

УДК 517.9

ЭФФЕКТИВНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧАХ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН, ПОРОЖДЕННЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ, В ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ И ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ¹⁾

© 2020 г. С. Ю. Доброхотов^{1,*}, В. Е. Назайкинский^{1,**}

¹ 119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия

*e-mail: s.dobrokhотов@gmail.com

**e-mail: nazaikinskii@googlemail.com

Поступила в редакцию 15.02.2020 г.
Переработанный вариант 15.02.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Рассматривается задача Коши с локализованными начальными данными для широкого класса эволюционных уравнений, включающего в себя уравнения Шрёдингера и Дирака, уравнения Максвелла, линеаризованные уравнения газо- и гидродинамики, уравнения линейной теории поверхностных волн на воде, уравнения теории упругости, уравнения акустики и многие другие. Обсуждается общий подход к построению эффективных асимптотических формул в таких задачах. Библ. 28. Фиг. 2.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, задача Коши, локализованные начальные условия, квазиклассическая асимптотика, метод ВКБ, канонический оператор Маслова, эффективные формулы.

DOI: 10.31857/S0044466920080062

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе обсуждается общий подход к построению эффективной глобальной асимптотики решения задачи Коши с локализованными начальными условиями для эволюционных линейных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений и систем волнового типа с малым параметром при производной (который может как совпадать с параметром, отвечающим за размер окрестности, в которой сосредоточено начальное условие, так и отличаться от него). Рассматриваемый класс уравнений включает уравнения Шрёдингера, Дирака и Максвелла, линеаризованные уравнения газо- и гидродинамики, уравнения линейной теории поверхностных волн на воде, теории упругости, акустики и многие другие. Говоря об эффективности, мы имеем в виду асимптотические формулы, допускающие относительно простую и не требующую значительных вычислительных мощностей реализацию на современных программных системах технических вычислений, таких как *Wolfram Mathematica* или *MatLab*. Глобальная теория квазиклассических асимптотик, основанная на конструкции канонического оператора Маслова [1] (см. также [2], [3]), в своем стандартном варианте эффективных в этом смысле формул, как правило, не дает, что и неудивительно, поскольку разработана она была более пятидесяти лет назад, задолго до появления указанных программных систем. Таким образом, возникла естественная необходимость адаптации этой конструкции к появившемуся с тех пор новому инструментарию математического исследования. В последние годы авторы совместно с коллегами существенно продвинулись в решении этой проблемы. Ключевую роль при этом играют введенные в статье [4] новые представления канонического оператора Маслова в сингулярных картах. Основной практический результат состоит в том, что, по крайней мере, в главном члене эффективные асимптотики в рассматриваемых задачах удается построить, комбинируя новые формулы из [4] с известными схемами из [1]–[3] и применяя получившийся аппарат к специальным лагранжевым многообразиям с особенностями, которые не охватывались “старыми” формулами.

¹⁾Материал доклада основан на работах, выполненных по гранту РФФИ (16-11-10282).

2. УРАВНЕНИЯ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$-ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \widehat{\mathcal{H}} \Psi = 0, \quad (1)$$

где переменная t (время) принадлежит некоторому отрезку $[0, T]$ вещественной оси, $h \rightarrow 0$ – малый положительный параметр, $\Psi = \Psi(x, t, h)$ – неизвестная функция, а $\widehat{\mathcal{H}}$ – дифференциальный или псевдодифференциальный оператор с параметром h в n -мерном пространстве \mathbb{R}_x^n с координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$. Напомним [2], [5], что псевдодифференциальный оператор с параметром h (или h -псевдодифференциальный оператор, для краткости в дальнейшем – ПДО) – это оператор, представляющий собой функцию от операторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ умножения на независимые переменные и операторов дифференцирования $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) = -ih\nabla$, т.е. $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(x, \hat{p}, h)$, где $\mathcal{H}(x, p, h)$ – некоторая функция от переменных x и $p = (p_1, \dots, p_n)$ и параметра h , называемая (полным) символом ПДО $\widehat{\mathcal{H}}$. Здесь номера 1 и 2 над операторами \hat{p} и x – это введенные в [2] *фейнмановские номера*, задающие порядок действия операторов. Необходимость их использования обусловлена тем, что операторы x и \hat{p} , в отличие от переменных x и p – аргументов символа – не коммутируют между собой, и в их отсутствие было бы неясно, например, какой оператор сопоставить символу $\mathcal{H}(x, p, h) = x_1 p_1$: $x_1 \hat{p}_1$ или $\hat{p}_1 x_1 = x_1 \hat{p}_1 - ih$. Подробное описание соответствующих конструкций можно найти в [5]–[7], здесь же приведем только само определение ПДО с данным порядком действия операторов \hat{p} , x :

$$\left[\mathcal{H} \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}, h \right) u \right] (x, h) = \frac{e^{i\pi n/4}}{(2\pi h)^{n/2}} \int e^{i p x} \mathcal{H}(x, p, h) \tilde{u}(p, h) dp_1 dp_2 \dots dp_n,$$

$$\text{где } \tilde{u}(p, h) = \frac{e^{-i\pi n/4}}{(2\pi h)^{n/2}} \int e^{-i p x} u(x, h) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

есть $1/h$ -преобразование Фурье функции $u(x, h)$. Относительно символа $\mathcal{H}(x, p, h)$ будем предполагать, что это гладкая функция на $\mathbb{R}^{2n} \times [0, 1]$, вместе со всеми производными растущая при $|x| + |p| \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени ($|x| + |p|$) ^{m} (см. [2]). Функция $\mathcal{H}^0(x, p)$ в тейлоровском разложении $\mathcal{H}(x, p, h) = \mathcal{H}^0(x, p) + h\mathcal{H}^1(x, p) + \dots$ символа по степеням параметра h называется *главным символом*, а функция

$$\mathcal{H}_{sub}(x, p) = \mathcal{H}^1 + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{H}^0}{\partial x_j \partial p_j}(x, p)$$

(ср. [8, формула (18.1.32)]) – *субглавным символом* оператора $\widehat{\mathcal{H}}$. Предполагается, что функция $\mathcal{H}^0(x, p)$ вещественная. Эти две функции определяют главный член асимптотики решения в задаче Коши для уравнения (1) с локализованными начальными данными

$$\Psi|_{t=0} = V \left(\frac{x - \xi}{\mu} \right), \quad (2)$$

где гладкая функция $V(y)$, задающая форму начального возмущения, достаточно быстро убывает при $y \rightarrow \infty$, а малый параметр $\mu \geq h$ характеризует начальный размер возмущения.

Будем также рассматривать задачу Коши для *системы уравнений*, которая может быть записана в виде (1), (2), где на этот раз Ψ и V – не скалярные функции, а вектор-функции размерности m , а $\widehat{\mathcal{H}}$ – матрица размера $m \times m$, элементами которой являются (псевдо)дифференциальные операторы $\widehat{\mathcal{H}}_{jk}$, $j, k = 1, \dots, m$. В этом случае предполагается, что при $p \neq 0$ все собственные значения $\lambda_j(x, p)$, $j = 1, \dots, k \leq m$, главного символа $\mathcal{H}^0(x, p)$ – гладкие вещественные функции, а их геометрические кратности m_j не зависят от (x, p) , причем $m_1 + \dots + m_k = m$. Эти функции называются

эффективными гамильтонианами задачи (при $m = 1$ роль эффективного гамильтониана играет сама функция $\mathcal{H}^0(x, p)$).

Наконец, будем рассматривать задачу Коши для уравнения второго порядка

$$-h^2\Psi'' - \widehat{\mathcal{H}}\Psi = 0, \quad (3)$$

которое после введения дополнительных неизвестных функций $\Psi' = -ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ переписывается в виде уравнения (1) для вектора (Ψ, Ψ') . Для Ψ' задается условие, аналогичное (2), при $t = 0$. Часто удобнее исследовать уравнение (3) непосредственно, не сводя его к системе вида (1).

