ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 8, с. 1291–1303

УДК 517.9

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ТИПА. БИФУРКАЦИЯ[1)]

© 2020 г. Л. А. Бекларян[1,*], А. Л. Бекларян[2,]**

[1] 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, Центральный экономико-математический институт РАН, Россия

[2] 119049 Москва, ул. Шаболовка, 26-28, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Россия

**e-mail: beklar@cemi.rssi.ru*

***e-mail: abeklaryan@hse.ru*

Поступила в редакцию 15.02.2020 г.
Переработанный вариант 15.02.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Важность функционально-дифференциальных уравнений точечного типа определяется тем, что по решениям таких уравнений строятся решения типа бегущей волны для индуцированных бесконечномерных обыкновенных дифференциальных уравнений и наоборот. Для таких уравнений имеет место явление ветвления решения. Для линейного однородного функционально-дифференциального уравнения точечного типа получена теорема о бифуркации типа ветвления решения. Библ. 15. Фиг. 6.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, начально-краевая задача, бифуркация.

DOI: 10.31857/S0044466920080049

1. ВВЕДЕНИЕ

Для уравнений математической физики, являющихся уравнением Эйлера–Лагранжа соответствующих вариационных задач, важный класс решений – это солитонные решения [1], [2]. В ряде моделей такие решения хорошо приближаются солитонными решениями для конечно-разностных аналогов исходных уравнений, которые взамен непрерывной среды описывают взаимодействие сгустков среды, помещенных в вершинах решетки [2], [3]. Возникающие системы относятся к классу бесконечномерных динамических систем. К наиболее широко рассматриваемым классам подобных задач относятся бесконечномерные системы с потенциалами Френкеля–Конторовой (периодические и медленно растущие потенциалы) и Ферми–Паста–Улама (потенциалы экспоненциального роста), широкий обзор которых приведен в работе [4].

Изучение солитонных решений (решений типа бегущей волны) основано на *существовании взаимно однозначного соответствия* солитонных решений для бесконечномерных динамических систем с решениями индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа [5]–[8]. Отмеченная связь между солитонными решениями бесконечномерной динамической системы и решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения является фрагментом более общей схемы, выходящей за рамки данной работы [9]. Важно, что исследование солитонных решений бесконечномерной динамической системы эквивалентно исследованию решений индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа. Теорема существования и единственности решения (теорема существования) для индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа гарантирует существование и единственность (существование) солитонного решения с заданными начальными значениями. Сами решения функционально-дифференциальных уравнений точечного типа с квазилинейной правой частью изучаются в рамках формализма, основанного на групповых особенностях таких уравнений и развиваемого в работах одного из авторов [10], [5], [6], [11], и представлены в монографии [8]. Для линейных систем получены критерии существования решения в форме аналога теоремы Нетер, а также точечной полноты решений [12]. Получены легко проверяемые достаточные условия существования решения [13].

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00147).

В представленной работе для линейного однородного функционально-дифференциального уравнения точечного типа получена теорема о бифуркации типа ветвления решения.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Функционально-дифференциальным уравнением точечного типа называется уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t), \ldots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R, \tag{1}$$

где $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса $C^{(0)}$; $q_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, s$ – диффеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию; B_R – замкнутый интервал $[t_0, t_1]$, замкнутая числовая полупрямая $[t_0, +\infty[$, или числовая прямая R. Используя замену времени, для функций отклонения аргумента $[q_j(t) - t]$, $j = 1, \ldots, s$, всегда можно добиться выполнения условия

$$h_j = \sup_{t \in \mathbb{R}} |q_j(t) - t| < +\infty, \quad j = 1, \ldots, s,$$

но при этом рост правой части уравнения по переменной времени при такой замене может стать очень большим и, в частности, выше экспоненциального.

Основная цель при изучении функционально-дифференциальных уравнений точечного типа – это исследование начально-краевой задачи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t), \ldots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R, \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_R, \quad \varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

которую будем называть *основной начально-краевой задачей*. В ситуации общего положения, когда $\bar{t} \neq t_0, t_1$ или отклонения аргумента произвольны, мы имеем задачу с *нелокальными начально-краевыми условиями*. Для такой задачи следует изучать все пространство решений, ее размерность, возможные вырождения, а также точечную полноту (когда через каждую точку фазовой плоскости $\mathbb{R}^n$ проходит решение краевой задачи (2), (3)). Сложность таких уравнений связана с тем, что движение вдоль решений в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ не обладает полугрупповым свойством, что является важнейшим свойством в теории динамических систем.

Регуляризация Красовского. Идея преодоления этого недостатка восходит к Красовскому [14]. Для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа ($q_j(t) \leq t$, $j = 1, \ldots, s$) по решению $x(\cdot)$ уравнения (1) строится кривая x_t в пространстве $C([-d, 0], \mathbb{R}^n)$, $d = \max_{j \in \{1, \ldots, s\}} h_j$ по правилу: $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-d, 0]$. Правая часть функционально-дифференциального уравнения индуцирует функционал на бесконечномерном пространстве $C([-d, 0], \mathbb{R}^n)$ и определяет обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет решение x_t. Фазовым пространством для такого уравнения выступает бесконечномерное пространство $C([-d, 0], \mathbb{R}^n)$. Движение вдоль решений в таком фазовом пространстве удовлетворяет полугрупповому свойству и к таким системам применимы методы теории динамических систем. Такой подход позволяет рассматривать класс функционально-дифференциальных уравнений, значительно более широкий, чем представленные функционально-дифференциальные уравнения точечного типа. Вместе с тем при таком подходе теряется информация о поведении решений в исходном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а также связь с теорией решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Иной подход, предлагаемый для исследования таких уравнений, основан на формализме, центральным элементом которого являются конструкции, использующие некоторую конечно порожденную группу Q диффеоморфизмов прямой (групповой операцией в такой группе является суперпозиция диффеоморфизмов) со свойством $\langle q_1, \ldots, q_s \rangle \subseteq Q$. Суть подхода в том, что бесконечномерная вектор-функция $\{x(q(t))\}_{q \in Q}$, построенная по решению $x(\cdot)$ уравнения (1), будет решением некоторого индуцированного бесконечномерного обыкновенного дифференциального уравнения с фазовым пространством в виде полного прямого произведения

$$\mathcal{K}^n = \overline{\prod_{q\in Q}}\mathbb{R}^n_q, \quad \mathbb{R}^n_q = \mathbb{R}^n, \quad \varkappa \in \mathcal{K}^n, \quad \varkappa = \{x_q\}_{q\in Q}.$$

