ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 8, с. 1377–1382

УДК 517.957

ОТСУТСТВИЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ[1)]

© 2020 г. Е. И. Галахов[1,*], О. А. Салиева[2,]**

[1] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

[2] 127994 Москва, ГСП-4, Вадковский пер., 1, МГТУ "Станкин", Россия

**e-mail: egalakhov@gmail.com*

***e-mail: olga.a.salieva@gmail.com*

Поступила в редакцию 15.02.2020 г.
Переработанный вариант 15.02.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

В статье рассматриваются нелинейные эллиптические неравенства в ограниченных областях и системы таких неравенств, содержащие слагаемые, зависящие различным образом от положительной и отрицательной частей искомой функции. Получены достаточные условия отсутствия нетривиальных решений исследуемых неравенств и систем в соответствующих функциональных классах. Библ. 5.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические неравенства, положительная и отрицательная часть, нетривиальные решения, пробные функции.

DOI: 10.31857/S0044466920080086

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние десятилетия появилось большое количество работ о достаточных условиях отсутствия нетривиальных (отличных от тождественного нуля или другой константы п.в.) решений нелинейных неравенств в соответствующих функциональных классах. Метод исследования этой проблемы, основанный на использовании пробных функций специального вида, был предложен С.И. Похожаевым [1] и развит в его совместных работах с Э. Митидиери, В. Галактионовым и другими авторами (см., в частности, монографии [2], [3]), а также в статьях авторов настоящей работы (см. [4], [5] и библиографию там).

Метод основан на специальном выборе так называемых пробных функций в некоторой слабой формулировке рассматриваемой задачи (см. далее), причем этот выбор зависит не только от структуры рассматриваемого оператора и нелинейности, но и от функционального класса, в котором ищется решение. Точнее, в качестве типичного семейства пробных функций для квазилинейного стационарного дифференциального неравенства в рамках метода, как правило, выбирается $\varphi_\eta(x)u_\varepsilon^{-\lambda}(x)$, где $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon$, $u(x)$ – предполагаемое решение задачи, $\varepsilon > 0$, $\varphi_\eta(x)$ – стандартная сглаженная характеристическая функция некоторого множества, диаметр которого определяется параметром $\eta > 0$, и, как правило, $\lambda > 0$. Однако для так называемых коэрцитивных задач, например,

$$Au = \Delta_p u \overset{\text{def}}{=} (\nabla |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \geq u^q,$$

знак λ обратный (т.е. $\lambda < 0$), а если главная часть дифференциального неравенства линейна, например,

$$Au = (-\Delta)^k u \geq u^q,$$

допустим выбор $\lambda = 0$. Алгебраические преобразования интегрального неравенства, получаемого из рассматриваемой формулировки задачи при указанном выборе пробных функций, приводят к априорным оценкам решения, зависящим от η. Устремляя параметр η к бесконечности (в случае неограниченных областей) или к нулю (в ограниченных), при определенных значениях параметров задачи можно прийти к противоречию с предполагаемыми свойствами решения.

[1)]Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН "5-100".

В нестационарных задачах пробные функции зависят также от временной переменной, но общая структура рассуждений аналогична. При этом до сих пор, как правило, рассматривались неравенства, в которых нелинейные слагаемые зависели от абсолютной величины искомой функции.

Здесь мы модифицируем метод пробных функций для получения достаточных условий отсутствия нетривиальных решений некоторых квазилинейных эллиптических неравенств в ограниченных областях и систем таких неравенств, содержащих слагаемые, зависящие различным образом от положительной и отрицательной частей искомой функции. Основная идея модификации заключается в последовательном использовании двух новых классов пробных функций вида $\varphi_R(x)u_{\varepsilon,+}^{\lambda}(x)$ и $\varphi_R(x)u_{\varepsilon,-}^{-\lambda}(x)$, где $u_{\varepsilon,+}(x) = \max(u(x),0)+\varepsilon$, $u_{\varepsilon,-}(x) = -\min(u(x),0)+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varphi_R(x)$ сохраняет традиционную структуру, а знак и величина параметра λ определяются характером задачи, для доказательства того, что $u_+(x) \overset{\text{def}}{=} \max(u(x),0) \equiv 0$ и $u_-(x) \overset{\text{def}}{=} -\min(u(x),0) \equiv 0$ соответственно.

