ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 8, с. 1383–1393

УДК 517.63

ДИНАМИКА МНОЖЕСТВА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ, ПОРОЖДАЕМАЯ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ЛИУВИЛЛЯ–ФОН НЕЙМАНА

© 2020 г. А. Д. Грехнева[1,*], В. Ж. Сакбаев[2,3,4,5,**]

[1] 140180 Жуковский, М.о., ул. Гарнаева, 2а, ЛИИ им. Громова, Россия

[2] 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

[3] 119991 Москва, ул. Губкина, 8, МИ им. В.А. Стеклова РАН, Россия

[4] 117997 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, ИО ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Россия

[5] 117997 Уфа, ул. Чернышевского, 36, ИМВЦ УФИЦ РАН, Россия

*e-mail: alice-prohorses@yandex.ru

**e-mail:fumi2002@mail.ru

Поступила в редакцию 07.11.2019 г.
Переработанный вариант 01.12.2019 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Исследована модель описания динамики совокупности квантовых состояний, порождаемой нелинейным уравнением Шрёдингера. В работе [1] исследована связь явления разрушения решения с явлением самофокусировки и явлением перехода из чистого состояния квантовой системы в смешанное. В связи с этим становится естественной постановка вопроса о динамике, порождаемой нелинейным уравнением Шрёдингера в множестве смешанных квантовых состояний. Динамику смешанных квантовых состояний описывает соответствующее нелинейному уравнению Шрёдингера уравнение Лиувилля–фон Неймана, для которого получены условия глобального существования единственного решения задачи Коши и условия разрушения решения. Библ. 19.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шрёдингера, квантовое состояние, градиентная катастрофа, регуляризация.

DOI: 10.31857/S0044466920080098

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе исследована эволюция множества квантовых состояний, порождаемая нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) со степенной зависимостью потенциала от плотности вероятности состояния в координатном пространстве

$$i\frac{du}{dt} = \mathbf{\Delta}u(t) + \mathbf{V}(u(t))u(t), \quad t \in (0,T), \quad T \in (0,+\infty], \tag{1.1}$$

$$u(+0) = u_0, \quad u_0 \in H \equiv L_2([-\pi,\pi]). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{V}(u) \equiv |u|^p$, $p \geq 0$, $\mathbf{\Delta}$ – оператор Лапласа в пространстве H, областью определения которого является пространство H^2, состоящее из функций пространства Соболева $W_2^2(-\pi,\pi)$, удовлетворяющих однородным граничным условиям Дирихле $u(-\pi) = 0$, $u(\pi) = 0$. В работе [1] было показано, что для малых показателей нелинейности $p \in [0,4)$ задача Коши (1.1), (1.2) порождает непрерывную группу $\mathbf{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, нелинейных преобразований пространства начальных данных $H^1 = D(\sqrt{-\mathbf{\Delta}})$, сохраняющих H-норму решения и значение функционала энергии

$$E(u) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+2}|u|^{p+2}\right)dx$$

на векторах $u(t) = \mathbf{U}(t)u_0$, $t \in \mathbb{R}$. Если же $p \geq 4$, то будет показано, что найдутся начальные данные (1.2), при которых решение задачи Коши допускает явление самофокусировки за конечное время, которое сопровождается явлением градиентного взрыва решения.

Нелинейное уравнение Шрёдингера интенсивно изучалось в связи с математическим обоснованием явления самофокусировки волн в нелинейной оптической среде (см. [2]). Нелинейное уравнение Шрёдингера изучалось в d-мерном евклидовом пространстве и его областях, изучались различные виды нелинейной зависимости потенциала взаимодействия от неизвестной волновой функции (см. [3]–[7]).

Как показано в работах [3]–[6], задача Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера со степенной зависимостью нелинейного потенциала от неизвестной функции может либо иметь единственное глобальное решение, либо иметь локальное решение, допускающее разрушение при приближении к границе промежутка существования решения. В первом случае задача Коши определяет однопараметрическую группу преобразований пространства начальных условий, во втором случае промежуток существования решения задачи Коши зависит от начального условия, причем длина промежутка существования может принимать любое положительное значение в зависимости от выбора начального условия (см. [1], [4]–[6]).

В работах [8], [9] предложена процедура регуляризации задачи Коши, позволяющая аппроксимировать задачу Коши, допускающую явление разрушения решения, направленным семейством задач Коши. Регуляризацией задачи Коши называется такое топологическое пространство начально-краевых задач, в котором исследуемая задача Коши является предельной точкой (см. [9]). Для изучения задачи Коши с полиномиальной нелинейностью в качестве регуляризации рассматривается однопараметрическое семейство задач Коши для нелинейных уравнений Шрёдингера, в каждой из которых нелинейный гамильтониан является полуограниченным нелинейным оператором (что обеспечивает глобальную разрешимость регуляризованной задачи Коши в соответствующем энергетическому функционалу пространстве). При этом направленное семейство графиков регуляризованных операторов Шрёдингера сходится к графику гамильтониана исследуемой задачи Коши на всюду плотной общей области определения этих нелинейных операторов. В работах [1], [8] исследованы аппроксимации исходного уравнения Шрёдингера (1.1) его энергетическими регуляризациями, задаваемыми направленным множеством полуограниченных снизу функционалов энергии

$$E_\epsilon(u) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\epsilon}{2}|\Delta u|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+2}|u|^{p+2}\right)dx, \quad \epsilon \in (0,1), \quad \epsilon \to +0.$$