Отмеченный групповой подход позволяет рассматривать функционально-дифференциальные уравнения точечного типа как расширение класса обыкновенных дифференциальных уравнений в смысле сохранения: теоремы существования и единственности начально-краевой задачи, а также непрерывной зависимости от начально-краевых условий и правой части уравнения; точечной полноты решений краевой задачи и т.д. Важно, что при таком подходе мы имеем возможность изучать поведение траекторий в исходном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$, выявить препятствия, не позволяющие функционально-дифференциальному уравнению точечного типа наследовать свойства обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.1. Теорема существования и единственности для функционально-дифференциального уравнения точечного типа

Определим банахово пространство функций $x(\cdot)$ с весами

$$\mathcal{L}^n_\mu C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n), \max_{0\le r\le k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\right\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\right\}, \quad \mu \in (0,1),$$

и нормой

$$\|x(\cdot)\|^{(k)}_\mu = \max_{0\le r\le k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\right\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Сформулируем систему ограничений на правую часть функционально-дифференциальных уравнений точечного типа:

(а) $f(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n\times s},\mathbb{R}^n)$ (здесь функцию $f(\cdot)$ по переменной t можно положить кусочно-непрерывной с разрывами I рода в точках дискретного множества);

(б) условие квазилинейного роста: для любых $t, z_j, \overline{z}_j, j = 1,\dots, s$,

$$\|f(t, z_1,\dots, z_s)\|_{\mathbb{R}^n} \le M_0(t) + M_1\sum_{j=1}^{s}\|z_j\|_{\mathbb{R}^n}, \quad M_0(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

и условие Липщица

$$\|f(t, z_1,\dots, z_s) - f(t, \overline{z}_1,\dots, \overline{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \le L_f\sum_{j=1}^{s}\|z_j - \overline{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

(в действительности $M_1 \le L_f$, но константы M_1 и L_f можно взять равными);

(в) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что выражение

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} M_0(t + i)(\mu^*)^{|i|}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет конечное значение и как функция аргумента t непрерывна;

(г) величины

$$h_j = \sup_{t\in\mathbb{R}}|t - q_j(t)|, \quad j = 1,\dots, s,$$

конечны.

Правую часть $f(\cdot)$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа мы будем рассматривать как элемент банахового пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$

$$V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n) = \{f(\cdot) : f(\cdot) \text{ удовлетворяет условиям (а)–(г)}\},$$

$$\|f(\cdot)\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t, 0,\dots, 0)(\mu^*)^{|t|}\right\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{(t,z_1,\dots,z_s,\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_s)\in\mathbb{R}^{1+2ns}}\frac{\|f(t, z_1,\dots, z_s) - f(t, \overline{z}_1,\dots, \overline{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n}}{\sum_{j=1}^{s}\|z_j - \overline{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}},$$

где параметр $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (в). Очевидно, что для функции $f(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ наименьшее значение константы L_f из условия Липшица (условие (б)) совпадает со значением второго слагаемого в определении нормы $f(\cdot)$. В дальнейшем, говоря об условии Липшица, под константой L_f будем понимать именно такое ее наименьшее значение, а также будем пользоваться обозначением $h = (h_1, \ldots, h_s)$.

Теорема 1 (см. [10]). *Если для некоторого* $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0,1)$ *выполняется неравенство*

$$L_f \sum_{j=1}^{s} \mu^{-h_j} < \ln \mu^{-1}, \tag{5}$$

то при любых фиксированных начально-краевых условиях

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

существует решение (*абсолютно непрерывное*)

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$$

основной начально-краевой задачи (2)–(4). *Такое решение является единственным*, *как элемент пространства* $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ *непрерывно зависит от начально-краевых условий* $\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, *и правой части уравнения – функции* $f(\cdot)$.

Условие (5) является точным и неулучшаемым. Можно привести примеры уравнений, для которых при нарушении этого условия отсутствует либо существование решения, либо его единственность. Если неравенство (5) выполняется при каких-то значениях $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0,1)$, то оно будет справедливым на некотором максимальном интервале, которое обозначим через $(\mu_1(L_f; h), \mu_2(L_f; h))$. Из теоремы существования и единственности решения функционально-дифференциального уравнения точечного типа следует, что в условиях теоремы 1 решение существует в более узких пространствах $\mathcal{L}^n_{\mu_2(L_f;h)-\varepsilon} C^{(0)}(\mathbb{R})$ со сколь угодно малыми $\varepsilon > 0$ и единственно в более широких пространствах $\mathcal{L}^n_{\mu_1(L_f;h)+\varepsilon} C^{(0)}(\mathbb{R})$ со сколь угодно малыми $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что в случае обыкновенных дифференциальных уравнений неравенство (5) выполняется. Само неравенство (5) выделяет подкласс функционально-дифференциальных уравнений, для которых сохраняются такие свойства обыкновенных дифференциальных уравнений, как существование и единственность решения начально-краевой задачи, точечная полнота решений краевой задачи, а также непрерывная зависимость решений от начально-краевых условий и правой части уравнения (грубость уравнения). Условие, в виде неравенства (5), определяет *регулярное расширение* класса обыкновенных дифференциальных уравнений в классе функционально-дифференциальных уравнений точечного типа с сохранением вышеперечисленных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. БИФУРКАЦИЯ

Рассмотрим задачу Коши (начальную задачу) для линейной однородной системы функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, определенной на всей прямой

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} A_j x(t + \tau_j), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

где $\tau_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1 \ldots, s$, $\tau_1 < \ldots < \tau_s$. В соответствии с обозначениями для функционально-дифференциального уравнения точечного типа, правая часть уравнения (6) имеет вид

$$f(x(q_1(t), \ldots, x(q_s(t)) = \sum_{j=1}^{s} A_j x(q_j(t)),$$

где $q_j(t) = t + \tau_j,\ j = 1,\dots,s$. Очевидно, что

$$h_{q_j} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |q_j(t) - t| = |\tau_j|, \quad j = 1,\dots,s.$$

Следуя общим обозначениям для такого уравнения, полагаем $h = (|\tau_1|,\dots,|\tau_s|)$.