Содержательная часть статьи состоит из двух разделов. В разд. 2 доказано отсутствие нетривиальных решений для некоторых скалярных квазилинейных эллиптических неравенств, а в разд. 3 — для соответствующих систем.

2. СКАЛЯРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей. Будем использовать обозначения

$$u_+(x) = \max\{u(x),0\}, \quad u_-(x) = -\min\{u(x),0\}, \quad \rho = \rho(x) = \operatorname{dist}(x,\partial\Omega).$$

Рассмотрим квазилинейное эллиптическое неравенство

$$-\Delta_p u \geq a(x)u_+^{q_1} + b(x)u_-^{q_2} \quad (x\in\Omega), \tag{2.1}$$

где

$$\Delta_p u \overset{=}{\text{def}} (\nabla|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad p>1, \quad a(x)\geq c_1\rho^{\beta_1}, \quad b(x)\geq c_2\rho^{\beta_2}$$

с некоторыми константами $c_1,c_2 > 0$, $\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ для всех $x\in\Omega$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $u\in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$, для которой существует $\lambda_0 > 0$ такое, что

$$u_+ \in L_{\text{loc}}^{q_1-\lambda}(\Omega), \quad u_- \in L_{\text{loc}}^{q_2+\lambda}(\Omega), \quad |\nabla u|^p u^{\pm\lambda-1} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$$

при $\lambda\in[0,\lambda_0]$, удовлетворяет неравенству (2.1) в слабом смысле (распределений), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi\in C_0^1(\Omega)$ выполняется следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}(\nabla u,\nabla\varphi)dx \geq \int\limits_{\Omega}(a(x)u_+^{q_1}+b(x)u_-^{q_2})\varphi dx, \tag{2.2}$$

где предполагается, что все интегралы существуют.

Замечание 1. В дальнейшем, кроме пробных функций $\varphi\in C_0^1(\Omega)$, мы будем рассматривать также пробные функции вида $u_{\varepsilon,+}^{\pm\lambda}(x)\varphi(x)$ и $u_{\varepsilon,-}^{\pm\lambda}(x)\varphi(x)$, где $u_{\varepsilon,+}(x) = u_+(x)+\varepsilon$, $u_{\varepsilon,-}(x) = u_-(x)+\varepsilon$, $\varepsilon\geq 0$, а значение параметра λ будет уточнено ниже. Соответственно решения будут рассматриваться в классе, для которого существуют интегралы из (2.2) с пробными функциями указанных видов.

Теорема 1. *Пусть* $\min(q_1,q_2) > p-1$ *и*

$$pq_i + \beta_i(p-1) \leq 0, \quad i = 1,2. \tag{2.3}$$

Тогда неравенство (2.1) *не имеет слабых решений, отличных от тождественного нуля п.в.*

Доказательство. Введем семейство функций $\varphi_\eta \in C_0^1(\Omega;[0,1])$ вида

$$\varphi_\eta(x) = \psi_\eta(x) \tag{2.4}$$

с $\varkappa > \dfrac{pq}{q-p}$, где $q = \min(q_1,q_2)$, и $\psi_\eta\in C_0^1(\Omega;[0,1])$ такими, что

$$\psi_\eta(x) = \begin{cases}1, & \rho(x)\geq 2\eta,\\ 0, & \rho(x)\leq\eta,\end{cases} \tag{2.5}$$

причем существует константа $c > 0$ такая, что

$$|\nabla\psi_\eta(x)| \le c\eta^{-1}, \quad x \in \Omega. \tag{2.6}$$

Предположим, что существует решение с $u_+ \not\equiv 0$. Подставляя $\varphi(x) = u_{\varepsilon,+}^{-\lambda}(x)\varphi_\eta(x)$ с $\lambda \in (0,\lambda_0]$ в (2.2), получаем

$$\int_\Omega u_+^{q_1} u_{\varepsilon,+}^{-\lambda}\rho^{\beta_1}\varphi_\eta dx \le \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u, D(u_{\varepsilon,+}^{-\lambda}\varphi_\eta))dx = -\lambda\int_\Omega u_{\varepsilon,+} + {}^{\lambda-1}|\nabla u_+|^p\varphi_\eta dx +$$
$$+\int_\Omega |\nabla u_+|^{p-2}(\nabla u_+, \nabla\varphi_\eta)dx \le -\lambda\int_\Omega u_{\varepsilon,+}^{-\lambda-1}|\nabla u_+|^p\varphi_\eta dx + \int_\Omega |\nabla u_+|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta|dx.$$