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Простейшие примеры уравнений (1) и (3) в скалярном случае – это соответственно уравнение Шрёдингера $-ih\psi_t - h^2\Delta\psi/2 + v(x)\psi = 0$ и многомерное волновое уравнение

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \langle \nabla, c^2(x)\nabla u \rangle = 0. \quad (4)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^n a_j b_j$, а $v(x)$ и $c^2(x) > 0$ – гладкие вещественнозначные функции. Уравнение (4) формально не имеет вида (3), но его легко привести к такому виду, умножив на h^2 и переставив все операторы дифференцирования на первое место с учетом коммутационного соотношения $[\hat{p}_j, x_k] = -ih\delta_{jk}$, в результате чего получается уравнение

$$-h^2 u'' - c^2(x)\hat{p}^2 u + ih\langle \nabla(c^2), \hat{p} \rangle u = 0,$$

где, разумеется, $\hat{p}^2 = \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle$. Полные, главные и субглавные символы имеют вид

$$\mathcal{H}(x, p, h) = \mathcal{H}^0(x, p) = p^2/2 + v(x), \quad \mathcal{H}_{sub}(x, p) = 0$$

для уравнения Шрёдингера и

$$\mathcal{H}(x, p, h) = c^2(x)p^2 - ih\langle \nabla(c^2(x)), p \rangle, \quad \mathcal{H}^0(x, p) = c^2(x)p^2, \quad \mathcal{H}_{sub}(x, p) = 0$$

для волнового уравнения.

Пример 2. Более сложный пример дает теория линейных поверхностных волн на воде в бассейне переменной глубины $D(x) > 0$ с учетом дисперсии. В этом случае $n = 2$, $x \in \mathbb{R}^2$, и функция, описывающая возвышение свободной поверхности, удовлетворяет скалярному уравнению вида (3) с оператором $\widehat{\mathcal{H}}$, символ которого имеет вид $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 + h\mathcal{H}^1 + O(h^2)$, где

$$\mathcal{H}^0(x, p) = g|p|\tanh(|p|D(x)), \quad \mathcal{H}^1(x, p) = \frac{2g\langle p, D_x(x) \rangle}{\cosh^2(|p|D(x))}(1 - |p|D(x)\tanh(|p|D(x))), \quad (5)$$

g – ускорение свободного падения. Отметим, что $\mathcal{H}_{sub}(x, p) = 0$. Здесь символ $\mathcal{H}(x, p)$ не является многочленом от p , так что уравнение псевдодифференциальное, а не дифференциальное.

Пример 3. Приведем один из простейших физических примеров системы уравнений вида (1) – двумерное уравнение Дирака, описывающее квантовые состояния электронов в графене. Это система уравнений для двумерной вектор-функции $\Psi(x, h)$, $x \in \mathbb{R}^2$, и соответствующий матричный символ $\mathcal{H}(x, p)$ (от параметра h он не зависит) имеет вид

$$\mathcal{H}(x, p) = \begin{pmatrix} U(x) + m(x) & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & U(x) - m(x) \end{pmatrix}, \quad \pi_j = p_j + A_j(x), \quad j = 1, 2,$$

где $U(x)$ – потенциал электрического поля, $B(x)$ – магнитное поле, $A(x) = (A_1(x), A_2(x))$ – векторный потенциал магнитного поля, $m(x)$ – переменная “масса”, описывающая примеси. Предполагается, что векторный потенциал $A(x)$ удовлетворяет условию $\operatorname{div} A = 0$. Нетрудно видеть, что в данном случае $\mathcal{H}^0(x, p) = \mathcal{H}(x, p)$ (полный и главный символы оператора $\widehat{\mathcal{H}}$ совпадают),

$\mathcal{H}_{sub}(x, p) = 0$, а собственные значения $\lambda^\pm(x, p)$ и соответствующие нормированные собственные векторы $\chi^\pm(x, p)$ главного символа имеют вид

$$\lambda^\pm = U \pm (m^2 + \pi^2)^{1/2}, \quad \chi^\pm = \frac{((m^2 + \pi^2)^{1/2} \pm m)^{1/2}}{(2|\pi|)^{1/2}(m^2 + \pi^2)^{1/4}} \begin{pmatrix} \pi_1 - i\pi_2 \\ -m \pm (m^2 + \pi^2)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пример формы $V(y)$ начального возмущения (2) дает произведение $V(y) = \mathbf{a}e^{-\langle y, By \rangle/2}$ постоянного вектора \mathbf{a} и гауссовой экспоненты, где B – вещественная положительно-определенная $n \times n$ матрица. Такая функция задает начальное возмущение в виде “шапочки”. Дифференцируя ее k раз, можно получить “шапочку”, модулированную k осцилляциями.

Другой, не менее важный пример получается, если взять функцию

$$V(y) = \frac{1}{(1 + \langle y, By \rangle)^{(n+1)/2}} \tag{6}$$

и ее производные. В практических вычислениях эти функции удобны, в частности, тем, что их преобразование Фурье выражается в конечном виде через экспоненты. Вместо вещественной матрицы B можно взять комплексную, такую, что $\text{Re } B > 0$.

3. ВКБ-РЕШЕНИЯ И КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР МАСЛОВА

Разговор о лучевых разложениях и квазиклассических асимптотиках удобно начать со скалярного уравнения (1) с начальными данными более простого, чем (2), вида

$$\Psi|_{t=0} = a_0(x)e^{iS_0(x)}, \tag{7}$$

где $S_0(x)$ и $a_0(x)$ – гладкие функции, $S_0(x)$ вещественнозначна, а $a_0(x)$ финитна. Асимптотическое решение задачи Коши (1), (7) будем искать в виде

$$\Psi(x, t, h) = (a(x, t) + hb(x, t) + \dots)e^{iS(x, t)}, \tag{8}$$

где вещественная фаза $S(x, t)$ и финитные по x амплитуды $a(x, t)$, $b(x, t)$, ... – гладкие функции (в дальнейшем мы ограничиваемся главным членом амплитуды $a(x, t)$). Анзац (8), обобщающий хорошо известные плоские волны, называется *ВКБ-решением*. Фаза $S(x, t)$ находится из задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \mathcal{H}^0\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, t)\right) = 0, \quad S(x, 0) = S_0(x), \tag{9}$$

а амплитуда a – из соответствующего уравнения переноса (см. ниже). Во многих важных и физически интересных ситуациях глобального решения задачи (9), а значит, и глобального асимптотического ВКБ-решения (8), не существует (что совершенно не означает несуществования точного решения задачи (1), (7)). Чтобы понять, что происходит и как все-таки построить глобальное асимптотическое решение, обратимся к геометрической интерпретации ВКБ-решения (8), предполагая его существование известным. При каждом t рассмотрим в *фазовом пространстве* \mathbb{R}^{2n} с координатами $(x, p) = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ поверхность

$$\Lambda_t = \left\{ (x, p) : p = \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) \right\}. \tag{10}$$

Она представляет собой *лагранжево многообразие* [1], т.е. ее размерность равна n , а интеграл $\int_\gamma p dx$ вдоль любого замкнутого пути γ на Λ_t не меняется при деформациях пути (что эквивалентно обращению в нуль на Λ_t скобок Лагранжа). Из уравнения (9) следует, что Λ_t получается из $\Lambda_{t'}$ сдвигом за время $t - t'$ вдоль траекторий системы Гамильтона

$$\dot{x} = \mathcal{H}_p^0(x, p), \quad \dot{p} = -\mathcal{H}_x^0(x, p). \tag{11}$$