В работах [1], [8] установлено, что направленное множество решений задач Коши для регуляризованных уравнений Шрёдингера сходится к решению задачи Коши (1.1), (1.2) на всем промежутке существования решения последней. На промежутках, содержащих граничные точки промежутка существования решения задачи (1.1), (1.2), установлена расходимость последовательности регуляризованных решений; за пределами промежутка существования решения задачи Коши (1.1), (1.2), направленное множество решений задач Коши для уравнения Шрёдингера с регуляризованным оператором имеет предельное множество в пространстве $(B(H))^*$ квантовых состояний, снабженном $*$-слабой топологией. Наделение множества регуляризованных задач структурой измеримого пространства с мерой позволяет определить однопараметрическое семейство мер на множестве векторных квантовых состояний, т.е. однопараметрическое семейство смешанных квантовых состояний.

В связи с этим рассматривается задача Коши для уравнения Лиувилля–фон Неймана

$$i\frac{d}{dt}\rho(t) = [\mathbf{\Delta} + \mathbf{V}(\rho(t)), \rho(t)], \quad t > 0, \tag{1.3}$$

$$\rho(+0) = \rho_0, \quad \rho_0 \in \Sigma(H), \tag{1.4}$$

где $\Sigma(H)$ – множество квантовых состояний, определяемое как пересечение единичной сферы с конусом положительных элементов пространства $(B(H))^*$ линейных непрерывных функционалов на банаховой алгебре ограниченных линейных операторов $B(H)$. Здесь $\mathbf{V}$ – отображение некоторого множества D из пространства квантовых состояний $(B(H))^*$ в множество линейных операторов в пространстве H, сопоставляющее каждому состоянию $r \in D$ оператор $\mathbf{V}(r)$ умножения на функцию, зависящую от состояния r. Если в нелинейном уравнении Шрёдингера (1.1) потенциал $\mathbf{V}(u)$ является оператором умножения на функцию $(w_u(x))^{p/2}$, где $w_u(x) = |u(x)|^2$,

$x \in (-\pi, \pi)$, то в нелинейном уравнении Лиувилля–фон Неймана (1.3) потенциал $\mathbf{V}(\rho)$ есть оператор умножения на функцию $(w_\rho(x))^{p/2}$, где

$$w_\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k |u_k(x)|^2, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

при условии, что квантовое состояние задается оператором плотности $\rho = \sum_{j=1}^{\infty} p_k \mathbf{P}_{u_k}$ с набором собственных значений p_k, $k \in \mathbb{N}$, и ОНБ из собственных векторов $\{u_k\}$. Здесь и далее через $\mathbf{P}_u$ обозначается одномерный ортогональный проектор на линейную оболочку вектора $u \in H$.

Таким образом, по задаче Коши для НУШ можно задать однопараметрическое семейство преобразований множества квантовых состояний $\Sigma(H)$ в себя, являющееся продолжением преобразования, сопоставляющего каждому начальному условию задачи Коши (1.1), (1.2) ее решение. При таком продолжении чистое состояние преобразуется в смешанное при переходе через момент градиентного взрыва. Ставится задача распространить семейство динамических преобразований с множества векторных состояний на множество смешанных состояний и определить, при каких условиях это продолженное семейство преобразований является полугруппой, а также определить связь продолженного преобразования с решением задачи Коши для уравнения Лиувиля–фон Неймана (1.3), (1.4).

Заметим, что изучение динамических систем, порождаемых гамильтонианами на бесконечномерном фазовом пространстве, к которым относится в том числе и уравнение Шрёдингера (см. [10]), приводит к изучению не только векторных, но и общих состояний (т.е. неотрицательных линейных нормированных функционалов) на алгебре ограниченных линейных операторов и различных ее подалгебрах (см. [11], [12]).

В настоящей работе дано определение соболевского нормального квантового состояния как смеси векторных квантовых состояний, определяемых векторами из пространства Соболева. Дано определение соболевского решения задачи Коши для уравнения Лиувилля–фон Неймана (1.3), (1.4). Предложен метод исследования нелинейного уравнения Лиувилля–фон Неймана, основанный на его сведении к нелинейному уравнению Шрёдингера в расширенном гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых задача Коши (1.3), (1.4) задает непрерывную группу преобразований множества соболевских квантовых состояний, получены условия разрушения соболевских состояний за конечное время.

2. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ–ФОН НЕЙМАНА И УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА В РАСШИРЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$ – гильбертово пространство квантовой системы; $B(H)$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. Пространством квантовых состояний называется пространство $B^*(H)$ линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве $B(H)$. Множеством квантовых состояний $\Sigma(H)$ называется (см. [13], [14]) пересечение единичной сферы с положительным конусом в пространстве $(B(H))^*$.