Используя неравенство Юнга

$$ab \le \frac{a^s}{s} + \frac{b^{s'}}{s'}, \quad a, b > 0, \quad s > 1,$$

при соответствующем выборе a, b и s, после перехода к пределу при $\varepsilon \to +0$ (допустимого по теореме Лебега об ограниченной сходимости) получим

$$\int_\Omega u_+^{q_1-\lambda}\rho^{\beta_1}\varphi_\eta dx + \lambda\int_\Omega u_{\varepsilon,+}^{-\lambda-1}|\nabla u_+|^p\varphi_\eta dx \le c(\lambda)\int_\Omega u_+^{-\lambda+p-1}|\nabla\varphi_\eta|^p\varphi_\eta^{1-p}dx. \tag{2.7}$$

Вновь применяя неравенство Юнга с соответствующими параметрами к подынтегральной функции в правой части (2.7) и отбрасывая второе неотрицательное слагаемое в его левой части, приходим к

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_+^{q_1-\lambda}\rho^{\beta_1}\varphi_\eta dx \le c(\lambda)\int_\Omega |\nabla\varphi_\eta|^{\frac{p(q_1-\lambda)}{q_1-p+1}}\rho^{-\frac{\beta_1(-\lambda+p-1)}{q_1-p+1}}\varphi_\eta^{1-\frac{p(q_1-\lambda)}{q_1-p+1}}dx.$$

Используя (2.4), (2.5), заменим левую часть полученного неравенства на интеграл от той же неотрицательной функции по меньшей области $\{x\colon \varphi_\eta(x) = 1\}$, а правую часть оценим с помощью условия (2.6):

$$\int_{\{x:\varphi_\eta(x)=1\}} u_+^{q_1-\lambda}\rho^{\beta_1}dx \le c\eta^{1-\frac{p(q_1-\lambda)+\beta_1(p-1-\lambda)}{q_1-p+1}},$$

что приводит к противоречию при $\eta \to 0_+$, если в (2.3) для $i = 1$ выполнено строгое неравенство и $\lambda > 0$ достаточно мало. Если же в (2.3) для $i = 1$ имеет место равенство, повторяя те же рассуждения для неравенства (2.7) без отбрасывания второго слагаемого, получаем

$$\int_{\{x:\varphi_\eta(x)=1\}} u_+^{q_1-\lambda}\rho^{\beta_1}dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\{x:\varphi_\eta(x)=1\}} u_+^{-\lambda-1}|\nabla u_+|^p\varphi_\eta dx \le c\eta^{1-\frac{p(q_1-\lambda)+\beta_1(p-1-\lambda)}{q_1-p+1}},$$

откуда

$$\int_{\{x:\varphi_\eta(x)=1\}} u_+^{-\lambda-1}|\nabla u_+|^p\varphi_\eta dx \le c\eta^{1-\frac{p(q_1-\lambda)+\beta_1(p-1-\lambda)}{q_1-p+1}}. \tag{2.8}$$

Далее, подставляя $\varphi(x) = \varphi_\eta(x)$ в (2.2) и применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\int_\Omega u_+^{q_1}\rho^{\beta_1}\varphi_\eta dx \le \left(\int_\Omega u_+^{-\lambda-1}|\nabla u_+|^p\varphi_\eta dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega u_+^{(\lambda+1)(p-1)}|\nabla\varphi_\eta|^p\varphi_\eta^{1-p}dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Используя (2.8) и повторно применяя неравенство Гёльдера, а затем условие (2.6), получаем