Пусть $(x = X(\alpha, t), p = P(\alpha, t))$ – траектория системы (11) с начальными условиями $X(\alpha, 0) = \alpha$, $P(\alpha, 0) = \frac{\partial S_0}{\partial x}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Тогда при каждом t многообразие Λ_t параметризовано координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$:

$$\Lambda_t = \{x = X(\alpha, t), p = P(\alpha, t), \alpha \in \mathbb{R}^n\}. \quad (12)$$

Функция $\tau(\alpha, t) = S(X(\alpha, t), t)$ удовлетворяет задаче Коши для уравнения Пфаффа

$$d\tau(\alpha, t) = P(\alpha, t)dX(\alpha, t) - \mathcal{H}^0(X(\alpha, t), P(\alpha, t))dt, \quad \tau(\alpha, 0) = \tau_0(\alpha) \quad (13)$$

(где $\tau_0(\alpha) = S_0(\alpha)$, поскольку $X(\alpha, 0) = \alpha$). Далее, якобиан

$$J(\alpha, t) = \frac{DX}{D\alpha}(\alpha, t) := \det \frac{\partial X}{\partial \alpha}(\alpha, t) \quad (14)$$

отличен от нуля, а уравнение $X(\alpha, t) = x$ имеет гладкое решение $\alpha = \alpha(x, t)$, так как функции (x_1, \dots, x_n) образуют систему координат на Λ_t в силу (10). ВКБ-решение (8) можно записать в терминах многообразий Λ_t в виде

$$\Psi(x, t, h) = \frac{A(\alpha, t)e^{i\mathcal{G}(\alpha, t)}}{\sqrt{|J(\alpha, t)|}} \Bigg|_{\alpha=\alpha(x, t)}, \quad (15)$$

где “новая” амплитуда $A(\alpha, t)$ находится из задачи Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial A}{\partial t}(\alpha, t) + i\mathcal{H}_{sub}(X(\alpha, t), P(\alpha, t))A(\alpha, t) = 0, \quad A(\alpha, 0) = A_0(\alpha) \quad (16)$$

(где $A_0(\alpha) = a_0(\alpha)$, поскольку $J(\alpha, 0) = 1$). Таким образом, асимптотическое решение (15) задачи Коши (1), (7) можно построить с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. Задать начальное лагранжево многообразие Λ_0 , амплитуду $A(\alpha, 0)$ и действие $\tau_0(\alpha)$.

Шаг 2. Решить систему Гамильтона (11) с начальными условиями на многообразии Λ_0 и построить многообразия Λ_t по формуле (12).

Шаг 3. Вычислить решения уравнения Пфаффа (13) и уравнения переноса (16) по формулам

$$\tau(\alpha, t) = \tau_0(\alpha) + \int_0^t [P(\alpha, \zeta)\mathcal{H}_p^0(X(\alpha, \zeta), P(\alpha, \zeta)) - \mathcal{H}^0(X(\alpha, \zeta), P(\alpha, \zeta))]d\zeta,$$

$$A(\alpha, t) = A_0(\alpha) \exp \left\{ -i \int_0^t \mathcal{H}_{sub}(X(\alpha, \zeta), P(\alpha, \zeta))d\zeta \right\}.$$

Шаг 4. Вычислить якобиан (14), найти решение $\alpha = \alpha(x, t)$ уравнения $X(\alpha, t) = x$ (т.е. осуществить переход от “лагранжевых” координат α на Λ_t к “эйлеровым” координатам x в исходном физическом пространстве) и подставить полученные выражения в формулу (15).

Если заранее неизвестно, что решение вида (8) существует, то мы по-прежнему можем выполнить шаги 1–3 этого алгоритма (при условии, что решения гамильтоновой системы продолжались по времени неограниченно), но на шаге 4, начиная с некоторого $t = t_0 > 0$, может оказаться, что якобиан (14) обращается в нуль в некоторых точках (α, t) (они называются *фокальными*, а множества, образованные соответствующими точками $X(\alpha, t)$ в физическом пространстве – *каустиками*), и соответственно уравнение $X(\alpha, t) = x$ не имеет (во всяком случае, гладкого) решения, да и знаменатель в формуле (15) обращается в нуль. Таким образом, вблизи каустик записать асимптотическое решение в виде ВКБ не удастся. Канонический оператор, построенный более 50 лет назад В.П. Масловым [1], решает эту проблему следующим образом. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Если кривая Λ_t в какой-то своей части не проецируется диффеоморфно на ось x , то эта ее часть обязательно диффеоморфно проецируется на ось p , т.е. отличен от нуля якобиан $\tilde{J}(\alpha, t) = \partial P(\alpha, t)/\partial \alpha$ и уравнение $P(\alpha, t) = p$ имеет гладкое решение $\alpha = \alpha(p, t)$. Поэтому

(считая, что носитель амплитуды $A(\alpha, t)$ сосредоточен в указанной части кривой Λ_t) мы можем написать ВКБ-функцию

$$\tilde{\Psi}(p, t, h) = \frac{A(\alpha, t) e^{\frac{i}{h}(\tau(\alpha, t) - P(\alpha, t)X(\alpha, t))}}{\sqrt{|\tilde{J}(\alpha, t)|}} \Big|_{\alpha=\alpha(p, t)} \quad (17)$$

в импульсном представлении (т.е. как функцию от координаты p). Чтобы перейти от (17) к координатному представлению (т.е. к функции от x), заметим, что с точки зрения классической механики такой переход – это каноническое преобразование фазовой плоскости, задаваемое поворотом на угол $\pi/2$. В квантовой (волновой) механике возвращение к исходной координате x задается согласно В.А. Фоку [9] (и идеям П. Дирака [10]) соответствующим этому повороту квантованным каноническим преобразованием, которое оказывается обратным $1/h$ -преобразованием Фурье, и мы получаем

$$\Psi(x, t, h) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{K_p} \frac{A(\alpha, t) e^{\frac{i}{h}(px + \tau(\alpha, t) - P(\alpha, t)X(\alpha, t))}}{\sqrt{|\tilde{J}(\alpha, t)|}} \Big|_{\alpha=\alpha(p, t)} dp. \quad (18)$$

Формулы (15) и (18) являются локальными – они пригодны только тогда, когда носитель амплитуды A содержится в связной односвязной части многообразия Λ_t – *канонической карте* – в которой не обращается в нуль либо якобиан $J(\alpha, t)$ (*неособая карта*, формула (15)), либо якобиан $\tilde{J}(\alpha, t)$ (*особая карта*, формула (18)), и чтобы получить глобальное решение, надо с помощью разбиения единицы представить амплитуду в виде суммы членов с носителями в канонических картах и затем просуммировать соответствующие функции (15) и (18), умноженные на унимодулярные коэффициенты (фазовые множители), обеспечивающие с точностью до $O(h)$ совпадение функций (15) и (18) в случае амплитуды $A(\alpha, t)$, к которой эти формулы применимы одновременно. Такая сумма и называется *каноническим оператором Маслова* на Λ_t , примененным к амплитуде $A(\alpha, t)$, и обозначается через $[K_{\Lambda_t}^h A](x, t, h)$.

Замечание. Согласованный выбор фазовых множителей может интерпретироваться как “правильный” выбор аргументов якобианов $J(\alpha, t)$ и $\tilde{J}(\alpha, t)$ при извлечении квадратного корня и возможен только в том случае, когда на Λ_t выполнены *условия квантования*, тесно связанные с индексом Маслова [1], [11]. Эти условия выполнены или не выполнены на многообразиях Λ_t для всех t одновременно, поскольку эти многообразия получаются друг из друга сдвигом вдоль гамильтонова потока. Таким образом, все сводится к тому, выполнены ли условия квантования на начальном многообразии Λ_0 (это отличительная черта задачи Коши). Они заведомо выполнены для многообразия Λ_0 , построенного по функции $S_0(x)$, поскольку оно покрывается единственной (неособой) картой, так что выбор фазовых множителей тривиален. Мы не будем обсуждать здесь условия квантования более подробно, поскольку вопрос решается тривиальным образом и для основного интересующего нас начального условия (2).