Для такой системы характеристическое уравнение принимает вид квазиполинома:

$$\left|\lambda E - \sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}\right| = 0. \tag{8}$$

Решения квазиполинома (8) рассматриваются в поле комплексных чисел.

Будем рассматривать комплексификацию n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. комплексное пространство $\mathscr{Z}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$. Линейный оператор A, действующий в действительном пространстве $\mathbb{R}^n$, порождает линейный оператор в комплексифицированном пространстве $\mathscr{Z}^n$, действующий по правилу $Az = A(x + iy) = Ax + iAy$. Введем обозначение

$$\mathbb{A}(\lambda) = \sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Очевидно, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $\mathbb{A}(\lambda) = \mathbb{A}(\lambda + i2\pi k)$. При каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ через $\sigma(\mathbb{A}(\lambda))$ будем обозначать спектр матрицы $\mathbb{A}(\lambda)$. Тогда множество решений характеристического уравнения (8) можно записать в виде

$$\mathscr{R} = \{\lambda : \lambda \in \sigma(\mathbb{A}(\lambda))\}. \tag{10}$$

Для решения исходного линейного функционально-дифференциального уравнения (6) следует описать множество решений $\mathscr{R}$ характеристического квазиполинома (8), а также собственные подпространства, соответствующие каждому из $\lambda \in \mathscr{R}$.

Для заданных $\lambda \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{R}$ определим

$$\varrho(\lambda) = \{\bar\lambda : \bar\lambda = \lambda + i2\pi k,\ \bar\lambda \in \sigma(\mathbb{A}(\lambda)),\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad \rho(r) = \bigcup_{\mathrm{Re}\lambda = r} \varrho(\lambda). \tag{11}$$

Лемма 1. *Для любого $\mathcal{N} > 0$ множество $\bigcup_{|r|\le\mathcal{N}} \rho(r)$ либо конечно, либо пусто.*

Доказательство. Пусть задано $r \in [-\mathcal{N}, \mathcal{N}]$. Для $z \in \mathscr{Z}^n$, $\|z\|_{\mathscr{Z}^n} = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda = r$ рассмотрим равенство

$$\lambda z - \sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j} z = 0. \tag{12}$$

Положим $\lambda = \tilde\lambda + i2\pi l$, где $|\mathrm{Im}\,\tilde\lambda| < 2\pi$. Так как $e^{(\lambda + i2\pi l)\tau_j} = e^{\tilde\lambda\tau_j}$, то последнее равенство примет вид

$$(\tilde\lambda + i2\pi l)z - \sum_{j=1}^{s} A_j e^{\tilde\lambda\tau_j} z = 0. \tag{13}$$

Так как норма действительных частей $\tilde\lambda$ ограничена числом $\mathcal{N}$, такое равенство не может выполняться при больших l. Более того, для всех $\lambda \in \rho(r)$, $r \in [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ величины $|\mathrm{Im}\lambda|$ равномерно ограничены. Так как функция $\left|\lambda E - \sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}\right|$ по переменной λ аналитическая, а точки множества $\bigcup_{|r|\le\mathcal{N}} \rho(r)$ являются нулями такой аналитической функции, то такое множество не более чем конечное.

Пусть $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}(\lambda))$. Тогда множество собственных векторов, соответствующих собственным числам $\bar\lambda \in \varrho(\lambda)$, линейно независимы.

Наряду с характеристическим уравнением (8) рассмотрим другое характеристическое уравнение:

$$\left|\nu E - \exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{h_j}\right)\right| = 0. \tag{14}$$

Лемма 2. *Для всякого собственного значения* λ *характеристического уравнения* (8) *величина* $\nu = e^{\lambda}$ *является собственным значением характеристического уравнения* (14) *и соответственно для любого собственного значения* $\bar{\lambda} \in \varrho(\lambda)$ *также имеет место равенство* $\nu = e^{\bar{\lambda}}$. *Каждый собственный вектор* $z \in \mathcal{L}^n$ *оператора* $\sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}$ *с собственным значением* $\bar{\lambda} \in \varrho(\lambda)$ *является собственным вектором оператора* $\exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right)$ *с собственным значением* $\nu = e^{\lambda}$. *Линейная оболочка собственных подпространств оператора* $\sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}$, *соответствующих собственным значениям* $\bar{\lambda} \in \varrho(\lambda)$, *и только она является собственным подпространством оператора* $\exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right)$ *с собственным значением* $\nu = e^{\lambda}$. *Более того, линейная оболочка подпространств присоединенных векторов оператора* $\sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}$, *соответствующих собственным значениям из множества* $\varrho(\lambda)$, *совпадает с подпространством присоединенных векторов оператора* $\exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right)$, *отвечающих собственному значению* $\nu = e^{\lambda}$.