$$\int_\Omega u_+^{q_1}\rho^{\beta_1}\varphi_\eta dx \le c\eta^{\frac{(p-1)(n(q_1-p+1)-p(q_1-\lambda)-\beta_1(p-1-\lambda))}{p(q_1-p+1)}}\left(\int_{\operatorname{supp}|\nabla\varphi_\eta|} u_+^{q_1}\rho^{\beta_1}\varphi_\eta dx)\right)^{\frac{p-1}{pq_1}} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{\operatorname{supp}|\nabla\varphi_\eta|}|\nabla\varphi_\eta|^{\frac{pq_1}{q_1-(p-1)(\lambda+1)}}(\rho^{\beta_1(\lambda+1)}\varphi_\eta^{q_1+1})^{\frac{1-p}{q_1-(p-1)(\lambda+1)}}dx\right)^{\frac{q_1-(p-1)(\lambda+1)}{pq_1}}\le$$

$$\le c\eta^{\frac{(p-1)(-p(q_1-\lambda)-\beta_1(p-1-\lambda)))-pq_1+\beta_1(1-p)(\lambda+1)}{pq_1}}\left(\int\limits_{\operatorname{supp}|\nabla\varphi_\eta|}u_+^{q_1}\rho^{\beta_1}\varphi_\eta dx\right)^{\frac{p-1}{pq_1}}=c\left(\int\limits_{\operatorname{supp}|\nabla\varphi_\eta|}u_+^{q_1}\rho^{\beta_1}\varphi_\eta dx\right)^{\frac{p-1}{pq_1}},$$

где при $\eta\to 0_+$ правая часть стремится к 0 аналогично (2.8), что вновь приводит к противоречию, завершающему доказательство того, что $u_+\equiv 0$ п.в. в Ω. Аналогично, используя пробные функции $\varphi(x)=u_-^\lambda(x)\varphi_\eta(x)$, доказываем, что $u_-\equiv 0$ п.в. в Ω. Это завершает доказательство теоремы.

3. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим систему квазилинейных дифференциальных неравенств

$$\begin{aligned}&-\Delta_p u\ge a(x)v_+^{q_1}+b(x)v_-^{q_2}, \quad x\in\Omega,\\ &-\Delta_q v\ge c(x)u_+^{p_1}+d(x)u_-^{p_2}, \quad x\in\Omega,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $p,q,p_1,q_1,p_2,q_2>1$, причем $p-1<p_1$, $q-1<q_1$, a, b, cd — неотрицательные функции такие, что $a(x)\ge c_1\rho^\alpha$, $b(x)\ge c_2\rho^\beta$, $c(x)\ge c_3\rho^\gamma$, $d(x)\ge c_4\rho^\delta$ при $x\in\Omega$, $c_1,\ldots,c_4>0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

Определение 1. Пара функций (u,v): $u,v\in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)\times W_{\text{loc}}^{1,q}(\Omega)$, для которой существует $\lambda_0>0$ такое, что $u_+\in L_{\text{loc}}^{q_1-\lambda}(\Omega)$, $u_-\in L_{\text{loc}}^{q_2+\lambda}(\Omega)$, $v_+\in L_{\text{loc}}^{p_1-\lambda}(\Omega)$, $v_-\in L_{\text{loc}}^{p_2+\lambda}(\Omega)$, $|\nabla u|^p v^{\pm\lambda-1}\in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ и $|\nabla u|^q u^{\pm\lambda-1}\in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ при $\lambda\in[0,\lambda_0]$, называется слабым решением системы (3.1), если они удовлетворяют интегральным неравенствам

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega|\nabla u|^{p-2}(Du,\nabla\varphi_1)dx\ge\int\limits_\Omega(a(x)v_+^{q_1}+b(x)v_-^{q_2})\varphi_1dx,\\ &\int\limits_\Omega|\nabla v|^{q-2}(Dv,D\varphi_2)dx\ge\int\limits_\Omega(c(x)u_+^{p_1}+d(x)u_-^{p_2})\varphi_2dx\end{aligned}\tag{3.2}$$

для всех неотрицательных пробных функций $\varphi_1,\varphi_2\in C_0^1(\Omega)$, где предполагается, что рассматриваемые интегралы существуют.