Пространством нормальных квантовых состояний называется пространство ядерных операторов $T_1(H)$, наделенное следовой нормой $\|\cdot\|_1$. Множеством нормальных квантовых состояний $S(H)$ называется пересечение единичной сферы с положительным конусом в пространстве $T_1(H)$ (см. [13], [15], [16]).

Определение 1. *Пространством соболевских состояний* назовем такое подпространство $T_1^1(H)$ пространства нормальных состояний $T_1(H)$, что для любого $\mathbf{A} \in T_1^1(H)$ выполняется условие $\mathbf{DAD} \in T_1(H)$, где $\mathbf{D} = \sqrt{-\boldsymbol{\Delta}}$ – самосопряженный оператор в пространстве H с областью определения

$$H^1 = \{u \in W_2^1([-\pi, \pi]) : \ u(-\pi) = u(\pi) = 0\}.$$

Пространство $T_1^1(H)$ наделено нормой $\|\mathbf{A}\|_{1,1} = \|\mathbf{A}\|_1 + \|\mathbf{DAD}\|_1$.

Заметим, что оператор $-\boldsymbol{\Delta}$ обладает дискретным спектром, расположенным на положительной полуоси $(0,+\infty)$. Поэтому спектр самосопряженного оператора $\mathbf{D}$ также является дискретным и расположен на положительной полуоси.

Нормальное состояние $\rho \in S(H)$ назовем соболевским, если выполняется условие $\mathbf{D}\rho\mathbf{D} \in T_1(H)$. Каждое нормальное состояние $r \in T(H)$ представимо неотрицательным ядерным оператором $\mathbf{r}$ с единичным следом, имеющим вид

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{v_j}, \tag{2.1}$$

где $p_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$, $\mathbf{P}_v$ — оператор ортогонального проектирования на одномерное линейное пространство $\operatorname{span}(v)$ и $\{v_j\}$ — некоторый ортонормированный базис в пространстве H. При этом если $r \in T_1^1(H)$, то векторы v_j в равенстве (2.1) удовлетворяют условию $v_j \in H^1$ $\forall j \in \mathbb{N}$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j \|\mathbf{D}u_j\|_H^2 < +\infty. \tag{2.2}$$

Чистое состояние квантовой системы с волновой функцией $u \in L_2(-\pi,\pi)$ определяет распределение вероятности на координатном пространстве $[-\pi,\pi]$ с абсолютно интегрируемой плотностью $w_u(x) = |u(x)|^2$, $x \in [-\pi,\pi]$; смешанное состояние с оператором плотности $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \mathbf{P}_{v_k}$ определяет распределение вероятности с абсолютно интегрируемой плотностью

$$w_\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k |v_k(x)|^2, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

Если состояние ρ является соболевским, то из условия (2.2) следует, что $w_\rho \in W_1^1(-\pi,\pi)$. Поскольку каждую функцию из пространства $W_1^1(-\pi,\pi)$ можно рассматривать (после исправления на множестве нулевой меры) как непрерывную на отрезке $[-\pi,\pi]$, то на множестве $\Sigma_1(H)$ соболевских состояний определено отображение $\mathbf{V}(\cdot)$, каждому состоянию $r \in T_1^1(H)$ сопоставляющее линейный оператор $\mathbf{V}(r) \in B(H)$ умножения на непрерывную функцию

$$f(w_r(x)) = (w_r(x))^{p/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k |v_k(x)|^2\right)^{p/2}, \quad x \in (-\pi,\pi).$$

Здесь $p \geq 0$ — параметр нелинейной зависимости потенциала от плотности (см. (1.1), (1.3)).

Лемма 1. *Если состояние ρ является соболевским, то оператор $\mathbf{V}(\rho)$ умножения на функцию $f(w_\rho(x)) = (w_\rho(x))^{p/2}$ является ограниченным линейным оператором в пространстве H.*

Доказательство. Поскольку $\rho \in T_1^1(H)$, то $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \mathbf{P}_{u_k}$, где $p_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$; $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, и $u_k \in H^1 \|u_k\|_H = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ можно считать, что функция $u_k \in C([-\pi,\pi])$ является непрерывной (после исправления на множестве нулевой меры), при этом существует такая постоянная $B_0 > 0$, что $\|u_k\|_{C([-\pi,\pi])} \leq B_0 \|u_k\|_{H_1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому для любого $x \in [-\pi,\pi]$ справедливы оценки

$$(w_\rho(x))^{p/2} = \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k |u_k(x)|^2\right)^{1/2}\right]^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k |u_k(x)|^2\right)^p \leq \left(B_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} p_k \|u_k\|_{H^1}^2\right)^p.$$

Поэтому если $\rho \in T_1^1(H)$, то функция $\mathbf{V}(\rho)$ непрерывна и существует такая постоянная $c_1 > 0$, что $\|\mathbf{V}(\rho)\|_{B(H)} \leq c_1 \|\rho\|_{T_1^1(H)}^{2p}$.