В n -мерном случае, кроме чисто координатного и чисто импульсного представления, существуют *смешанные координатно-импульсные представления* (или *канонические карты*), в которых по части степеней свободы используются координаты x_j , а по всем остальным – импульсы p_j ; например, в трехмерном случае возможные наборы координат в канонических картах исчерпываются восемью вариантами (x_1, x_2, x_3) , (p_1, x_2, x_3) , (x_1, p_2, x_3) , (x_1, x_2, p_3) , (p_1, p_2, x_3) , (p_1, x_2, p_3) , (x_1, p_2, p_3) , (p_1, p_2, p_3) . Формулы, аналогичные (18), включают интегрирование по всем импульсным переменным, входящим в набор координат соответствующей канонической карты. Кратко такой набор координат будем обозначать через (x', p'') .

Итак, в общем случае шаг 4 заменяется на следующий:

Шаг 4". С помощью разбиения единицы представить амплитуду $A(\alpha, t)$ как сумму слагаемых с носителями в канонических картах, для каждого из слагаемых выразить функции $\tau(\alpha, t)$, $A(\alpha, t)$, $J(\alpha, t)$ через координаты (x', p'') соответствующей канонической карты, составить в этих координатах ВКБ-функцию, аналогичную (17), и применить к ней обратное $1/h$ -преобразование Фурье от переменных p'' к переменным x'' .

Наконец, можно отказаться от предположения, что Λ_0 целиком состоит из одной неособой карты – начальное условие при $t = 0$ можно задавать каноническим оператором на лагранжевом многообразии Λ_0 общего вида (лишь бы на нем были выполнены условия квантования).

В ситуации, когда в задаче имеется не один, а несколько эффективных гамильтонианов $\lambda_j(x, p)$, $j = 1, \dots, k$, схема описанного выше алгоритма построения асимптотического решения задачи Коши в целом сохраняется, но сам алгоритм несколько усложняется в том отношении, что теперь начальное лагранжево многообразие Λ_0 следует сдвигать по траекториям гамильтоновых систем всех k эффективных гамильтонианов. Асимптотическое решение в момент времени $t > 0$ имеет вид суммы k слагаемых, задаваемых каноническим оператором Маслова на каждом из соответствующих лагранжевых многообразий Λ_t^j , $j = 1, \dots, k$. Уравнения переноса также приобретают несколько более сложный вид (см. [3, с. 201–231]).

4. ЭФФЕКТИВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

В конкретных задачах шаги 1–3 описанного в предыдущем разделе алгоритма построения асимптотического решения задачи Коши обычно опираются лишь на аналитические вычисления и на численное решение гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и потому допускают эффективную реализацию в том смысле, как это указано во введении. Шаг 4", напротив, приводит к затруднениям, связанным с тем, что стандартные наборы координат (x', p'') в канонических картах не являются естественными в рассматриваемой задаче и переход к ним с последующим интегрированием по переменным p'' оказывается весьма громоздким и эффективно не реализуется (не говоря уже о том, что потребное для решения задачи количество канонических карт может превосходить все разумные пределы). В статьях [12] и затем [4], [13] был предложен принципиально новый подход к построению и вычислению канонического оператора, основанный на том, что на лагранжевом многообразии выбираются некоторые естественные в рассматриваемой задаче координаты α , которые затем разделяются на две группы, $\alpha = (\alpha', \alpha'')$; далее переменные α' подходящим образом выражаются через (все) переменные x и α'' , и вместо интегрирования по импульсам используется интегрирование по переменным α'' . При этом наборы (α', α'') часто оказываются одними и теми же в канонических картах с разными стандартными координатами (x', p'') , что может значительно сократить число используемых областей (карт), покрывающих лагранжево многообразие, и привести к кардинальным упрощениям в практических вычислениях. Еще одно важное преимущество перехода к новому определению канонического оператора в особых картах состоит в возможности его обобщения на случай негладких лагранжевых многообразий, т.е. многообразий с нестандартными лагранжевыми сингулярностями (каустиками) нового типа. Именно такого рода лагранжевы многообразия встречаются в рассматриваемых далее задачах. При этом в задачах, где имеются большими головные волны, передние фронты суть как раз такие "нестандартные" каустики.

Приведем теперь новые формулы из [4], [13], ограничиваясь двумерным случаем ($n = 2$).

1. Исходные данные. Пусть двумерное лагранжево многообразие Λ в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{(x,p)}^4$, $x = (x_1, x_2)$, $p = (p_1, p_2)$, задано в некоторой своей части параметрическими уравнениями $\Lambda = \{x = X(\alpha), p = P(\alpha)\}$, где x , p , $X(\alpha)$, $P(\alpha)$ – вектор-столбцы, а координаты $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, которые нам иногда будет удобнее обозначать через (ρ, ϕ) , пробегает некоторую область пространства \mathbb{R}^2 . Предположим также, что da снабжено мерой (невырожденной формой объема) $d\mu = \mu(\alpha)d\alpha_1 \wedge d\alpha_2$. Мы хотим определить канонический оператор K_Λ^h на функциях $A(\alpha)$ с носителем в окрестности \mathcal{V} (вообще говоря, но не обязательно, достаточно малой) заданной точки $\alpha_0 = (\rho_0, \phi_0)$. Область \mathcal{V} будем отождествлять с соответствующей областью на Λ и называть *картой*.

2. Дополнительные предположения и фиксация постоянных. Будем предполагать, что уравнение Пфаффа $d\tau(\alpha) = P(\alpha)dX(\alpha)$ имеет в карте \mathcal{V} однозначное решение (которое тогда определено с точностью до аддитивной постоянной). Далее, предположим, что индекс Маслова любого замкнутого пути, целиком лежащего в \mathcal{V} , равен нулю. (Оба предположения заведомо выполнены, если карта \mathcal{V} односвязна, но мы хотим иметь возможность рассматривать карты, диффеоморфные кольцу, в которых одна из координат – ϕ – пробегает окружность.) Зафиксируем какое-либо

вещественное решение $\tau(\alpha)$ уравнения Пфаффа (*действие*) и целое число m , которое назовем *индексом* карты \mathcal{V} .

3. Тип точки α_0 и тип карты. Рассмотрим матрицу Якоби $X_\alpha(\alpha_0)$. Она может быть невырожденной, иметь один линейно независимый столбец или быть нулевой матрицей. Соответственно карта \mathcal{V} будет неособой, особой ранга 1 или особой ранга 2. Разберем все три случая последовательно.

4. Неособая карта. В этом случае $\det X_\alpha(\alpha_0) \neq 0$. Будем предполагать, что $\det X_\alpha(\alpha) \neq 0$ в \mathcal{V} и на образе \mathcal{W} области \mathcal{V} при отображении $\alpha \mapsto X(\alpha)$ определено обратное отображение $\alpha = \alpha(x)$ – решение неявного уравнения $X(\alpha) = x$. Канонический оператор задается формулой

$$[K_\Lambda^h A](x) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}m + \frac{i}{h}\tau(\alpha(x))} A(\alpha(x))}{|\det X_\alpha(\alpha(x))|^{1/2}}, \quad A \in C_0^\infty(\mathcal{V}), \quad (19)$$

т.е. совпадает с обычным ВКБ-элементом – в неособой карте новые формулы от старых не отличаются. Формулы в особых картах используют *универсальную фазовую функцию*

$$\Phi(x, \alpha) = \tau(\alpha) + \langle P(\alpha), x - X(\alpha) \rangle$$

(впрочем, можно считать, что она же использована и в (19), поскольку $\Phi(x, \alpha(x)) = \tau(\alpha(x))$).