Замечание 1. В дальнейшем, кроме пробных функций $\varphi\in C_0^1(\Omega)$, мы будем рассматривать также пробные функции вида

$$u_{\varepsilon,+}^{\pm\lambda}(x)\varphi(x),\quad v_{\varepsilon,+}^{\pm\lambda}(x)\varphi(x),\quad u_{\varepsilon,-}^{-\pm\lambda}(x)\varphi(x),\quad v_{\varepsilon,-}^{\pm\lambda}(x)\varphi(x),$$

где $u_{\varepsilon,+}=u_++\varepsilon$, $v_{\varepsilon,+}=v_++\varepsilon$, $u_{\varepsilon,-}=u_-+\varepsilon$, $v_{\varepsilon,-}=v_-+\varepsilon$, $\varepsilon\ge 0$, а значение параметра λ будет уточнено ниже. Соответственно решения будут рассматриваться в классе, для которого существуют интегралы из (3.2) с пробными функциями указанных видов.

Теорема 3.1. *Пусть*

$$\min_{i,j=1,2}p_iq_j>(p-1)(q-1),\quad \max_{i=1,\ldots,4}a_i<0,\quad \max_{i=1,\ldots,4}b_i<0,$$

где

$$a_1=\frac{(p_1+\gamma+1+(q-1)(q_1+\alpha+1))(p-1)}{p_1q_1-(p-1)(q-1)},\quad a_2=\frac{(p_2+\delta+1+(q-1)(q_1+\alpha+1))(p-1)}{p_2q_1-(p-1)(q-1)},$$
$$a_3=\frac{(p_1+\gamma+1+(q-1)(q_2+\beta+1))(p-1)}{p_1q_2-(p-1)(q-1)},\quad a_4=\frac{(p_2+\delta+1+(q-1)(q_2+\beta+1))(p-1)}{p_2q_1-(p-1)(q-1)},$$

$$b_1 = \frac{(q_1 + \alpha + 1 + (p-1)(p_1 + \gamma + 1))(q-1)}{p_1 q_1 - (p-1)(q-1)}, \quad b_2 = \frac{(q_2 + \beta + 1 + (p-1)(p_1 + \gamma + 1))(q-1)}{p_2 q_1 - (p-1)(q-1)},$$
$$b_3 = \frac{(q_2 + \beta + 1 + (p-1)(p_1 + \gamma + 1))(q-1)}{p_1 q_2 - (p-1)(q-1)}, \quad b_4 = \frac{(q_2 + \delta + 1 + (p-1)(p_2 + \delta + 1))(q-1)}{p_2 q_1 - (p-1)(q-1)}.$$

Тогда система (3.1) *не имеет нетривиальных решений.*

Доказательство. Пусть $\varphi_\eta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ – семейство пробных функций из предыдущего раздела, где $\varkappa > 0$ достаточно велико.

Подставив $\varphi_1(x) = u_{\varepsilon,+}^{\lambda}(x)\varphi_\eta(x)$ в первое неравенство (3.2), а $\varphi_2(x) = v_{\varepsilon,+}^{-\lambda}(x)\varphi_\eta(x)$ во второе, где $\varepsilon > 0$ и $\max\{1-p, 1-q\} < -\lambda < 0$, получим

$$\int (a(x)v_+^{q_1} + b(x)v_-^{q_2})u_{\varepsilon,+}^{\lambda}\varphi_\eta dx \le \lambda \int |\nabla u_+|^p u_{\varepsilon,+}^{-\lambda-1}\varphi_\eta dx + \int (|\nabla u_+|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta| u_{\varepsilon,+}^{-\lambda} dx, \tag{3.3}$$

$$\int (c(x)u_+^{p_1} + d(x)u_-^{p_2})v_{\varepsilon,+}^{\lambda}\varphi_\eta dx \le \lambda \int |\nabla v_+|^q v_{\varepsilon,+}^{\lambda-1}\varphi_\eta dx + \int (|\nabla v_+|^{q-1}|\nabla\varphi_\eta| v_{\varepsilon,+}^{-\lambda} dx. \tag{3.4}$$

Применение неравенство Юнга к первым слагаемым в правых частях полученных соотношений с последующим предельным переходом при $\varepsilon \to 0_+$ приводит к

$$\int (a(x)v_+^{q_1} + b(x)v_-^{q_2})u_+^{\lambda}\varphi_\eta dx + \frac{\lambda}{2}\int |\nabla u_+|^p u_+^{-\lambda-1}\varphi_\eta dx \le c_\lambda \int \frac{|\nabla\varphi_\eta|^p}{\varphi_\eta^{p-1}} u_+^{-\lambda+p-1} dx, \tag{3.5}$$

$$\int (c(x)u_+^{p_1} + d(x)u_-^{p_2})v_+^{-\lambda}\varphi_\eta dx + \frac{\lambda}{2}\int |\nabla v_+|^q v_+^{-\lambda-1}\varphi_\eta dx \le d_\lambda \int \frac{|\nabla\varphi_\eta|^q}{\varphi_\eta^{q-1}} v_+^{-\lambda+q-1} dx, \tag{3.6}$$

где константы c_λ и d_λ положительны и зависят только от p, q и λ.