Определение 2. Непрерывное отображение отрезка $[0,T]$, $T>0$, в пространство $T_1^1(H)$ назовем *соболевским решением задачи Коши* (1.1), (1.2), если

$$\rho(t) = e^{-i\Delta t}\rho(0)e^{i\Delta t} + \int_0^t e^{-i\Delta(t-s)}[\mathbf{V}(\rho(s))\rho(s) - \rho(s)\mathbf{V}(\rho(s))]e^{i\Delta(t-s)}ds, \quad t\in[0,T].$$

Для изучения уравнения Лиувилля–фон Неймана введем расширенное гильбертово пространство $\mathcal{H} = \oplus_{k=1}^{\infty} H_k$, где пространство H_k изоморфно пространству H при каждом $k\in\mathbb{N}$. Это позволит нелинейное уравнение Лиувилля–фон Неймана (1.3) для неизвестной функции со значениями в пространстве квантовых состояний $T_1(H)$ рассмотреть как нелинейное уравнение Шрёдингера вида (1.1) для неизвестной функции со значениями в пространстве $\mathcal{H}$.

Рассмотрим гильбертовы пространства $\mathcal{H} = \oplus_{k=1}^{\infty} H_k$, $\mathcal{H}^1 = \oplus_{k=1}^{\infty} H_k^1$ и $\mathcal{H}^2 = \oplus_{k=1}^{\infty} H_k^2$, где пространства $H_1,\dots,H_m,\dots$ изоморфны пространству H, пространства $H_1^1,\dots,H_m^1,\dots$ изоморфны пространству H^1 и пространства $H_1^2,\dots,H_m^2\dots$ изоморфны пространству H^2. Оператор $\hat{\Delta}$ в пространстве $\mathcal{H}$ определим по правилу

$$\hat{\Delta} = \oplus_{j=1}^{\infty}\Delta_j,$$

так что

$$\hat{\Delta}(\oplus_{j=1}^{\infty}u_j) = \oplus_{j=1}^{\infty}\Delta u_j.$$

Определим также нелинейное отображение $\hat{\mathbf{W}}$ пространства $\mathcal{H}^1$ в пространство $\mathcal{H}$, действующее на вектор $U = \oplus_{j=1}^{\infty}u_j \in \mathcal{H}^1$ по правилу

$$\hat{\mathbf{W}}(U)U = \oplus_{j=1}^{\infty}\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k(U)\mathbf{P}_{u_k}\right)u_j, \quad U\in\mathcal{H}^1, \tag{2.3}$$

где для каждого $\rho = \sum_{j=1}^{\infty} p_j\mathbf{P}_{v_j} \in T_1^1(H)$ оператор $\mathbf{V}(\rho)\in B(H)$ определен как оператор умножения на функцию $f(w_\rho(x)) = (w_\rho(x))^{p/2}$.

В равенстве (2.3) $u_j = \mathbf{P}_{H_j}(U)$, $U\in\mathcal{H}$ и $p_k(U) = \left\|\mathbf{P}_{H_j}(U)\right\|_H^2$, где оператор проектирования $\mathbf{P}_k:\ \mathcal{H}\to H_k$ действует по правилу $\mathbf{P}_k(\oplus_{j=1}^{\infty}u_j) = u_k$.

Наряду с задачей Коши (1.3), (1.4) рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера (2.4), (2.5)

$$i\frac{d}{dt}U(t) = \hat{\Delta}U(t) + \hat{\mathbf{W}}(U(t))U(t), \quad t>0, \tag{2.4}$$

$$U(+0) = U_0, \quad U_0 = \oplus_{j=1}^{\infty}u_{0j}\in\mathcal{H}. \tag{2.5}$$

$\mathcal{H}^1$-решением задачи Коши (2.4), (2.5) на отрезке $[0,T]$, $T>0$, называется (см. [1]) отображение $U(\cdot)\in C([0,T],\mathcal{H}^1)$, что

$$U(t) = \exp(-i\hat{\Delta}t)U_0 - i\int_0^t \exp(-i\hat{\Delta}(t-s))\hat{\mathbf{W}}(U(s))U(s)ds, \quad t\in[0,T].$$

Теорема 1. *Оператор-функция*

$$\rho(t,\rho_0) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j\mathbf{P}_{u_j(t)}, \quad t\in[0,T],$$

является соболевским решением задачи (1.3), (1.4) *с начальным условием* $\rho_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j\mathbf{P}_{u_{0j}}$ *тогда и только тогда, когда функция* $U(t) = \oplus_{j=1}^{m}u_j(t)$, $t\in[0,T]$, *является* $\mathcal{H}^1$*-решением задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера* (2.4), (2.5).

Доказательство. 1. Сначала покажем, что если $\rho(t)$, $t\in[0,T]$, – соболевское решение задачи Коши (1.3), (1.4), то оно представимо в виде

$$\rho(t)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\mathbf{P}_{u_k(t)},$$

где совокупность функций $u_k(\cdot)$, $k\in\mathbb{N}$, такова, что функция

$$U(t)=\oplus_{k=1}^{\infty}\sqrt{p_k}u_k(t),\quad t\in[0,T],$$

является решением задачи Коши для уравнения Шрёдингера (2.4), (2.5), с начальным условием $U_0=\oplus_{k=1}^{\infty}\sqrt{p_k}u_k$.