Доказательство. Пусть λ является собственным значением характеристического уравнения (8). Тогда она является решением характеристического уравнения для матрицы $A(\lambda)$, т.е. решением уравнения

$$\left|\zeta E - \sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}\right| = 0 \tag{15}$$

и удовлетворяет равенству

$$\left|\lambda E - \sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}\right| = 0.$$

Положим $\nu = e^{\lambda}$ и перепишем уравнение (15) в виде

$$\left|\zeta E - \sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right| = 0.$$

Рассмотрим функцию (аналитическую) $w(\xi) = e^{\xi}$ и соответствующую оператор-функцию

$$w\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right).$$

Так как λ является собственным значением оператора $\sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\gamma_j}$, то по теореме о спектре [14] величина $w(\lambda) = e^{\lambda} = \nu$ будет собственным значением оператора $\exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right)$, т.е. будет решением характеристического уравнения (14), а собственный вектор $z \in \mathcal{L}^n$ оператора $\sum_{j=1}^{s} A_j e^{\lambda\tau_j}$ с собственным значением λ, будет собственным вектором оператора $\exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right)$ с собственным значением ν. Точно также, каждый собственный вектор $z \in \mathcal{L}^n$ оператора $\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}$ с $\nu = e^{\lambda}$ с соответствующим собственным значением $\lambda + i2\pi k$ при каком-либо $k \in \mathbb{Z}$ будет собственным вектором оператора $\exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right)$ с одним и тем же собственным значением ν. По лемме 1 таких значений $k \in \mathbb{Z}$ будет конечное число $k_1, \dots, k_r$. Заметим, что нулями функции $(e^{\xi} - \nu)$, $\nu = e^{\lambda}$ являются значения $\lambda + i2\pi k_l$, $l = 1, \dots, r$, и только они, принадлежащие спектру оператора $\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}$. Так как производная функции $w(\xi) = e^{\xi}$ ни в одной точке не равна нулю, то кратность нулей $\lambda + i2\pi k_l$, $l = 1, \dots, r$, функции $(e^{\xi} - \nu)$ равна единице. Тогда имеет место разложение

$$(e^{\xi} - \nu) = v(\xi)(\xi - \lambda - i2\pi k_1)\dots(\xi - \lambda - i2\pi k_r), \tag{16}$$

где функция $v(\xi)$ не имеет нулей на спектре оператора $\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}$. Через θ_l, $l = 1, \dots, r$, обозначим собственные векторы оператора $\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}$, соответствующие собственным значениям $\lambda + i2\pi k_l$, $l = 1, \dots, r$. По теореме о спектре [15] линейная оболочка векторов θ_l, $l = 1, \dots, r$, содержится в собственном подпространстве оператора $\exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right)$, соответствующее собственному значению ν. Но в силу разложения (16) собственное подпространство оператора $\exp\left(\sum_{j=1}^{s} A_j \nu^{\tau_j}\right)$ будет совпадать с линейной оболочкой собственных векторов θ_l, $l = 1, \dots, r$. Точно также, в силу разложения (16), будет следовать последнее утверждение леммы.

Всякий набор вещественных матриц $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_s)$ и отклонений $\overline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_s)$ будем обозначать через $\Theta = (A_1, \dots, A_s, \tau_1, \dots, \tau_s)$. Очевидно, что пара $\Theta = (\mathcal{A}, \overline{\tau})$ однозначно определяет правую часть линейного однородного функционально-дифференциального уравнения (6), а $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_s)$ ее определяет как элемент банахова пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$. Следуя прежним обозначениям, положим $h = (|\tau_1|, \dots, |\tau_s|)$. В дальнейшем для всех приведенных величин будем отмечать их зависимость от Θ или $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{T}(\Theta)$ — множество решений квазиполинома (8) (с учетом их кратности). При заданном Θ мы можем корректно определить величины

$$\underline{\delta}(\Theta) = \inf\{\delta : \sharp\{\lambda : \lambda \in \mathcal{T}(\Theta), |\mathrm{Re}\,\lambda| < \delta\} \geq n\}, \tag{17}$$

$$\overline{\delta}(\Theta) = \sup\{\delta : \sharp\{\lambda : \lambda \in \mathcal{T}(\Theta), |\mathrm{Re}\,\lambda| < \delta\} \leq n\}, \tag{18}$$

$$\underline{\mu}(\Theta) = \exp(-\overline{\delta}(\Theta)), \quad \overline{\mu}(\Theta) = \exp(-\underline{\delta}(\Theta)), \tag{19}$$

где $\sharp$ означает мощность множества.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. при $h = 0$, величина $\underline{\delta}(\Theta)$ совпадает с верхним ляпуновским показателем и $\overline{\delta}(\Theta) = +\infty (\underline{\mu}(\Theta) = 0)$.

Лемма 3. *Для всякого набора $\Theta = (\mathcal{A}, \overline{\tau}) = (A_1, \dots, A_s, \tau_1, \dots, \tau_s)$ имеет место оценка $\overline{\delta}(\Theta) \geq \underline{\delta}(\Theta)$.*

Доказательство. Оно непосредственно следует из определений величин $\overline{\delta}(\Theta)$ и $\underline{\delta}(\Theta)$.

В терминах величин $\overline{\delta}(\Theta)$ и $\underline{\delta}(\Theta)$ ($\underline{\mu}(\Theta)$ и $\overline{\mu}(\Theta)$) для начальной задачи (6), (7) можем сформулировать теорему существования и единственности решения из пространства $\mathcal{L}^n_{\mu} C^{(0)}(\mathbb{R})$ при соответствующих значениях параметра $\mu \in (0,1)$. Для решений из пространств $\mathcal{L}^n_{\mu} C^{(0)}(\mathbb{R})$ по параметру $\mu \in (0,1)$ будут описаны бифуркации как потери решений, так и их ветвления.

Теорема 2. *Пусть задан набор $\Theta = (\mathcal{A}, \overline{\tau}) = (A_1, \dots, A_s, \tau_1, \dots, \tau_s)$. Если имеет место оценка $\overline{\delta}(\Theta) > \underline{\delta}(\Theta)$, то при каждом $\mu \in (\underline{\mu}(\Theta), \overline{\mu}(\Theta)]$, для уравнения (6) в пространстве $\mathcal{L}^n_{\mu} C^{(0)}(\mathbb{R})$ существует n линейно независимых решений. При значениях $\mu = \overline{\mu}(\Theta)$ и $\mu = \underline{\mu}(\Theta) \neq 0$ происходит бифуркация. В пространстве $\mathcal{L}^n_{\mu} C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu > \overline{\mu}(\Theta)$, происходит потеря части из n линейно независимых решений, а в пространстве $\mathcal{L}^n_{\underline{\mu}(\Theta)} C^{(0)}(\mathbb{R})$ происходит рождение (ветвление) новых линейно независимых решений.*