Аналогично, подставляя $\varphi_1(x) = u_{\varepsilon,-}^{\lambda}(x)\varphi_\eta(x)$ в первое неравенство (3.2), а $\varphi_2(x) = v_{\varepsilon,-}^{-\lambda}(x)\varphi_\eta(x)$ во второе, где $\varepsilon > 0$ и $\max\{1-p, 1-q\} < -\lambda < 0$, получаем

$$\int (a(x)v_+^{q_1} + b(x)v_-^{q_2})u_-^{\lambda}\varphi_\eta dx + \frac{\lambda}{2}\int |\nabla u_-|^p u_-^{\lambda-1}\varphi_\eta dx \le e_\lambda \int \frac{|\nabla\varphi_\eta|^p}{\varphi_\eta^{p-1}} u_-^{\lambda+p-1} dx, \tag{3.7}$$

$$\int (c(x)u_+^{p_1} + d(x)u_-^{p_2})v_-^{\lambda}\varphi_\eta dx + \frac{|\lambda|}{2}\int |\nabla v_+|^q v_-^{\lambda-1}\varphi_\eta dx \le f_\lambda \int \frac{|\nabla\varphi_\eta|^q}{\varphi_\eta^{q-1}} v_-^{\lambda+q-1} dx, \tag{3.8}$$

где константы e_λ и f_λ зависят только от p, q и λ.

Далее, умножая каждое из дифференциальных неравенств (3.1) на φ_η и интегрируя по частям, аналогично предыдущему придем к соотношениям

$$\int (a(x)v_+^{q_1} + b(x)v_-^{q_2})\varphi_\eta dx \le \int |\nabla u_+|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta| dx + \int |\nabla u_-|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta| dx, \tag{3.9}$$

$$\int (c(x)u_+^{p_1} + d(x)u_-^{p_2})\varphi_\eta dx \le \int |\nabla v_+|^{q-1}|\nabla\varphi_\eta| dx + \int |\nabla v_-|^{q-1}|\nabla\varphi_\eta| dx. \tag{3.10}$$

Применим к каждому из интегралов в правых частях полученных соотношений неравенство Гёльдера. С учетом (3.5)–(3.8) получим

$$\begin{aligned} \int |\nabla u_+|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta| dx &\le \left(\int |\nabla u_+|^p u_+^{\lambda-1}\varphi_\eta dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int \frac{|\nabla\varphi_\eta|^p}{\varphi_\eta^{p-1}} u_+^{(1-\lambda)(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \\ &\le g_\lambda \left(\int \frac{|\nabla\varphi_\eta|^p}{\varphi_\eta^{p-1}} u_+^{-\lambda+p-1} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int \frac{|\nabla\varphi_\eta|^p}{\varphi_\eta^{p-1}} u_+^{(1-\lambda)(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

и аналогичные соотношения для интегралов

$$\int |\nabla u_-|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta| dx, \quad \int |\nabla v_+|^{q-1}|\nabla\varphi_\eta| dx, \quad \int |\nabla v_-|^{q-1}|\nabla\varphi_\eta| dx.$$

Применяя неравенство Гёльдера с параметром $r > 1$ таким, что

$$(\lambda + p - 1)r = p_1, \tag{3.12}$$

к первому интегралу в правой части (3.11), будем иметь

$$\int|\nabla u_+|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta|dx \le g_\lambda\Big(\int c(x)u_+^{p_1}\varphi_\eta dx\Big)^{\frac{p-1}{pr}}\left(\int c^{-\frac{r'}{r}}(x)\frac{|\nabla\varphi_\eta|^{pr'}}{\varphi_\eta^{pr'-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{pr'}}\left(\int\frac{|\nabla\varphi_\eta|^p}{\varphi_\eta^{p-1}}u_+^{(1-\lambda)(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.13}$$

где $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$.

