идентификации для телеграфных-параболических уравнений с неизвестным источником, зависящим от пространственных переменных. Результат теоремы 1 позволяет получить оценки устойчивости для решений этих задач.

Во-первых, рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу для телеграфного-параболического уравнения:

$$\begin{gathered}
u_{tt}+\alpha u_t-(a(x)u_x)_x+\delta u=p(x)+f(t,x),\quad 0<t<1,\quad 0<x<1,\\
u_t-(a(x)u_x)_x+\delta u=p(x)+g(t,x),\quad -1<t<0,\quad 0<x<1,\\
u(-1,x)=\varphi(x),\quad u(\lambda,x)=\psi(x),\quad 0\le x\le 1,\quad -1<\lambda\le 1,\\
u(t,0)=u(t,1),\quad u_x(t,0)=u_x(t,1),\quad -1\le t\le 1,\\
u(0+,x)=u(0-,x),\quad u_t(0+,x)=u_t(0-,x),\quad 0\le x\le 1.
\end{gathered}\tag{3.1}$$

При соответствующих условиях согласования задача (3.1) имеет единственное гладкое решение $(u(t,x),p(x))$ для заданных гладких функций $a(x)\ge a>0$, $x\in(0,1)$, $a(1)=a(0)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $x\in[0,1]$, $f(t,x)$, $t\in[0,1]$, $x\in[0,1]$, $g(t,x)$, $t\in[-1,0]$, $x\in[0,1]$ и положительных постоянных δ, α. Это позволяет привести нелокальную краевую задачу (3.1) к абстрактой краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H=L_2[0,1]$ с самосопряженным положительно-определенным оператором A^x, определенным по формуле

$$A^xu(x)=-(a(x)u_x)_x+\delta u(x)\tag{3.2}$$

с областью определения

$$D(A^x)=\{u(x)|u(x),u_x(x),(a(x)u_x)_x\in L_2[0,1],u(1)=u(0),\ u_x(1)=u_x(0)\}.$$

Теорема 2. *Для решения задачи* (3.1) *имеют место следующие оценки устойчивости*:

$$\|u\|_{C(L_2[0,1])}+\left\|(A^x)^{-1}p\right\|_{L_2[0,1]}\le M(\delta,\lambda)\left[\|\varphi\|_{L_2[0,1]}+\|\psi\|_{L_2[0,1]}+\max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_{L_2[0,1]}+\max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_{L_2[0,1]}\right],$$

$$\max_{0\le t\le 1}\|u_{tt}\|_{L_2[0,1]}+\max_{0\le t\le 1}\|\alpha u_t\|_{L_2[0,1]}+\max_{-1\le t\le 0}\|u_t\|_{L_2[0,1]}+\|u\|_{C(W_2^2[0,1])}+\|p\|_{L_2[0,1]}\le$$
$$\le M(\delta,\lambda)\left[\|\varphi\|_{W_2^2[0,1]}+\|\psi\|_{W_2^2[0,1]}+\max_{0\le t\le 1}\|f'(t)\|_{L_2[0,1]}+\max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_{L_2[0,1]}+\|g(0)\|_{L_2[0,1]}+\|f(0)\|_{L_2[0,1]}\right],$$

где $M(\delta,\lambda)$ не зависит от $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(t,x)$ и $g(t,x)$.

Здесь $W_2^2[0,1]$ обозначает пространство Соболева, состоящее из всех функций f, определенных на отрезке $[0,1]$, так что f и f'' из $L_2[0,1]$, с нормой

$$\|f\|_{W_2^2[0,1]}=\left(\int_0^1\left[(f(x))^2+(f''(x))^2\right]dx\right)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 2 основывается на теореме 1 и свойствах пространственного оператора A^x, определенного по формуле (3.2).

Во-вторых, рассмотрим следующую краевую задачу для одномерного линейного дифференциального уравнения гиперболически-параболического типа с инволюцией:

$$
\begin{gathered}
u_{tt}(t,x) + \alpha u_t(t,x) - (a(x)u_x(t,x))_x - \beta(a(-x)u_x(t,-x))_x + \delta u(t,x) = \\
= p(x) + f(t,x), \quad 0 < t < 1, \quad -l < x < l, \\
u_t(t,x) - (a(x)u_x(t,x))_x - \beta(a(-x)u_x(t,-x))_x + \delta u(t,x) = \\
= p(x) + g(t,x), \quad -1 < t < 0, \quad -l < x < l, \\
u(-1,x) = \varphi(x), \quad u(\lambda,x) = \psi(x), \quad -l \le x \le l, \quad -1 < \lambda \le 1, \\
u(t,-l) = u(t,l) = 0, \quad -1 \le t \le 1, \\
u(0+,x) = u(0-,x), \quad u_t(0+,x) = u_t(0-,x), \quad -l \le x \le l.
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Предположим, что $0 < \underline{a} \le a(-x) = a(x) \le \overline{a}$, $x \in (-l,l)$ и $\underline{a} - \overline{a}|\beta| \ge 0$. При соответствующих условиях согласования задача (3.3) имеет единственное гладкое решение $(u(t,x), p(x))$ для заданных гладких функций $a(x)$, $x \in (-l,l)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $x \in [-l,l]$, $f(t,x)$, $t \in [0,1]$, $x \in [-l,l]$, $g(t,x)$, $t \in [-1,0]$, $x \in [-l,l]$ и постоянных $\delta \ge 0$, $\alpha > 0$. Это позволяет привести краевую задачу (3.3) к абстрактной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2[-l,l]$ с самосопряженным положительно-определенным оператором A^x, определенным по формуле

$$
A^x u(x) = -(a(x)u_x(x))_x - \beta(a(-x)u_x(-x))_x + \delta u(x) \tag{3.4}
$$

с областью определения

$$
D(A^x) = \{u \in W_2^2[-l,l] | u(-l) = u(l) = 0\}.
$$

Теорема 3. *Для решения задачи* (3.3) *имеют место следующие оценки устойчивости*:

$$
\|u\|_{C(L_2[-l,l])} + \left\|(A^x)^{-1}p\right\|_{L_2[-l,l]} \le M(\delta,\lambda)\left[\|\varphi\|_{L_2[-l,l]} + \|\psi\|_{L_2[-l,l]} + \max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_{L_2[-l,l]} + \max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_{L_2[-l,l]}\right],
$$

$$
\begin{gathered}
\max_{0\le t\le 1}\|u_{tt}\|_{L_2[-l,l]} + \max_{0\le t\le 1}\|\alpha u_t\|_{L_2[-l,l]} + \max_{-1\le t\le 0}\|u_t\|_{L_2[-l,l]} + \|u\|_{C(W_2^2[-l,l])} + \|p\|_{L_2[-l,l]} \le \\
\le M(\delta,\lambda)\left[\|\varphi\|_{W_2^2[-l,l]} + \|\psi\|_{W_2^2[-l,l]} + \max_{0\le t\le 1}\|f'(t)\|_{L_2[-l,l]} + \max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_{L_2[-l,l]} + \|g(0)\|_{L_2[-l,l]} + \|f(0)\|_{L_2[-l,l]}\right],
\end{gathered}
$$

где $M(\delta,\lambda)$ *не зависит от* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(t,x)$ *и* $g(t,x)$.

Здесь $W_2^2[-l,l]$ обозначает пространство Соболева, состоящее из всех функций f, определенных на отрезке $[-l,l]$ так, что f и f'' из $L_2[-l,l]$, с нормой

$$
\|f\|_{W_2^2[-l,l]} = \left(\int_{-l}^{l}[(f(x))^2 + (f''(x))^2]dx\right)^{1/2}.
$$

Доказательство теоремы 3 основывается на теореме 1 и свойствах пространственного оператора A^x, определенного по формуле (3.4).

В-третьих, пусть

$$
\Omega = \{x = (x_1,\dots,x_n) | 0 < x_k < 1,\ k = 1,\dots,n\} \subset \mathbb{R}^n
$$

есть ограниченная открытая область с границей S. Пусть $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. В области $[-1, 1] \times \Omega$ рассмотрим следующую краевую задачу для многомерного телеграфного-параболического уравнения:

$$\begin{gathered}
u_{tt} + \alpha u_t - \sum_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} + \delta u = p(x) + f(t, x), \quad 0 < t < 1, \quad x \in \Omega, \\
u_t - \sum_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} + \delta u = p(x) + g(t, x), \quad -1 < t < 0, \quad x \in \Omega, \\
u(-1, x) = \varphi(x), \quad u(\lambda, x) = \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad -1 < \lambda \le 1, \\
u(t, x) = 0, \quad x \in S, \quad -1 \le t \le 1, \\
u(0+, x) = u(0-, x), \quad u_t(0+, x) = u_t(0-, x), \quad x \in \bar{\Omega},
\end{gathered} \tag{3.5}$$