Если $\rho(t)$, $t\in[0,T]$, – соболевское решение задачи Коши (1.3), (1.4), то функция $f(w_{\rho(t)})$, $t\in[0,T]$, принадлежит пространству $C([0,T],C([-\pi,\pi]))$, а функция $\rho(t)$, $t\in[0,T]$, является решением задачи Коши для линейного уравнения Лиувилля–фон Неймана

$$i\frac{d}{dt}\rho(t)=[\mathbf{L}(t),\rho(t)],\quad t\in[0,T], \tag{2.6}$$

с начальным условием (1.4) и зависящим от времени линейным эволюционным оператором $\mathbf{L}(t)=\boldsymbol{\Delta}+\boldsymbol{\Lambda}(t)$, где при каждом $t\in[0,T]$ оператор $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ – линейный ограниченный оператор в пространстве $B(H)$, являющийся оператором умножения на функцию

$$f(w_{\rho(t)}(x))=(w_{\rho(t)}(x))^{p/2},\quad t\in[0,T],\quad x\in[-\pi,\pi].$$

Следовательно,

$$\rho(t)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\mathbf{P}_{u_k(t)},$$

где при каждом $k\in\mathbb{N}$ функция $u_k:\ [0,T]\to H$ является решением задачи Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{d}{dt}u_k(t)=(\boldsymbol{\Delta}+\boldsymbol{\Lambda}(t))u_k(t),\quad t\in[0,T];\quad u_k(0)=u_{0k}. \tag{2.7}$$

Поэтому функция

$$U(t)=\oplus_{k=1}^{\infty}\sqrt{p_k}u_k(t),\quad t\in[0,T],$$

является решением задачи Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{d}{dt}U(t)=(\boldsymbol{\Delta}+\hat{\mathbf{M}}(t))U(t),\quad t\in[0,T];\quad U(0)=U_0=\oplus_{k=1}^{\infty}\sqrt{p_k}u_{0k},$$

где $\hat{\mathbf{M}}(t)\in B(\mathcal{H})$ – линейный оператор в пространстве $\mathcal{H}$, действующий по правилу

$$\hat{\mathbf{M}}(t)(\oplus u_j)=\oplus(\boldsymbol{\Lambda}(t)u_j).$$

Поскольку

$$\boldsymbol{\Lambda}(t,x)=\mathbf{V}(\rho(t))=\left(\sum_{k=1}^{\infty}p_k|u_k(t,x)|^2\right)^{p/2},$$

то $\hat{\mathbf{M}}(t)U(t)=\hat{\mathbf{W}}(U(t))U(t)$. Следовательно, функция $U(t)$, $t\in[0,T]$, является решением задачи Коши (2.4), (2.5) с начальным условием $U_0=\oplus_{k=1}^{\infty}\sqrt{p_k}u_{0k}$.

2. Покажем теперь, что если вектор-функция $U(t)=\oplus_{j=1}^{\infty}p_ju_j(t)$, $t\in[0,T]$, является решением задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера (2.4), (2.5), то оператор-функция

$$\rho(t,\rho_0)=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\mathbf{P}_{u_j(t)},\quad t\in[0,T],$$

является соболевским решением задачи (1.3), (1.4) с начальным условием $\rho_0=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\mathbf{P}_{u_{0j}}$.

Если вектор-функция $U(t) = \oplus_{j=1}^{\infty}\sqrt{p_j}u_j(t, u_{0j})$, $t \in [0, T]$, является решением задачи Коши (2.4), (2.5), то эта функция является решением линейного уравнения Шрёдингера с зависящим от времени потенциалом

$$\mathbf{M}(t, x) = \hat{\mathbf{W}}(U(t)) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_j |u_j(t, x)|^2\right)^{p/2}, \quad (t, x) \in [0, T] \times [-\pi, \pi].$$

Поэтому отображение $[0, T] \to T_1^1(H)$, определенное равенством $\rho(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_j(t, u_{0j})}$, является решением задачи Коши для линейного уравнения Лиувилля–фон Неймана (2.6) с зависящим от времени потенциалом $\mathbf{M}(t, x), (t, x) \in [0, T] \times [-\pi, \pi]$. Поэтому так как $\mathbf{M}(t, x) = f(w_{\rho(t)}(x))$, то отображение $[0, T] \to T_1^1(H)$, определенное равенством $\rho(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_j(t, u_{0j})}$, является соболевским решением задачи Коши для нелинейного уравнения Лиувилля–фон Неймана (1.3), (1.4) с начальным условием $\rho_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_{0j}}$.