5. Особая карта ранга 1. В этом случае $\text{rank } X_\alpha(\alpha_0) = 1$. Будем обозначать α через (ρ, ϕ) и предположим, что в карте \mathcal{V} отличны от нуля функции $X_\phi(\rho, \phi)$ и $\det Q(\rho, \phi)$, где

$$Q(\rho, \phi) = \left(X_\phi(\rho, \phi) \ P_\rho(\rho, \phi) - \frac{\langle X_\phi(\rho, \phi), X_\rho(\rho, \phi) \rangle}{X_\phi(\rho, \phi)^2} P_\phi(\rho, \phi) \right).$$

Определим функцию $\phi = \phi(x, \rho)$ из уравнения $\langle X_\phi(\rho, \phi), x - X(\rho, \phi) \rangle = 0$. Локально оно разрешимо по теореме о неявной функции, так как производная левой части по ϕ на ее нулях равна $-X_\phi^2 \neq 0$. Предполагается, что область \mathcal{V} выбрана так, что существует глобальное однозначное решение этого уравнения в области $\{(x, \rho) \mid x = X(\rho, \phi) \text{ для некоторого } \phi, \text{ такого, что } (\rho, \phi) \in \mathcal{V}\}$. Канонический оператор задается формулой

$$[K_\Lambda^h A](x) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{2}m}}{(2\pi h)^{1/2}} \int_{\phi=\phi(x, \rho)} \left[e^{\frac{i}{h}\Phi(x, \rho, \phi)} \frac{|\mu(\rho, \phi) \det Q(\rho, \phi)|^{1/2}}{X_\phi(\rho, \phi)} A(\rho, \phi) \right] d\rho, \quad A \in C_0^\infty(\mathcal{V}). \quad (20)$$

6. Особая карта ранга 2. В этом случае канонический оператор задается формулой

$$[K_\Lambda^h A](x) = \frac{e^{\frac{i\pi(1-m)}{2}}}{2\pi h} \iint e^{\frac{i}{h}\Phi(x, \alpha)} |\mu(\alpha) \det P_\alpha(\alpha)|^{1/2} A(\alpha) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (21)$$

(в которой нетрудно, но отнюдь не всегда имеет смысл перейти к интегрированию по переменным $p = (p_1, p_2)$).

7. Представление начальных условий (2) с помощью канонического оператора. Начальные условия (2) могут быть представлены с помощью канонического оператора на “вертикальном” лагранжевом многообразии $\Lambda_0(\xi) = \{(x, p) : x = \xi, p = \alpha \text{ для некоторого } \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ с мерой $d\mu = da_1 \wedge \dots \wedge da_n$. Именно, обозначим через

$$\tilde{V}(\alpha) = \frac{e^{i\pi n/4}}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\alpha y} V(y) dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

обычное (без параметра h) преобразование фурье-функции $V(y)$, и пусть $\tilde{V}_\delta(\alpha) = \tilde{V}(\alpha/\delta)$, где $\delta = h/\mu \leq 1$. Тогда

$$V\left(\frac{x - \xi}{\mu}\right) = \mu^{n/2} [K_{\Lambda_0(\xi)}^h \tilde{V}_\delta](x). \quad (22)$$

5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА И ФОРМУЛА ВАН ФЛЕКА

Для уравнения Шрёдингера $-i\hbar\psi_t - \hbar^2\Delta\psi/2 + v(x)\psi = 0$ с потенциалом $v(x)$, удовлетворяющим условию $\|v_{xx}(x)\| \leq C$ с некоторой постоянной C для всех $x \in \mathbb{R}^n$, построим для малых $t > 0$ асимптотическое решение задачи Коши с начальными условиями $\psi|_{t=0} = V((x - \xi)/h)$, которые представим в форме (22) (при $\delta = 1$). Решение $(X(\alpha, t), P(\alpha, t))$ системы Гамильтона $\dot{x} = p$, $\dot{p} = -v_x(x)$ с начальными условиями $X(\alpha, 0) = \xi$, $P(\alpha, 0) = \alpha$ существует при всех t , а при $t \rightarrow 0$ равномерно по $\alpha \in \mathbb{R}^n$ справедлива асимптотика $\det X_\alpha(\alpha, t) = t^n(1 + O(t))$ (в чем нетрудно убедиться, изучая систему в вариациях), так что при достаточно малых $t > 0$ многообразие $\Lambda_t = \{(x, p): X = X(\alpha, t), P = P(\alpha, t) \text{ для некоторого } \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ диффеоморфно проектируется на физическое пространство \mathbb{R}_x^n . Таким образом, при этих t функция ψ_t , которая получается применением канонического оператора на многообразии Λ_t с мерой $d\mu = d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_n$ к амплитуде $\tilde{V}(\alpha)$, может быть представлена в форме ВКБ-решения (19):

$$\psi(x, t) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\tau(\alpha(x, t))} \tilde{V}(\alpha(x, t))}{\sqrt{\det X_\alpha(\alpha(x, t), t)}}, \quad \text{где} \quad \tau(\alpha, t) = \int_0^t \left[\frac{1}{2} P^2(\alpha, \zeta) - v(X(\alpha, \zeta)) \right] d\zeta, \quad (23)$$

а $\alpha = \alpha(x, t)$ – решение системы уравнений $x = X(\alpha, t)$. Формально в пределе при $\tilde{V} \rightarrow 1$ формула (23) переходит в асимптотику функции Грина для уравнения Шрёдингера и известна в квантовой механике как *формула Ван Флека*. Формула (23) справедлива лишь при малых $t > 0$; далее уже в простых примерах с линейным и квадратичным потенциалом обязательно появляются фокальные точки и каустики, и приходится использовать интегральные представления. Заметим, что для уравнения Шрёдингера можно построить поправки любой степени по параметру \hbar (т.е. написать асимптотический ряд по параметру \hbar) и доказать, что построенная функция приближает точное решение также с любой заданной степенной точностью по параметру \hbar .

6. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Асимптотическое решение изучим на примере задачи Коши для волнового уравнения (4):

$$-h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h^2 \langle \nabla, c^2(x) \nabla u \rangle = 0, \quad u|_{t=0} = V\left(\frac{x}{h}\right), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Эффективные гамильтонианы $\lambda_\pm(x, p) = \pm H(x, p)$, где $H(x, p) = c(x)|p|$, как это обычно и бывает для гиперболических уравнений, однородны первой степени по импульсному переменным p и вследствие этого имеют особенность при $p = 0$. Поэтому начальное лагранжево многообразие $\Lambda_0 = \Lambda_0(0)$ разумно записать в полярных координатах (ρ, ϕ) как $\Lambda_0 = \{(x, p): x = 0, p = \rho \mathbf{n}(\phi) \text{ для некоторых } \rho \geq 0, \phi \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$, где $\mathbf{n}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)^\top$. Мера при этом имеет вид $d\mu = \rho d\rho d\phi$. Решения $(X^\pm(\rho, \phi, t), P^\pm(\rho, \phi, t))$ гамильтоновых систем

$$\dot{x} = \pm c(x) \frac{p}{\rho}, \quad \dot{p} = \mp \frac{\partial c}{\partial x}(x) p, \quad x|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = \rho \mathbf{n}(\phi) \quad (24)$$

обладают в силу однородности следующим замечательным свойством: если $(X(\phi, t), P(\phi, t))$ – решение системы (24) с верхними знаками при $\rho = 1$, тогда $X^+(\rho, \phi, t) = X(\phi, t)$, $P^+(\rho, \phi, t) = \rho P(\phi, t)$, $X^-(\rho, \phi, t) = X(\phi + \pi, t)$, $P^-(\rho, \phi, t) = -\rho P(\phi + \pi, t)$. Пусть $\Lambda_t^\pm = \{(x, p): x = X^\pm(\rho, \phi, t), p = P^\pm(\rho, \phi, t) \text{ для некоторых } \rho \geq 0, \phi \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$. Эти лагранжевы многообразия гомеоморфны полуцилиндрам и имеют лежащий в плоскости x -координат общий край $\gamma_t = \{(x, p): p = 0, x = X(\phi, t) \text{ для некоторого } \phi\}$. Кривая γ_t определяет фронт решения, которое, согласно общим свойствам канонического оператора, оказывается локализованным в ее окрестности. Тем самым γ_t можно считать каустикой специального типа. Кривая γ_t может не быть гладкой; точки ее негладкости препятствуют сшиванию многообразий Λ_t^\pm в единое гладкое лагранжево многообразие Λ_t .