Если имеет место равенство $\overline{\delta}(\Theta) = \underline{\delta}(\Theta)$, то в пространстве $\mathcal{L}^n_{\mu} C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu = \overline{\mu}(\Theta) = \underline{\mu}(\Theta)$, для уравнения (6) существует $m, m > n$, линейно независимых решений. При значении $\mu = \overline{\mu}(\Theta) = \underline{\mu}(\Theta)$

происходит бифуркация. В пространстве $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu > \overline{\mu}(\Theta) = \underline{\mu}(\Theta)$, *происходит потеря решения и остается только лишь* m', $m' < n$, *линейно независимых решений*.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство $\overline{\delta}(\Theta) > \underline{\delta}(\Theta)$. В силу определения величин $\overline{\delta}(\Theta)$ и $\underline{\delta}(\Theta)$ в открытом цилиндре $|\mathrm{Re}\,\lambda| < \overline{\delta}(\Theta)$ расположено n решений квазиполинома (8) (с учетом их кратности) и эти решения локализуются в более меньшем замкнутом цилиндре $|\mathrm{Re}\,\lambda| \le \underline{\delta}(\Theta)$. При этом в замкнутом цилиндре $|\mathrm{Re}\,\lambda| \le \overline{\delta}(\Theta)$ расположено более n решений, а в открытом цилиндре $|\mathrm{Re}\,\lambda| < \underline{\delta}(\Theta)$ расположено менее n решений. В силу отмеченных спектральных свойств и следуют утверждения теоремы для этого случая.

Пусть выполняется равенство $\overline{\delta}(\Theta) = \underline{\delta}(\Theta)$. В силу определения величин $\overline{\delta}(\Theta)$ и $\underline{\delta}(\Theta)$, в замкнутом цилиндре $|\mathrm{Re}\,\lambda| \le \overline{\delta}(\Theta)$ расположено более чем n решений квазиполинома (8) (с учетом их кратности), а в открытом цилиндре $|\mathrm{Re}\,\lambda| < \overline{\delta}(\Theta)$ расположено менее чем n решений. В силу отмеченных спектральных свойств и следуют утверждения теоремы также и для этого случая.

Для линейного однородного функционально-дифференциального уравнения точечного типа, определяемого набором $\Theta = (\mathcal{A}, \overline{\tau})$, основное неравенство теоремы 1, гарантирующее существование и единственность решения начальной задачи (6), (7), принимает вид

$$L_{\mathcal{A}} \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln \mu^{-1}, \quad \mu \in (0,1), \tag{20}$$

где $L_{\mathcal{A}} = \max_{1\le j\le s} \|A_j\|$.

Сформулируем условие, гарантирующее бифуркацию из первой части теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть задан набор* $\Theta = (\mathcal{A}, \overline{\tau}) = (A_1, \dots, A_s, \tau_1, \dots, \tau_s)$, *для которого неравенство*

$$L_{\mathcal{A}} \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln \mu^{-1}, \quad \mu \in (0,1), \tag{21}$$

имеет решение. Тогда выполняется оценка $\overline{\delta}(\Theta) > \underline{\delta}(\Theta)$ *и справедливо вложение*

$$(\mu_1(L_{\mathcal{A}}, h), \mu_2(L_{\mathcal{A}}, h)) \subseteq (\underline{\mu}(\Theta), \overline{\mu}(\Theta)).$$

При каждом $\mu \in (\underline{\mu}(\Theta), \overline{\mu}(\Theta)]$ *для начальной задачи* (6), (7) *в пространстве* $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ *существует решение. Такое решение является единственным. При значениях* $\mu = \overline{\mu}(\Theta)$, $\mu = \underline{\mu}(\Theta) \ne 0$, *происходит бифуркация. В пространстве* $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu > \overline{\mu}(\Theta)$, *происходит потеря существования решения, а в пространстве* $\mathcal{L}_{\underline{\mu}(\Theta)}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ *происходит потеря единственности решения*.

Доказательство. В силу теоремы 1, для начальной задачи (6), (7) при каждом $\mu \in (\mu_1(L_{\mathcal{A}}, h), \mu_2(L_{\mathcal{A}}, h))$ в пространстве $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ имеет место теорема существования и единственности решения. Поэтому квазиполином (8) в цилиндре

$$|\mathrm{Re}\,\lambda| < \delta_1(L_{\mathcal{A}}, h), \quad \mu_1(L_{\mathcal{A}}, h) = e^{-\delta_1(L_{\mathcal{A}}, h)}$$

на комплексной плоскости имеет ровно n корней с учетом их кратностей. Более того, эти корни расположены в более меньшем цилиндре

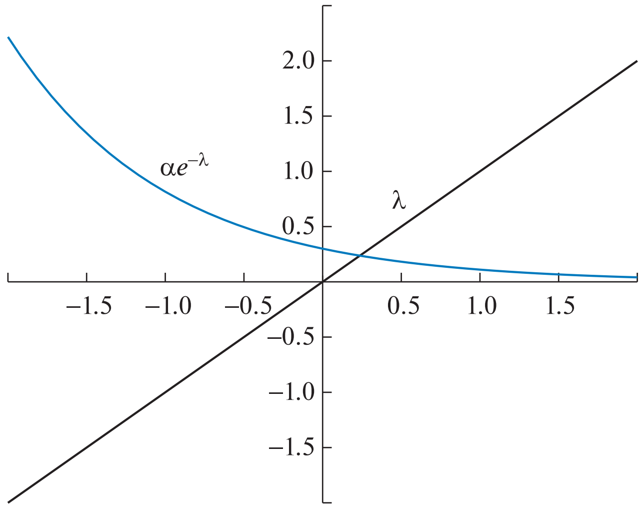
$$|\mathrm{Re}\,\lambda| \le \delta_2(L_{\mathcal{A}}, h), \quad \mu_2(L_{\mathcal{A}}, h) = e^{-\delta_2(L_{\mathcal{A}}, h)},$$

откуда и следуют утверждения теоремы.