Следствие 1. Если $\rho(t)$, $t \in [0, T]$, – соболевское решение задачи Коши (1.3), (1.4), с начальным условием $\rho_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_j}$, то

$$\rho(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_j(t)}, \quad t \in [0, T], \tag{2.8}$$

где при каждом $j \in \mathbb{N}$ функция $u_j(t)$, $t \in [0, T]$ есть H^1-решение задачи Коши для уравнения (2.7) с начальным условием u_j и потенциалом $\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{V}(\rho(t))$, $t \in [0, T]$.

Преобразования пространства Соболева H^1, порождаемые нелинейным уравнением Шрёдингера (1.1), обладают следующими свойствами:

1) на каждом H^1-решении уравнения (1.1) H-норма значений решения постоянна: $\|u(t, u_0)\|_H = \|u_0\|_H$ $\forall t \in [0, T]$;

2) для каждого H^1-решения уравнения (1.1) сохраняет постоянное значение функционал энергии:

$$E(u(t, u_0)) = E(u_0), \text{ где } E(u) = \int_R \left[-\frac{1}{2}|\mathbf{D}u(x)|^2 + \frac{1}{p+2}|u(x)|^{p+2}\right] dx.$$

При этом преобразование пространства Соболева может не сохранять скалярное произведение пространства H и норму пространства H^1, т.е. равенство $(u(t, u_0), u(t, v_0))_H = (u_0, v_0)_H$, $t \in [0, T]$, и равенство $\|u(t, u_0)\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}$, $t \in [0, T]$, могут не быть выполнены. Покажем, что нелинейное преобразование множества соболевских состояний сохраняет ортогональность векторов в разложении оператора плотности (2.8).

Следствие 2. Пусть $\rho(t)$, $t \in [0, T]$, – соболевское решение задачи Коши (1.3), (1.4) с начальным условием $\rho_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_j}$. Тогда $(u_j(t), u_k(t))_H = (u_j, u_k)_H$ $\forall t \in [0, T]$, где $u_j(t)$, $u_k(t)$, $t \in [0, T]$ – векторы в разложении оператора плотности (2.8).

Доказательство. Достаточно напомнить, что в силу следствия 1 функции $u_j(t)$, $u_k(t)$, $t \in [0, T]$ – решения задачи Коши для линейного уравнения Шрёдингера (2.7) с начальным условием u_j, u_k соответственно и потенциалом $\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{V}(\rho(t))$, $t \in [0, T]$. Поскольку потенциал $\mathbf{V}$ является общим для эволюции вектор-функций, то

$$\frac{d}{dt}(u_j(t), u_k(t))_H = -i[(\mathbf{\Delta} + \mathbf{V}(\rho(t)))u_j(t), u_k(t))_H - (u_j(t), (\mathbf{\Delta} + \mathbf{V}(\rho(t)))u_k(t))_H] = 0.$$

Замечание. Теорема 1 демонстрирует тот факт, что задача Коши для уравнения относительно неизвестной функции со значениями пространстве операторов плотности квантовой системы эквивалентна задаче Коши для уравнения относительно неизвестной функции со значениями в расширенном гильбертовом пространстве. При этом расширенное гильбертово пространство описывает квантовую динамику на графе (см. [17]), образованном конечным или счетным множеством ребер со специальным выбором граничных условий (однородных условий Дирихле на каждом ребре) и специальным нелинейным потенциалом взаимодействия, определяемым равенством (2.3).

3. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ–ФОН НЕЙМАНА

Установленная эквивалентность задач Коши для уравнения Лиувилля–фон Неймана (1.3), (1.4) и для нелинейного уравнения Шрёдингера (2.4), (2.5) позволяют получить следующие результаты на основании работ [1], [18].

Теорема 2. *Пусть* $p \geq 0$. *Пусть начальное состояние* (1.4) *задается оператором плотности*

$$\rho_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_j}, \tag{3.1}$$

где $\{u_j, j = 1,\ldots,m,\ldots\}$ *– ортонормированная система векторов пространства* H. *Пусть, кроме того,* $\rho_0 \in T_1^1(H)$. *Тогда для любого* $M > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что если* $\|\rho_0\|_{T_1^1(H)} < M$, *то на промежутке* $[-\delta,\delta]$ *задача Коши* (1.3), (1.4) *имеет единственное соболевское решение*.

Доказательство. Существование на отрезке $[-\delta,\delta]$ соболевского решения задачи Коши (1.3), (1.4) с начальным условием (3.1) равносильно существованию на том же отрезке решения задачи Коши (2.4), (2.5) с начальным условием $U_0 = \oplus_{j=1}^{\infty}\sqrt{p_j}u_j$. Для задачи Коши (2.4), (2.5) в работах [1], [18] с использованием тех же методов, что и в работах [3], [4], [8], установлена теорема о локальном существовании и единственности решения при $p \geq 0$, из которой в силу теоремы 1 следует утверждение теоремы 2.

4. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Определим на множестве соболевских состояний $T_1^1(H)$ функционал E, сопоставляющий каждому соболевскому состоянию ρ число

$$E(\rho) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{D}\rho\mathbf{D}) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p+2}(\rho(x,x))^{p/2+1}dx.$$

Теорема 3. *Пусть* $p \geq 0$. *Пусть начальное состояние* (1.4) *задается оператором плотности* (3.1). *Пусть, кроме того,* $u_j \in H^1$ $\forall j \in \mathbb{N}$ *и* $\rho_0 \in T_1^1(H)$. *Тогда если* $\rho(t)$, $t \in [0,T]$ *– соболевское решение задачи* (1.3), (1.4), *то* $E(\rho(t)) = E(\rho_0)$, $t \in [0,T]$.