с граничным условием Дирихле. Обозначим через $L_2(\bar{\Omega})$ гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций f на $\bar{\Omega}$ с нормой

$$\|f\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \left(\int_{x \in \bar{\Omega}} \cdots \int (f(x))^2 dx_1 \cdots dx_n \right)^{1/2}.$$

При соответствующих условиях согласования задача (3.5) имеет единственное гладкое решение $(u(t, x), p(x))$ для заданных гладких функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $a_r(x) \ge a > 0$, $f(t, x)$, $g(t, x)$ и постоянных $\delta \ge 0$, $\alpha > 0$. Это позволяет привести задачу (3.5) к абстрактной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2(\bar{\Omega})$ с самосопряженным положительно-определенным оператором A^x, определенным по формуле

$$A^x u(x) = -\sum_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} + \delta u(x) \tag{3.6}$$

с областью определения

$$D(A^x) = \{u(x) | u(x), u_{x_r}(x), (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} \in L_2(\bar{\Omega}), 1 \le r \le n, u(x) = 0, x \in S\}.$$

Теорема 4. *Для решения задачи* (3.5) *имеют место следующие оценки устойчивости*:

$$\|u\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} + \left\|(A^x)^{-1} p\right\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le M(\delta, \lambda) \left[\|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \le t \le 1} \|f(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{-1 \le t \le 0} \|g(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right],$$

$$\begin{gathered}
\max_{0 \le t \le 1} \|u_{tt}\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \le t \le 1} \|\alpha u_t\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{-1 \le t \le 0} \|u_t\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|u\|_{C(W_2^2(\bar{\Omega}))} + \|p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le \\
\le M(\delta, \lambda) \left[\|\varphi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \le t \le 1} \|f'(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{-1 \le t \le 0} \|g'(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|g(0)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f(0)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right],
\end{gathered}$$

где $M(\delta, \lambda)$ не зависит от $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(t, x)$ и $g(t, x)$.

Здесь и далее $W_2^2(\bar{\Omega})$ будет обозначать пространство Соболева, состоящее из всех функций f, определенных на $\bar{\Omega}$, так что f и все производные второго порядка $f_{x_r x_r}$, $r = 1, \ldots, n$, интегрируемы в $L_2(\bar{\Omega})$, с нормой

$$\|f\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} = \left(\int_{x \in \bar{\Omega}} \cdots \int \left[(f(x))^2 + \sum_{r=1}^{n} (f_{x_r x_r})^2 \right] dx_1 \cdots dx_n \right)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 4 основывается на теореме 1, свойствах пространственного оператора A^x, определенного по формуле (3.6) и следующей теореме о неравенстве коэрцитивности для решения эллиптической задачи в $L_2(\bar{\Omega})$.

Теорема 5. *Для решения эллиптической задачи* (*см.* [41])

$$\begin{gathered}
A^x u(x) = \omega(x), \quad x \in \Omega, \\
u(x) = 0, \quad x \in S,
\end{gathered}$$

выполняется следующее неравенство коэрцитивности:

$$\sum_{r=1}^{n} \|u_{x_r x_r}\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le M_1 \|\omega\|_{L_2(\bar{\Omega})},$$

где M_1 *не зависит от* $\omega(x)$.

В-четвертых, в области $[-1, 1] \times \Omega$ рассмотрим следующую краевую задачу для многомерного телеграфного-параболического уравнения:

$$\begin{gathered} u_{tt} + \alpha u_t - \sum_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} + \delta u = p(x) + f(t,x), \quad 0 < t < 1, \quad x \in \Omega, \\ u_t - \sum_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} + \delta u = p(x) + g(t,x), \quad -1 < t < 0, \quad x \in \Omega, \\ u(-1,x) = \varphi(x), \quad u(\lambda, x) = \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad -1 < \lambda \le 1, \\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial \vec{m}} = 0, \quad x \in S, \quad -1 \le t \le 1, \\ u(0+,x) = u(0-,x), \quad u_t(0+,x) = u_t(0-,x), \quad x \in \bar{\Omega}, \end{gathered} \tag{3.7}$$

с граничным условием Неймана. Здесь $\vec{m}$ обозначает вектор нормали к S. При соответствующих условиях согласования задача (3.7) имеет единственное гладкое решение $(u(t,x), p(x))$ для заданных гладких функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $a_r(x) \ge a > 0$, $f(t,x)$, $g(t,x)$ и постоянных $\delta > 0$, $\alpha > 0$. Это позволяет привести задачу (3.7) к абстрактной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2(\bar{\Omega})$ с самосопряженным положительно-определенным оператором A^x, определенным по формуле (3.6) с областью определения:

$$D(A^x) = \left\{ u(x) | u(x), u_{x_r}(x), (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} \in L_2(\bar{\Omega}), 1 \le r \le n, \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{m}} = 0, x \in S \right\}.$$