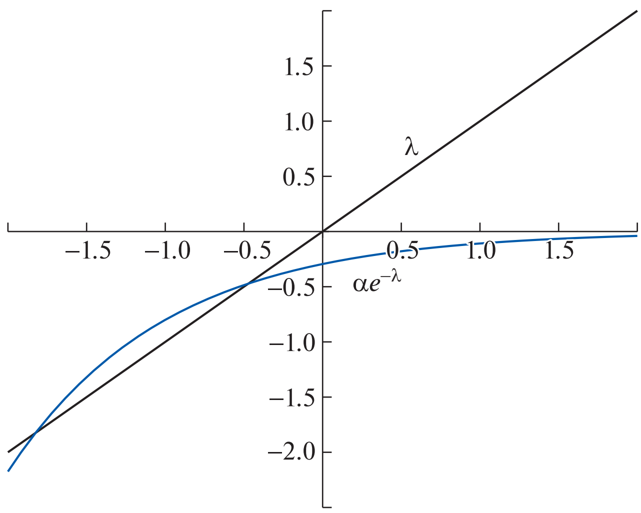
3.1. Пример бифуркации

Рассмотрим уравнение с запаздыванием в следующей форме:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t-1), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{22}$$



Фиг. 1. График решения уравнения (23) при $\alpha > 0$.



Фиг. 2. График решения уравнения (23) при $\alpha \in (-e^{-1}, 0)$.

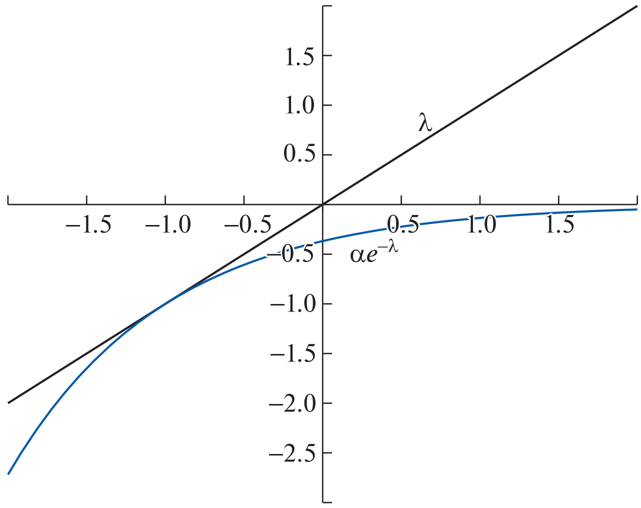
В соответствии с обозначениями данного раздела рассматриваемому уравнению (22) соответствуют набор $\Theta = (\alpha, -1)$ и константа Липшица $L_{\mathcal{A}} = |\alpha|$. Будем рассматривать задачи о бифуркации пространства решений из $\mathcal{L}^n_\mu C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (\underline{\mu}(\Theta), \overline{\mu}(\Theta))$, по параметрам μ и α.

Характеристический квазиполином такого уравнения принимает вид

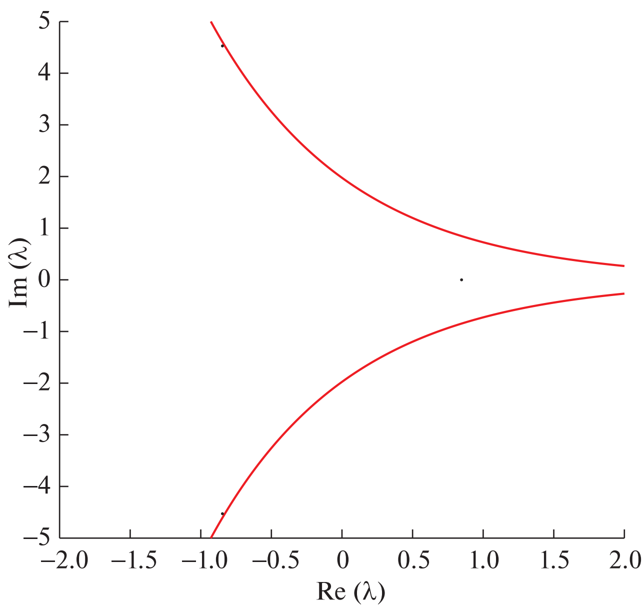
$$\lambda = \alpha e^{-\lambda}, \tag{23}$$

при $\alpha \geq 0$ имеет единственный действительный корень (см. фиг. 1), который мы обозначим через $\hat{\lambda}(\alpha)$. При этом функция $\hat{\lambda}(\alpha)$ монотонно возрастающая по α. Действительные части комплексных корней ограничены сверху, сама верхняя грань монотонно возрастает по α, и при малых α отрицательна.

С другой стороны, характеристическое уравнение (23) при $-e^{-1} < \alpha < 0$ имеет два действительных корня (см. фиг. 2 и 3), а при $\alpha = -e^{-1}$ имеем единственный действительный корень, равный -1 кратности 2. Правый корень мы также обозначим через $\hat{\lambda}(\alpha)$ и функция $\hat{\lambda}(\alpha)$ будет моно-



Фиг. 3. График решения уравнения (23) при $\alpha = -e^{-1}$.



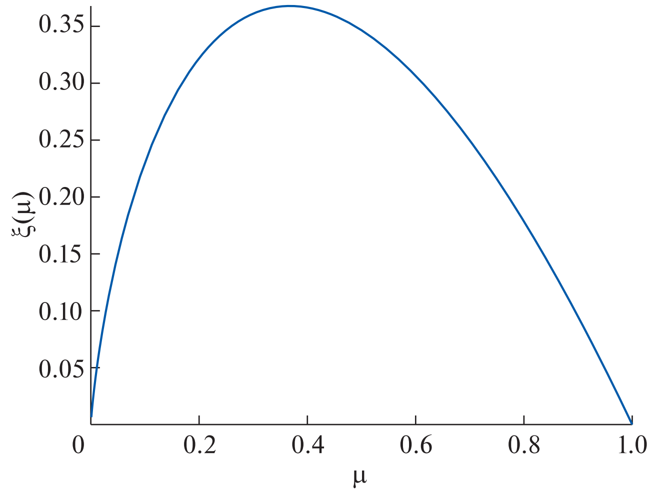
Фиг. 4. График асимптотики спектра квазиполинома (23) при $\alpha > e^{-1}$.