Доказательство. Заметим, что $E(\rho(t)) = \mathcal{E}(U(t))$, где

$$\mathcal{E}(U) = -\frac{1}{2}(\nabla U,\nabla U)_{\mathcal{H}} + \int_R F(|U(x)|^2)dx.$$

Здесь

$$(\nabla U,\nabla U)_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(\mathbf{D}u_j,\mathbf{D}u_j)_H, \quad |U(t,x)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j|u_j(t,x)|^2$$

для функции U, имеющей вид $U = \oplus_{j=1}^{\infty}\sqrt{p_j}u_j$, и $F(s) = \dfrac{1}{p+2}s^{\frac{p+2}{2}}$.

Сохранение энергии $\mathcal{E}$ на вектор-функциях $U(t)$, $t \in [0,T]$, являющихся решением задачи Коши (2.4), (2.5), установлено в работах [1], [18]. Поэтому утверждение теоремы 3 следует из теоремы 1.

5. ГЛОБАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Теорема 4. *Пусть* $p \in [0,4)$ *и* $\rho_0 \in T_1^1(H)$. *Тогда соболевское решение задачи Коши* (1.3), (1.4) *существует и единственно на всей числовой прямой* $\mathbb{R}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 об эквивалентности задач Коши (1.3), (1.4) и (2.4), (2.5) достаточно показать глобальную продолжимость решения задачи Коши (2.4), (2.5). Пусть $\|\rho_0\|_{T_1^1(H)} = M$. Тогда если $U_0 = \oplus_{j=1}^{\nu}\sqrt{p_j}u_{0,j}$, то $U_0 \in \mathcal{H}_1$ и $\|U_0\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \|\rho_0\|_{T_1^1(H)}$. Согласно теореме 2 (см. [18]) существует $\delta = \delta(M)$ такое, что на отрезке $[0,\delta]$ существует единственное $\mathcal{H}^1$-решение $U(t,U_0)$, $t \in [0,\delta]$, задачи Коши (2.4), (2.5).

Пусть T^* – точная верхняя грань множества длин промежутков существования соболевского решения задачи Коши (1.3), (1.4) и, следовательно, $\mathcal{H}^1$-решений задачи Коши (2.4), (2.5). Как установлено в (см. [1], [18]), либо $T^* \in (0,+\infty)$ и $\lim_{t\to T^*-0} \|U(t)\|_{\mathcal{H}^1} = +\infty$, либо $T^* = +\infty$ и $\overline{\lim}_{t\to+\infty} \|U(t)\|_{\mathcal{H}^1} < +\infty$.

В работе [1] установлено, что H^1-решения u задачи Коши (1.1), (1.2) при $p \in [0,4)$ из условия $F(s) \le Cs^{p/2+1}$ следует ограниченность величины $\sup_{t\in[0,T^*)}(\nabla U(t), \nabla U(t))_{H^1}$. Покажем, что подобное утверждение имеет место и для $\mathcal{H}^1$-решения задачи Коши (2.4), (2.5), и, следовательно, для соболевского решения задачи Коши (1.3), (1.4).

В силу теоремы 3 для любого $t \in [0,T^*)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\|\nabla U(t)\|^2_{\mathcal{H}} = -E(\rho_0) + \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k(U)|u_k(t,x)|^2\right)dx, \tag{5.1}$$

где $F(s) = \dfrac{1}{p+2}s^{1+p/2}$.

Оценим сверху потенциальную энергию

$$\int_{-\pi}^{\pi} F\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k(U)|u_k(t,x)|^2\right)dx = \frac{1}{p+2}\|f(t,\cdot)\|^{p+2}_{p+2},$$

где

$$f(t,x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k|u_k(t,x)|^2\right)^{1/2}, \quad x \in (-\pi,\pi), \quad t \in [0,T^*),$$

посредством кинетической энергии $\frac{1}{2}\|\nabla U(t)\|^2_{\mathcal{H}}$.

Следуя подходу работ [5], [18], заметим, что если $f \in C([0,T^*), H^1)$, то в силу неравенства Гальярдо–Ниренберга–Брезиса (см. [1], [19]) при каждом $p \in [0,4)$ существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что справедлива оценка

$$\|f(t)\|_{p+2} \le c_2\|f(t)\|^{1-\theta}_H \|f(t)\|^{\theta}_{H^1} \quad \forall t \in [0,T^*), \tag{5.2}$$

где $\theta = \dfrac{p}{2p+4} \in (0,1)$.