Применяя неравенство Гёльдера с параметром $y>1$ к последнему интегралу в правой части (3.13) таким, что

$$(1-\lambda)(p-1)y = p_1, \tag{3.14}$$

и учитывая (3.13), приходим к оценке

$$\int|\nabla u_+|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta|dx \le$$
$$\le g_\lambda\Big(\int(c(x)u_+^{p_1}+d(x)u_-^{p_2})\varphi_\eta dx\Big)^{\frac{p-1}{pr}+\frac{1}{py}}\left(\int c^{-\frac{r'}{r}}(x)\frac{|\nabla\varphi_\eta|^{pr'}}{\varphi_\eta^{pr'-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{pr'}}\left(\int c^{-\frac{y'}{y}}(x)\frac{|\nabla\varphi_\eta|^{py'}}{\varphi_\eta^{py'-1}}dx\right)^{\frac{1}{py'}}, \tag{3.15}$$

где $\frac{1}{y}+\frac{1}{y'}=1$. Подставляя выражения (3.12) и (3.14) для параметров r и y соответственно, с учетом выбора φ_η и условий на $c(x)$ и $d(x)$ получаем

$$\int|\nabla u_+|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta|dx \le g_\lambda\Big(\int(c(x)u_+^{p_1}+d(x)u_-^{p_2})\varphi_\eta dx\Big)^{\frac{p-1}{p_1}}\eta^{\frac{(1-p)(p_1+\gamma+1)}{p_1}}. \tag{3.16}$$

Аналогичные оценки получаем для

$$\int|\nabla u_-|^{p-1}|\nabla\varphi_\eta|dx,\quad \int|\nabla v_+|^{q-1}|\nabla\varphi_\eta|dx,\quad \int|\nabla v_-|^{q-1}|\nabla\varphi_\eta|dx.$$

Объединяя полученные оценки с (3.9) и (3.10) и вводя обозначения

$$A=A(\eta)=\int(a(x)v_+^{q_1}+b(x)v_-^{q_2})\varphi_\eta dx,\quad B=B(\eta)=\int(c(x)u_+^{p_1}+d(x)u_-^{p_2})\varphi_\eta dx,$$

приходим к оценкам

$$\begin{aligned} A &\le C_\lambda\left(B^{\frac{p-1}{p_1}}\eta^{\frac{(1-p)(p_1+\gamma+1)}{p_1}}+B^{\frac{p-1}{p_2}}\eta^{\frac{(1-p)(p_2+\delta+1)}{p_2}}\right),\\ B &\le D_\lambda\left(A^{\frac{q-1}{q_1}}\eta^{\frac{(1-q)(q_1+\alpha+1)}{q_1}}+A^{\frac{q-1}{q_2}}\eta^{\frac{(1-q)(q_2+\beta+1)}{q_2}}\right),\end{aligned} \tag{3.17}$$

где константы C_λ и D_λ положительны и зависят только от параметров исходных неравенств и от λ. Следовательно, в каждом из неравенств (17) хотя бы одно из слагаемых правой части больше, чем половина левой части. Отсюда получим

$$A(\eta)\le E_\lambda\eta^{-\max\limits_{i=1,\dots,4}a_i},\quad B(\eta)\le F_\lambda\eta^{-\max\limits_{i=1,\dots,4}b_i},$$

где константы E_λ и F_λ положительны и зависят только от параметров исходных неравенств и от λ.

Устремляя $\eta\to 0_+$, приходим к противоречию, доказывающему утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Похожаев С.И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами // Докл. АН. 1997. Т. 357. С. 592–594.
2. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Теоремы Лиувилля для некоторых классов нелинейных нелокальных задач // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2005. Т. 248. С. 158–178.
3. *Galaktionov V., Mitidieri E., Pohozaev S.* Blow-up for Higher-Order Parabolic, Hyperbolic, Dispersion and Schrodinger Equations // Chapman and Hall/CRC. Boca Raton. 2014. 569 p.
4. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets // JMAA. 2013. V. 408. P. 102–113.
5. *Salieva O.* On nonexistence of solutions to some nonlinear parabolic inequalities // Comm. Pure Appl. Anal. 2017. V. 16. № 3.