тонно возрастающая по α (см. фиг. 4). При $\alpha < 0$ действительные части комплексных корней ограничены сверху, сама верхняя грань монотонно убывает по α. Более того, отмеченная верхняя грань меньше, чем левый действительный корень, который при $\alpha \to 0 - 0$ стремится к $-\infty$.

Для рассматриваемого уравнения соответствующее основное неравенство теоремы существования и единственности имеет вид

$$|\alpha|\mu^{-1} < \ln \mu^{-1}. \tag{24}$$

Рассматривая функцию $\xi(\mu) = -\mu \ln \mu$ (см. фиг. 5), несложно показать, что неравенство (24) имеет решение тогда и только тогда, когда $|\alpha| < e^{-1}$. Следовательно, при $|\alpha| < e^{-1}$ для любого $\mu \in (\mu_1(|\alpha|, 1), \mu_2(|\alpha|, 1))$ в пространстве $\mathscr{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R})$ имеет место теорема 1 о существовании и единственности решения уравнения (22) при заданном начальном условии.



Фиг. 5. График функции $\xi(\mu)$.

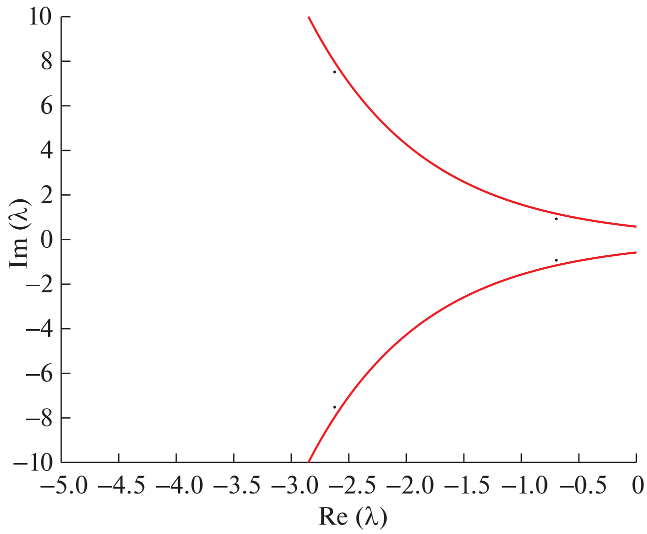
Случай 1: $|\alpha| < e^{-1}$. Из теоремы существования и единственности решения будет следовать включение $e^{-|\hat{\lambda}(\alpha)|} \in (\mu_1(|\alpha|,1), \mu_2(|\alpha|,1))$ и других собственных значений $\tilde{\lambda}(\alpha)$ характеристического уравнения со свойством $e^{-|\mathrm{Re}\tilde{\lambda}(\alpha)|} \in (\mu_1(|\alpha|,1), \mu_2(|\alpha|,1))$ нет. Для рассматриваемых $\Theta = (\alpha, -1)$ выполняются условия теоремы 3, в частности $\bar{\delta}(\Theta) > \underline{\delta}(\Theta)$, $(\mu_1(|\alpha|,1), \mu_2(|\alpha|,1)) \subseteq (\underline{\mu}(\Theta), \bar{\mu}(\Theta))$, и имеет место описанная там бифуркация пространства решений $\mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R})$ по параметру μ при значениях $\mu = \underline{\mu}(\Theta)$ и $\mu = \bar{\mu}(\Theta)$).

Случай 2: $\alpha \geq e^{-1}$. Выше было отмечено, что квазиполином всегда имеет единственный действительный корень $\hat{\lambda}(\alpha)$. Нас интересует такое минимальное значение $\alpha_{\min} \geq e^{-1}$, при котором впервые появляется пара комплексно-сопряженных корней $\lambda_1(\alpha_{\min})$ и $\bar{\lambda}_1(\alpha_{\min})$ квазиполинома, таких что $|\mathrm{Re}(\lambda_1(\alpha_{\min}))| = |\mathrm{Re}(\bar{\lambda}_1(\alpha_{\min}))| = |\hat{\lambda}(\alpha_{\min})|$ (см. фиг. 4). После подстановки указанных условий в уравнение (23) получаем условие на $\hat{\lambda}(\alpha_{\min})$

$$e^{\hat{\lambda}(\alpha_{\min})} \cos\left(\hat{\lambda}(\alpha_{\min}) e^{\hat{\lambda}(\alpha_{\min})} \sqrt{e^{2\hat{\lambda}(\alpha_{\min})} - 1}\right) = -1. \tag{25}$$

Численное решение уравнения (25) дает примерное значение $\hat{\lambda}(\alpha_{\min}) = 0.8468$, а соответствующее значение $\alpha_{\min}$ равно 1.97496. На фиг. 4 указаны линии, на которых расположены собственные значения квазиполинома (23) и указана первая пара комплексно сопряженных корней $\lambda_1(\alpha_{\min})$ и $\bar{\lambda}_1(\alpha_{\min})$ с минимальным модулем действительной части, а также единственный действительный корень $\hat{\lambda}(_{\min})$, который равен модулю действительной части указанных комплексных корней.

В таком случае, для $\Theta = (\alpha, -1)$, $e^{-1} \leq \alpha < \alpha_{\min}$ выполняется условие теоремы 2, а именно, $\bar{\delta}(\Theta) > \underline{\delta}(\Theta)$. Тогда в пространстве $\mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (\underline{\mu}(\Theta), \bar{\mu}(\Theta))$, справедлива теорема существования и единственности решения уравнения (22) при заданном начальном условии и имеет место описанная там бифуркация пространства решений по параметру μ при значениях $\mu = \underline{\mu}(\Theta)$ и $\mu = \bar{\mu}(\Theta)$). Из теоремы существования и единственности решения будет следовать включение $e^{-\hat{\lambda}(\alpha)} \in (\underline{\mu}(\Theta), \bar{\mu}\Theta))$ и соответственно в пространстве $\mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\mu = e^{-\hat{\lambda}(\alpha)}$, также справедлива теорема существования и единственности решения уравнения (22) при заданном начальном условии.