Теорема 6. *Для решения задачи* (3.7) *имеют место следующие оценки устойчивости*:

$$\|u\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} + \left\|(A^x)^{-1} p\right\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le M(\delta, \lambda) \left[\|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \le t \le 1} \|f(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{-1 \le t \le 0} \|g(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right],$$

$$\begin{gathered} \max_{0 \le t \le 1} \|u_{tt}\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \le t \le 1} \|\alpha u_t\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{-1 \le t \le 0} \|u_t\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|u\|_{C(W_2^2(\bar{\Omega}))} + \|p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le \\ \le M(\delta, \lambda) \left[\|\varphi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \le t \le 1} \|f'(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{-1 \le t \le 0} \|g'(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|g(0)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f(0)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right], \end{gathered}$$

где $M(\delta, \lambda)$ *не зависит от* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(t,x)$ *и* $g(t,x)$.

Доказательство теоремы 6 основывается на теореме 1, свойствах пространственного оператора A^x, определенного по формуле (3.6), и следующей теореме о неравенстве коэрцитивности для решения эллиптической задачи в $L_2(\bar{\Omega})$.

Теорема 7. *Для решения эллиптической задачи* (*см.* [41])

$$\begin{gathered} A^x u(x) = \omega(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{m}} = 0, \quad x \in S, \end{gathered}$$

выполняется следующее неравенство коэрцитивности:

$$\sum_{r=1}^{n} \|u_{x_r x_r}\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le M_1(\delta) \|\omega\|_{L_2(\bar{\Omega})},$$

где $M_1(\delta)$ *не зависит от* $\omega(x)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе установлена корректность краевой задачи (1.1). В приложениях были получены оценки устойчивости для решений четырех задач идентификации для телеграфных-параболических уравнений с неизвестным источником, зависящим от пространственных переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rassias J.M.* Lecture notes on mixed type partial differential equations. World Scientific, 1990.
2. *Bitsadze A.V.* Equations of mixed type. Pergamon Press, 1964.
3. *Smirnov M.M.* Equations of mixed type. American Mathematical Society, 1978.
4. *Ashyralyev A., Yurtsever A.* On a nonlocal boundary value problem for semilinear hyperbolic-parabolic equations // Nonlinear Anal. 2001. V. 47. № 5. P. 3585–3592.
5. *Ashyralyev A., Ozdemir Y.* On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations // Taiwanese J. Math. 2007. V. 11. № 4. P. 1075–1089.
6. *Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T., Akhtaeva N.S.* On the Volterra property of a boundary problem with integral gluing condition for a mixed parabolic-hyperbolic equation // Bound. Value Probl. 2013. V. 2013. № 94.
7. *Ashyralyev A., Ozdemir Y.* Stability of difference schemes for hyperbolic-parabolic equations // Comput. Math. Appl. 2005. V. 50. № 8. P. 1443–1476.
8. *Ivanauskas F.F., Novitski Y.A., Sapagovas M.P.* On the stability of an explicit difference scheme for hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions // Differ. Equ. 2013. V. 49. № 7. P. 849–856.
9. *Dehghan M.* Determination of a control parameter in the two-dimensional diffusion equation // Appl. Numer. Math. 2001. V. 37. № 4. P. 489–502.
10. *Kimura T., Suzuki T.* A parabolic inverse problem arising in a mathematical model for chromatography // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. № 6. P. 1747–1761.
11. *Gryazin Y.A., Klibanov M.V., Lucas T.R.* Imaging the diffusion coefficient in a parabolic inverse problem in optical tomography // Inverse Problems. 1999. V. 15. № 2. P. 373–397.
12. *Эйдельман Ю.С.* Краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Дифференц. ур-ния. 1978. Т. 14. № 7. С. 1335–1337.
13. *Ashyralyev A., Emharab F.* Source identification problems for hyperbolic differential and difference equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 27. № 3. P. 301–315.
14. *Sadybekov M.A.* Stable difference scheme for a nonlocal boundary value heat conduction problem // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. 2018. V. 2018. № 1. P. 1–10.
15. *Orlovsky D., Piskarev S.* On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2009. V. 17. № 8. P. 765–782.
16. *Ashyralyev A., Ashyralyyev C.* On the problem of determining the parameter of an elliptic equation in a Banach space // Nonlinear Anal. Model. Control. 2014. V. 19. № 3. P. 350–366.
17. *Ashyralyyev C.* High order of accuracy difference schemes for the inverse elliptic problem with Dirichlet condition // Bound. Value Probl. 2014. V. 2014. № 5.
18. *Ashyralyev A.* On a problem of determining the parameter of a parabolic equation // Ukrainian Math. J. 2010. V. 62. № 9. P. 1200–1210.
19. *Shakhmurov V.B., Sahmurova A.* Abstract parabolic problems with parameter and application // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219. № 17. P. 9561–9571.
20. *Safari A.R., Mekhtiyev M.F., Sharifov Y.A.* Maximum principle in the optimal control problems for systems with integral boundary conditions and its extension // Abstr. Appl. Anal. 2013. V. 2013. 946910.
21. *Emharab F.* Source identification problems for hyperbolic differential and difference equations. PhD thesis. Near East University, 2019.
22. *Ashyralyev A., Agirseven D.* On source identification problem for a delay parabolic equation // Nonlinear Anal. Model. Control. 2014. V. 19. № 3. P. 335–349.
23. *Ozbilge E., Demir A.* Semigroup approach for identification of the unknown diffusion coefficient in a linear parabolic equation with mixed output data // Bound. Value Probl. 2013. V. 2013. № 43.
24. *Ashyralyev A., Erdogan A.S., Demirdag O.* On the determination of the right-hand side in a parabolic equation // Appl. Numer. Math. 2012. V. 62. № 11. P. 1672–1683.
25. *Ashyralyyev C.* Well-posedness of boundary value problems for reverse parabolic equation with integral condition // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. 2018. V. 2018. № 1. P. 11–21.
26. *Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I.* Identification of biological models described by systems of nonlinear differential equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23. № 5. P. 519–527.
27. *Ashyralyev A., Erdogan A.S.* Well-posedness of the right-hand side identification problem for a parabolic equation // Ukrainian Math. J. 2014. V. 66. № 2. P. 165–177.