Воспользуемся изложенным в разд. 3 алгоритмом решения задачи Коши в сочетании с новыми интегральными формулами из разд. 4. Так как $X_\rho(\phi, t) = 0$, то $\det X_{\rho\phi}(\phi, t) \equiv 0$, и все многообразия Λ_t^\pm целиком состоят из фокальных точек. Ранг матрицы $X_{\rho\phi}(\phi, t)$ равен единице, если $X_\phi(\phi, t) \neq 0$, и нулю в противном случае, который соответствует “точкам поворота” на γ_t . Рассмотрим окрестности точек, в которых $X_\phi \neq 0$ (особые карты ранга 1). Пользуясь формулами из разд. 4 и учитывая тот факт, что слагаемые в асимптотике, отвечающие знакам + и -, суть комплексно-сопряженные функции, получаем главный член асимптотики в виде

$$u = \sqrt{\frac{hc(0)}{2\pi c(x)|X_\phi|}} \operatorname{Re} \left(e^{-ip/4 - ipm/2} \int_0^\infty \sqrt{\rho} e^{\frac{i\rho}{h} \langle P(\phi, t), x - X(\phi, t) \rangle} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\phi)) d\rho \right)_{\phi=\phi(x,t)}, \quad (25)$$

где $\phi(x, t)$ – решение уравнения $\langle X_\phi(\phi, t), x - X(\phi, t) \rangle = 0$, а m – индекс Морса траектории, приходящей точку с координатой $\phi(x, t)$ на фронте γ_t .

Формулу эту можно упростить для случая источника (6). Если поворотом на угол θ матрица B приводится к диагональной матрице с элементами (b_1, b_2) , то функцию (25) можно представить в виде

$$u = \frac{\sqrt{h}}{|X_\phi(\phi, t)|^{1/2} (c(X(\phi, t)))^{1/2}} \operatorname{Re} \left[e^{-i\pi m/2} F\left(\frac{S(x, t)}{h}, \psi\right) \right]_{\phi=\phi(x,t)},$$

где $y(\phi, x)$ – альтернированное расстояние от точки $X(\phi, t)$ до фронта γ_t , $S(x, t) = \frac{c(x^0)}{c(x)} y(x, t)$ и

$$F(z, \psi) = \frac{Ae^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{2}b_1b_2} \left(\left(\frac{\cos^2(\psi - \theta)}{b_1^2} + \frac{\sin^2(\psi - \theta)}{b_2^2} \right)^{1/2} - iz \right)^{-3/2}.$$

Приведем теперь формулы для главного члена асимптотики в окрестности точек фронта, в которых $X_\phi(t, \phi) = 0$ (особые карты ранга 2). Будем обозначать через $\phi = \phi^*(t)$ значение параметра ϕ , для которого справедливо последнее равенство, а также положим $x^*(t) = X(t, \phi^*(t))$. Тогда согласно общим формулам главный член асимптотического решения в окрестности точки $x^*(t)$ представляется в виде

$$u = \frac{1}{2\pi h} \operatorname{Re} \left(e^{-\frac{\pi i m}{2}} \int_{R^2} \rho e^{\frac{i\rho \langle P(\phi, t), x - X(\phi, t) \rangle}{h}} \sqrt{|\det(P, P_\phi)|} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\phi)) \mathbf{e}(\phi - \phi^*(t)) d\rho d\phi \right). \quad (26)$$

Здесь $\mathbf{e}(y)$ – гладкая срезающая функция, равная единице в некоторой окрестности точки $y = 0$ и нулю вне некоторой немного большей окрестности. Если ограничиться ситуациями “общего положения”, т.е. (1) $X_\phi(\phi^*(t)) = 0$, $X_{\phi\phi}(\phi^*(t)) \neq 0$ (2) $X_\phi(\phi^*(t)) = X_{\phi\phi}(\phi^*(t)) = 0$, $X_{\phi\phi\phi}(\phi^*(t)) \neq 0$, то в окрестности радиуса $O(h^\delta)$, $\delta \sim h^{1/3}$, точки $x^*(t)$ формулу (26) можно упростить, заменив $\langle P(t, \phi), x - X(t, \phi) \rangle$ на ее разложение по степеням разности $\phi - \phi^*(t)$ до $O((\phi - \phi^*(t))^3)$ в случае (1) и до $O((\phi - \phi^*(t))^4)$ в случае (2). Тогда можно представить функцию (26) в виде одномерного интеграла с ядром в виде функции Эйри $\operatorname{Ai}(z)$ в случае (1):

$$u = \sqrt[3]{2h} \frac{\sqrt{|\det(P^*, P_\phi^*)|}}{\sqrt[3]{|\langle P_\phi^*, X_{\phi\phi}^* \rangle|}} \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{i\pi m}{2}} \int_h^\infty \rho^{2/3} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\phi)) e^{\frac{i\rho \langle P_\phi^*(t), x - X^*(t) \rangle}{h}} \operatorname{Ai} \left(-\left(\frac{\rho}{h}\right)^{2/3} \frac{\langle P^*(t), x - X^*(t) \rangle}{\langle P_\phi^*, X_{\phi\phi}^* \rangle} \right) d\rho \right]$$

и функций Пирси

$$P^\pm(v, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(zs + vs^2 \pm s^4)} ds$$

в случае (2):

$$u = \sqrt[4]{24h} \frac{\sqrt{|\det(P_\phi^*, P_\phi^*)|}}{\sqrt[4]{|\langle P_\phi^*, X_{\phi\phi\phi}^* \rangle|}} \operatorname{Re} \left[e^{\frac{-im}{2}} \int_p^\infty \rho^{3/4} \tilde{V}(\rho n(\phi)) e^{\frac{i\rho \langle P_\phi^*(t), x - X^*(t) \rangle}{h}} \times \right. \\ \left. \times P^\pm \left[\sqrt{6} \sqrt{\frac{\rho}{h}} \frac{\langle P_\phi^*(t), x - X^*(t) \rangle}{\sqrt{|\langle P_\phi^*, X_{\phi\phi\phi}^* \rangle|}}, \sqrt[4]{24} \left(\frac{\rho}{h}\right)^{3/4} \frac{\langle P_\phi^*(t), x - X^*(t) \rangle}{\sqrt[4]{|\langle P_\phi^*, X_{\phi\phi\phi}^* \rangle|}} \right] d\rho \right].$$

Здесь знак + выбирается, когда $\langle P_\phi^*, X_{\phi\phi\phi}^* \rangle < 0$, и знак –, когда $\langle P_\phi^*, X_{\phi\phi\phi}^* \rangle > 0$.