Фиг. 6. График асимптотики спектра квазиполинома (23) при $\alpha < -e^{-1}$.

При значении $\alpha_{\min}$ выполняется равенство $\overline{\delta}(\Theta) = \underline{\delta}(\Theta)$ и соответственно $\underline{\mu}(\Theta) = \overline{\mu}(\Theta)$. По теореме 2 имеет место описанная там бифуркация пространства решений по параметру μ при значении $\mu = \underline{\mu}(\Theta) = \overline{\mu}(\Theta)$. Более того, $\underline{\mu}(\Theta) = \overline{\mu}(\Theta) = e^{-\hat{\lambda}(\alpha_{\min})}$ и в пространстве $\mathcal{L}_{\mu}^{n}C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\mu = e^{-\hat{\lambda}(\alpha_{\min})}$, возникает 3-параметрическое семейство решений.

Случай 3: $\alpha \le -e^{-1}$. Ранее мы отметили, что при $\alpha \in (-e^{-1}, 0)$ для характеристического уравнения (23) имеем два действительных корня кратности 1, а при $\alpha = -e^{-1}$ имеем единственный действительный корень $\hat{\lambda}(-e^{-1}) = -1$ кратности 2 (см. фиг. 2 и 3). В случае 1 было описано пространство решений, связанное с правым корнем $\hat{\lambda}(\alpha)$ характеристического уравнения. Показано, что в пространстве $\mathcal{L}_{\mu}^{n}C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\mu = e^{-|\hat{\lambda}(\alpha)|}$, справедлива теорема существования и единственности решения уравнения (22) при заданном начальном условии.

При дальнейшем уменьшении значения α действительных корней нет (см. фиг. 6). При этом найдется $d > 0$ такое, что при $-d < \alpha < -e^{-1}$ существует единственная пара сопряженных комплексных корней квазиполинома (23) с минимальным модулем действительной части.

При значении $\alpha = -e^{-1}$ выполняется равенство $\overline{\delta}(\Theta) = \underline{\delta}(\Theta)$ и соответственно $\underline{\mu}(\Theta) = \overline{\mu}(\Theta)$. По теореме 2 имеет место описанная там бифуркация пространства решений по параметру μ при значении $\mu = \underline{\mu}(\Theta) = \overline{\mu}(\Theta)$. Более того, $\underline{\mu}(\Theta) = \overline{\mu}(\Theta) = e^{-|\hat{\lambda}(-e^{-1})|}$ и в пространстве $\mathcal{L}_{\mu}^{n}C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\mu = e^{-|\hat{\lambda}(-e^{-1})|}$, возникает 2-параметрическое семейство решений.

Рассмотрим вопрос о поведении пространства решений по параметру α (бифуркация по параметру α). При каждом $\Theta = (\alpha, -1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, будем рассматривать решения функционально-дифференциального уравнения из пространства $\mathcal{L}_{\mu}^{n}C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (\underline{\mu}(\Theta), \overline{\mu}(\Theta))$. Из случаев 1–3 следует, что для $\alpha \in (-e^{-1}, \alpha_{\min})$ размерность пространства решений равна единице и имеет место теорема существования и единственности решения. При $\alpha = -e^{-1}$ размерность пространства решений равна двум, а при $\alpha = \alpha_{\min}$ размерность пространства решений равна трем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miwa T., Jimbo M., Date E.* Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras. UK: Cambridge University Press, 2000.

2. *Toda M.* Theory of Nonlinear Lattices. Berlin, Heidelberg: Springer, 1989.
3. *Frenkel Ya.I., Contorova T.A.* On the theory of plastic deformation and twinning // J. of Experimental and Theoretical Physics. 1938. V. 8. № 1. P. 89–95.
4. *Pustyl'nikov L.D.* Infinite-dimensional non-linear ordinary differential equations and the KAM theory // Russian Mathematical Surveys. 1997. V. 52. № 3. P. 551–604.
5. *Beklaryan L.A.* Group singularities of differential equations with deviating arguments and metric invariants related to them // J. of Mathematical Sciences. 2001. V. 105. № 1. P. 1799–1811.
6. *Beklaryan L.A.* Equations of advanced-retarded type and solutions of traveling-wave type for infinite-dimensional dynamic systems // J. of Mathematical Sciences. 2004. V. 124. № 4. P. 5098–5109.
7. *Beklaryan L.A., Khachatryan N.K.* Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional Differential Equat. 2006. V. 13. № 2. P. 125–155.
8. *Beklaryan L.A.* Introduction to the theory of functional differential equations. Group approach. Moscow: Factorial Press, 2007 (in Russian).
9. *Beklaryan L.A., Beklaryan A.L.* Traveling waves and functional differential equations of pointwise type. What is common? // Proc. of the VIII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA-2017), Petrovac, Montenegro, October 2–7. 2017.
10. *Beklaryan L.A.* A method for the regularization of boundary value problems for differential equations with deviating argument // Soviet Math. Dokl. 1991. V. 43. № 2. P. 567–571.
11. *Beklaryan L.A.* Introduction to the theory of functional differential equations and their applications. Group approach // J. of Mathematical Sciences. 2006. V. 135. № 2. P. 2813–2954.
12. *Beklaryan L.A.* The linear theory of functional differential equations: existence theorems and the problem of pointwise completeness of the solutions // Sbornik: Mathematics. 2011. V. 202. № 3. P. 307–340.
13. *Beklaryan L.A., Beklaryan A.L.* Solvability problems for a linear homogeneous functional-differential equation of the pointwise type // Differential Equat. 2017. V. 53. № 2. P. 145–156.
14. *Krasovsky N.N.* Stability of Motion: Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay. Stanford, California: Stanford University Press, 1963.
15. *Rudin W.* Functional Analysis. New Delhi: McGraw Hill, 1974.