28. *Sazaklioglu A.U., Erdogan A.S., Ashyralyev A.* Existence and uniqueness results for an inverse problem for a semilinear equation with final overdetermination // Filomat. 2018. V. 32. № 3. P. 847–858.
29. *Erdogan A.S.* A note on the right-hand side identification problem arising in biofluid mechanics // Abstr. Appl. Anal. 2012. V. 2012. 548508.
30. *Ivanchov N.I.* On the determination of unknown source in the heat equation with nonlocal boundary conditions // Ukrainian Math. J. 1995. V. 47. № 10. P. 1647–1652.
31. *Wu B., Wu S.* Existence and uniqueness of an inverse source problem for a fractional integrodifferential equation // Comput. Math. Appl. 2014. V. 68. № 10. P. 1123–1136.
32. *Blasio G.D., Lorenzi A.* Identification problems for parabolic delay differential equations with measurement on the boundary // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2007. V. 15. № 7. P. 709–734.
33. *Ashyralyev A., Ashyralyyeva M.A.* On source identification problem for a hyperbolic-parabolic equation // Contemp. Anal. Appl. Math. 2015. V. 3. № 1. P. 88–103.
34. *Ashyralyyeva M.A., Ashyralyyev A.* Stable difference scheme for the solution of the source identification problem for hyperbolic-parabolic equations // AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1676. 020024.
35. *Ashyralyyeva M.A., Ashyraliyev M.* On a second order of accuracy stable difference scheme for the solution of a source identification problem for hyperbolic-parabolic equations // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1759. 020023.
36. *Ashyralyyeva M.A., Ashyraliyev M.* Numerical solutions of source identification problem for hyperbolic-parabolic equations // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1997. 020048.
37. *Ashyralyyeva M.A., Ashyraliyev M.* On the numerical solution of identification hyperbolic-parabolic problems with the Neumann boundary condition // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. 2018. V. 3. P. 69–74.
38. *Fattorini H.O.* Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces. Notas de Matematica, North-Holland, 1985.
39. *Piskarev S., Shaw S.Y.* On certain operator families related to cosine operator function // Taiwanese J. Math. 1997. V. 1. № 4. P. 3585–3592.
40. *Ashyralyev A., Sobolevskii P.E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag, 2004.
41. *Соболевский П.Е.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1975.