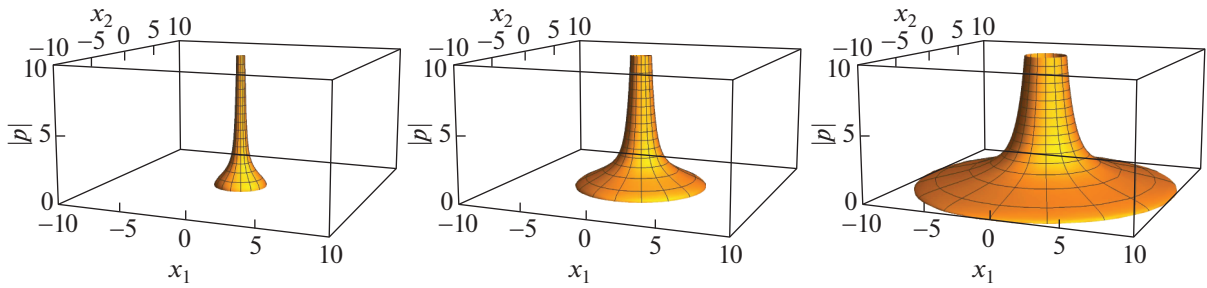
В отличие от уравнения Шрёдингера, для волнового уравнения с переменными коэффициентами поправки более высокого порядка по параметру h , основанные на характеристиках (траекториях системы Гамильтона) построить нельзя в силу пересечения характеристик при $p = 0$. Окрестности точки $p = 0$ соответствуют (“очень”) длинные волны, которые не улавливаются приближением геометрической оптики. Поэтому их следует рассматривать отдельно. Достаточно общий подход к этой проблеме, основанный на использовании интегральных уравнений типа Фредгольма, изложен в [2], в одномерном случае определение этой части решения, как недавно показано в [14], может быть сведено к задаче Гурса. Во всех случаях указанная часть решения вносит вклад $O(h^n)$, где n – размерность физического пространства, и оказывается малой поправкой к главному члену асимптотики (см. [15]).

Подобные формулы можно написать и для гиперболических систем, включая задачи в 3-х и n -мерных ситуациях. В частности, случай трехмерного волнового уравнения изучен в [16]. Сюда, в частности, относятся линейризованная система уравнений мелкой воды, линейризованные уравнения Эйлера и линейризованные уравнения Навье–Стокса с малой вязкостью, уравнения магнитной гидродинамики, уравнения Максвелла и т.д. Разумеется, здесь могут возникнуть асимптотические решения с совершенно другим поведением. Например, у системы уравнений мелкой воды дополнительно к $H^\pm = \pm c(x)|p|$ появляется еще один эффективный гамильтониан $H^0 = \langle p, V(x, t) \rangle$, описывающий движение по потоку со скоростью $V(x, t)$ локализованных вихрей малой амплитуды. При этом хотя, в отличие от H^\pm функция H^0 – гладкая, амплитуда в асимптотике при $p = 0$ имеет негладкий сомножитель вида $|p|$ и по этой причине также нужно применять новые интегральные представления для канонического оператора. В более сложных ситуациях возникают дополнительные трудности, связанные с негладким пересечением характеристик, возникающие на множествах в фазовых пространствах, отличных от $|p| = 0$. Такие ситуации требуют отдельных, как правило, нетривиальных исследований, которые могут привести к корректировке структуры асимптотических решений. При этом асимптотические конструкции здесь скорее всего привязаны к узким классам задач, выделяемым разумными физическими условиями.

7. УРАВНЕНИЯ С ДИСПЕРСИЕЙ

При наличии дисперсии эффективные гамильтонианы не являются однородными функциями переменных p первой степени. Если они и соответствующие собственные векторы матрицы \mathcal{H} гладко зависят от p , то для построения асимптотического решения (по крайней мере, формального) можно применять схему, изложенную выше для уравнения Шрёдингера. В качестве примера, когда эффективные гамильтонианы негладкие, рассмотрим задачу Коши с локализованными начальными данными для линейного псевдодифференциального уравнения $h^2 u_t = \widehat{\mathcal{H}} u$, описывающего гравитационные волны на поверхности жидкости в бассейне с переменным дном. Символ оператора $\widehat{\mathcal{H}}$ в этом случае имеет вид (5), и эффективные гамильтонианы определяются формулой

$$H^\pm = \pm \sqrt{g|p| \tanh(D(x)|p|)},$$



Фиг. 1. Лагранжева поверхность с краем в осях $x_1, x_2, |p|$ [22, с. 314, фиг. 1].

где g – ускорение свободного падения, а $D(x) > 0$ – гладкая функция, описывающая дно бассейна. При малых p имеем

$$H^\pm = c(x)|p|(1 + p^2 f(p^2)),$$

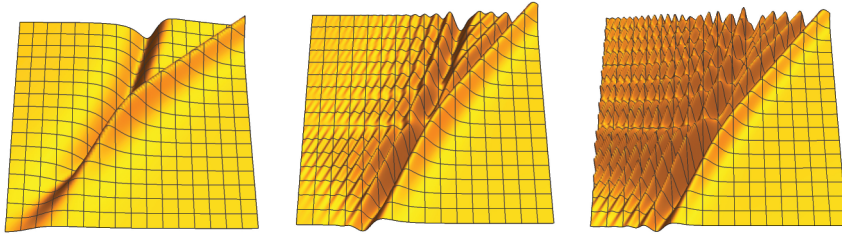
где $f(z)$ – гладкая функция, и для длинных волн рассматриваемое уравнение переходит в волновое уравнение. Параметр h характеризует медленность изменения дна. Начальные мы выбираем локализованными, но здесь дополнительно к параметру h целесообразно ввести еще один малый параметр $\mu \geq h$, характеризующий размер начального возмущения: $u|_{t=0} = V(x/\mu), u_t|_{t=0} = 0$. Физический смысл параметров μ и h детально обсуждается, например, в [17], [18], при этом характер поведения решения зависит от соотношения между этими параметрами. Лагранжево многообразие теперь проектируется на двумерную область, ограниченную замкнутой кривой, вообще говоря, негладкой, и которая совпадает с введенным в разд. 6 фронтом γ_t “предельного” волнового уравнения со скоростью $c = \sqrt{gD}$. Для постоянного дна $D = \text{const}$ соответствующие многообразия

$$\Lambda_t^\pm = \left\{ p = \alpha \equiv \rho \mathbf{n}(\phi), x = \pm g t \mathbf{n} \frac{\partial \sqrt{\rho \tanh(D\rho)}}{\partial \rho} \right\}$$

диффеоморфны дискам с выколотой (бесконечно удаленной точкой) $|p| = \infty, x = 0$ и границей $\Gamma_t^\pm \equiv \Gamma_t\{p = 0, |x| = ct\}$ (см. фиг. 1). Кривая γ_t теперь определяет *передний фронт* волны и представляет собой движущуюся каустику нестандартного типа. Носитель асимптотического решения при $\mu \ll 1$ находится в области, ограниченной кривой γ_t . *Важно подчеркнуть, что прообразы Γ_t^\pm переднего фронта γ_t на Λ_t^\pm попадает на множество пересечений характеристик, задаваемых эффективными гамильтонианами H^\pm .* Вне окрестности кривой γ_t можно использовать стандартные формулы для канонического оператора, но в окрестности γ_t – наиболее интересной с точки зрения приложений области, нужно использовать новые интегральные представления. Соответствующие формулы (включая пример функции V вида (6)) приведены в работах [19]–[22], здесь мы кратко опишем их структуру. Если ввести параметр $\delta = h/\mu$, то эти формулы совпадут с (25), (26), если в них ввести множитель $1/\delta^2$ и заменить $\tilde{V}(\rho \mathbf{n})(\phi)$ на

$$\tilde{V}\left(\frac{\rho \mathbf{n}(\phi)}{\delta}\right) \exp\left(i \frac{\rho^3 D^{3/2}(0)}{6h} \int_0^t D(X(\phi, \zeta)) d\zeta\right).$$

Поведение решения рассматриваемой задачи в зависимости от соотношения между параметрами описано в упоминавшихся работах. Кратко сформулируем основные выводы (см. фиг. 2). При $\mu \gg h^{2/3}$ мы имеем длинноволновое приближение, дисперсионные эффекты практически не играют роли и асимптотика решения локализована в окрестности γ_t и такая же, как и в случае волнового уравнения. Если $\mu \sim h^{2/3}$, то дисперсия оказывается слабой, у решения имеется головная волна, которая локализована в окрестности переднего фронта, и имеется хвост из осцилляций меньшей амплитудой, также быстро убывающий при отдалении от γ_t . При $\mu \sim h$ дисперсионные эффекты становятся сильными, амплитуды осцилляций внутри области возрастают и



Фиг. 2. Складки в случае нулевой, слабой и сильной дисперсии [24, с. 550, фиг. 2, 3, 4].

максимум волновой амплитуды перемещается от γ_t внутрь области, ограниченной γ_t . При этом максимальная амплитуда возбуждаемых волн при увеличении дисперсии в заданный момент времени существенно уменьшается.

Наконец, кратко опишем результаты, касающиеся асимптотического решения задачи Коши с локализованными начальными данными для двумерного уравнения Дирака для графена с линейным потенциалом [23]. Эффективные гамильтонианы в этом случае равны $H^\pm = \pm|p| + U(x)$ и при $p = 0$ также имеет место эффект негладкого пересечения характеристик. В этой ситуации проекции соответствующих лагранжевых многообразий лежат внутри окружности $\gamma_t = \{|x| = t\}$, однако прообразы Γ_t^\pm кривых γ_t на соответствующих многообразиях множества Λ_t^\pm не совпадают с множеством, где многообразия Λ_t^\pm становятся негладкими, и с множеством пересечения характеристик. Тем не менее и в этом случае в [23] показано, что главный член асимптотики решения определяется с помощью модифицированного канонического оператора (разд. 4) по алгоритму из разд. 3.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгоритм, изложенный в разд. 3, позволяет строить асимптотические решения задачи Коши с локализованными начальными условиями для широкого класса дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с вещественными характеристиками. В приложениях особенно интересен главный член асимптотики. В этой ситуации конструкции из разд. 3 приводят к достаточно эффективным формулам при использовании подходящих модификаций канонического оператора Маслова. Это было продемонстрировано для случая гиперболических уравнений и уравнений со слабой дисперсией в работе Доброхотова, Тироци и Шафаревича [25] и в недавних работах Назайкинского и Шафаревича [26] и Грушина, Доброхотова и Сергеева [27], а для уравнений с сильной дисперсией в случае постоянных коэффициентов – в статье Доброхотова, Секерж-Зеньковича и Толченникова [22]. Для случая переменных коэффициентов в уравнениях волн на воде с сильной дисперсией соответствующая публикация готовится авторами к печати (с теоретической точки зрения эта задача была рассмотрена Доброхотовым и Жевандровым в статье [28], однако, для получения окончательных эффективных формул из полученных в той статье результатов нужно еще проделать сложные вычисления, связанные с методом стационарной фазы). Мы отсылаем читателя к цитированной литературе за дальнейшими подробностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
2. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
3. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
4. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И. Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах // Изв. РАН, Сер. матем. 2017. Т. 81. № 2. С. 53–96.
5. Назайкинский В.Е., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Методы некоммутативного анализа. М.: Техносфера, 2002.
6. Маслов В.П., Карасев М.В. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.

7. *Belov V.V., Dobrokhotov S. Yu., Tudorovskiy T. Ya.* Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics // *J. Engng. Math.* 2006. V. 55. № 1–4. P. 183–237.
8. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987.
9. *Фок В.А.* О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике // *Вестн. ЛГУ.* 1959. № 16. С. 67–70.
10. *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960.
11. *Арнольд В.И.* О характеристическом классе, входящем в условия квантования // *Функц. анализ и его прил.* 1967. Т. 1. № 1. С. 1–14.
12. *Доброхотов С.Ю., Макракус Г.Н., Назайкинский В.Е., Тудоровский Т.Я.* Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках // *Теор. и матем. физ.* 2013. Т. 177. № 3. С. 355–386.
13. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И.* Канонический оператор Маслова в произвольных координатах лагранжева многообразия // *Докл. АН.* 2016. Т. 466. № 6. С. 641–644.
14. *Allilueva A.I., Shafarevich A.I.* Localized asymptotic solutions of the wave equation with variable velocity on the simplest graphs // *Russ. J. Math. Phys.* 2017. V. 24, № 3. P. 279–289.
15. *Доброхотов С.Ю., Жевандров П.Н., Маслов В.П., Шафаревич А.И.* Асимптотические быстроубывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами // *Матем. заметки.* 1991. Т. 49. № 4. С. 31–46.
16. *Аллилуева А.И., Доброхотов С.Ю., Сергеев С.А., Шафаревич А.И.* Новые представления канонического оператора Маслова и локализованные асимптотические решения строго гиперболических систем // *Докл. АН.* 2015. Т. 464. № 3. С. 261–266.
17. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Асимптотики волновых и вихревых локализованных решений линейризованных уравнений мелкой воды // В сб.: *Актуальные проблемы механики, посвященном 50-летию Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.* М.: Наука, 2015. С. 98–139.
18. *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V.E.* Asymptotic localized solutions of the shallow water equations over a non-uniform bottom // *AIP Conference Proceedings* 2048, 040026 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5082098>
19. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Проколотые лагранжевы многообразия и асимптотические решения линейных уравнений волн на воде с локализованными начальными условиями // *Матем. заметки.* 2017. Т. 101. № 6. С. 936–943.
20. *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V.E.* Propagation of a linear wave created by a spatially localized perturbation in a regular lattice and punctured Lagrangian manifolds // *Russ. J. Math. Phys.* 2017. V. 24. № 1. P. 127–133.
21. *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V.E., Tolchennikov A.A.* Asymptotics of the solution of the Cauchy–Poisson problem for linear equations of waves in water with localized initial conditions near the focal points on the leading edge // *Russ. J. Math. Phys.* 2017. V. 24. № 4. P. 542–550.
22. *Dobrokhotov S. Yu., Sekerzh-Zen'kovich S. Ya., Tolchennikov A.A.* Exact and asymptotic solutions of the Cauchy–Poisson problem with localized initial conditions and a constant function of the bottom // *Russ. J. Math. Phys.* 2017. V. 24. № 2. P. 310–321.
23. *Dobrokhotov S. Yu., Tolchennikov A.A.* Solution of the two-dimensional Dirac equation with a linear potential and a localized initial condition // *Russ. J. Math. Phys.* 2019. V. 26. № 2. P. 139–151.
24. *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V.E., Tolchennikov A.A.* Asymptotics of linear water waves generated by a localized source near the focal points on the leading edge // *Russ. J. Math. Phys.* 2017. V. 24. № 4. P. 544–552.
25. *Доброхотов С.Ю., Тироци Б., Шафаревич А.И.* Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова // *Матем. заметки.* 2007. Т. 82. № 5. С. 792–796.
26. *Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И.* О каноническом операторе Маслова в задачах о локализованных асимптотических решениях гиперболических уравнений и систем // *Матем. заметки.* 2019. Т. 106. № 3. С. 424–435.
27. *Грушин В.В., Доброхотов С.Ю., Сергеев С.А.* Осреднение и дисперсионные эффекты в задаче о распространении волн, порожденных локализованным источником // *Тр. МИАН.* 2013. Т. 281. С. 170–187.
28. *Доброхотов С.Ю., Жевандров П.Н.* Нестандартные характеристики и операторный метод Маслова в линейных задачах о неустановившихся волнах на воде // *Функц. анализ и его прил.* 1985. Т. 19. № 4. С. 43–54.