Заметим, что $\|f(t)\|_2 = 1\ \forall t \in [0,T_1)$. Кроме того, имеем

$$\nabla f(t,x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k|u_k(t,x)|^2\right)^{-1/2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} p_k(\nabla\bar{u}_k(t,x)u_k(t,x) + \bar{u}_k(t,x)\nabla u_k(t,x))\right].$$

Из этого следует, что

$$|\nabla f(t,x)| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k|u_k(t,x)|^2\right)^{-1/2}\sum_{k=1}^{\infty} p_k\,|u_k(t,x)|\,|\nabla u_k(t,x)|,$$

поэтому согласно неравенству Коши–Буняковского получим

$$|\nabla f(t,x)| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k|\nabla u_k(t,x)|^2\right)^{1/2}.$$

Значит,

$$\|\nabla f(t)\|^2_H \le \|\nabla U(t)\|^2_{\mathcal{H}} \quad \forall t \in (0,T^*).$$

Поскольку $U(t) \in \mathcal{H}^1\ \forall t \in [0, T^*)$, то выполняется включение $f(t, \cdot) \in H^1\ \forall t \in [0, T^*)$ и оценка

$$\|f(t)\|_{H^1} \leq c_1 \|U(t)\|_H + \|U(t)\|_{\mathcal{H}^1}$$

для любого $t \in (0, T^*)$.

Следовательно, согласно неравенству (5.2), справедлива оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi} F\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k(U)|u_k(t,x)|^2\right)dx \leq C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\|\nabla U(t)\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\beta} \quad \forall t \in [0, T^*),$$

где $\beta = (p+2)\theta = \dfrac{p}{2} \in (0, 2)$, и поэтому в силу (5.1) справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\|\nabla U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_3 + C_2\, \|\nabla U\|_{\mathcal{H}}^2)^{\beta} \quad \forall t \in [0, T_*).$$

Поэтому $T_* = +\infty$ (см. [3], [18]).

Следовательно, соболевское решение задачи Коши (1.3), (1.4) продолжимо на полуось R_+ и множество его значений в пространстве $T_1^1(H)$ ограничено.

6. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Теорема 5. *Пусть* $p \in [4, +\infty)$ *и пусть* $\rho_0 \in T_1^3(H)$. *Тогда если* $E(\rho) > 0$, *то найдется число* $T_1 \in (0, +\infty)$ *такое, что соболевское решение задачи Коши* (1.3), (1.4) *существует лишь на промежутке* $[0, T_1)$. *При этом соблевское решение* $\rho(t, \rho_0)$, $t \in [0, T_1)$, *единственно на промежутке* $[0, T_1)$ *и*

$$\lim_{t \to T_1 - 0} \|\rho(t, \rho_0)\|_{T_1^1} = +\infty. \tag{6.1}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 5 достаточно показать, что найдется $T_1 \in (0, +\infty)$ такое, что $\mathcal{H}^1$-решение задачи Коши (2.4), (2.5) с начальным условием $U_0 = \oplus_{j=1}^{\infty}\sqrt{p_j}u_{0,j}$ существует лишь на промежутке $[0, T_1)$. При этом $\mathcal{H}^1$-решение $U(t, U_0)$, $t \in [0, T_1)$, единственно на промежутке $[0, T_1)$ и

$$\lim_{t \to T_1 - 0} \|U(t, U_0)\|_{\mathcal{H}^1} = +\infty.$$

Прежде всего заметим, что если $\rho_0 \in T_1^3(H)$, то $U_0 \in \mathcal{H}^3$. Поэтому если $U(\cdot, U_0) \in C([0, T_1), \mathcal{H}^1)$ есть $\mathcal{H}^1$-решение задачи Коши (2.4), (2.5) с начальным условием $U_0 = \oplus_{j=1}^{\infty}\sqrt{p_j}u_{0,j}$, то $U(\cdot, U_0) \in$ $\in C([0, T_1), \mathcal{H}^3)$. Тогда если

$$G(t) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2|U(t,x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \int_{-\pi}^{\pi} x^2|u_k(t,x)|^2 dx, \quad t \in [0, T_1),$$

то анализ динамики величины $G(t)$, $t \in [0, T_1)$, позволяет установить явление градиентного взрыва и явление самофокусировки решения задачи Коши в точке $x_0 = 0$ (см. [1]).

Также, как и в работах [3], [18] устанавливается, что

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t) \leq 8\|\nabla U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - 4\int_{-\pi}^{\pi}\Big[|U(t,x)|^2 f(|U(t,x)|^2) - F(|U(t,x)|^2)\Big]dx, \quad t \in (0, T_1),$$

где

$$f(s) = (s)^{p/2} \quad \text{и} \quad F(s) = \int_0^s f(t)dt = \frac{1}{p+2}(s)^{p/2+1}.$$

Тогда при $p \geq 4$ на интервале существования решения $(0, T_1)$ выполняется неравенство

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t) \leq 8\|\nabla U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - 2p\int_{-\pi}^{\pi} F(|U(t,x)|^2)dx = -2pE(U(t)) + (8 - 2p)\|\nabla U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq -2pE(U_0).$$

Отсюда следует ограниченность сверху промежутка существования решения. Следуя подходу работы [3], получаем (6.1).

Замечание. Неограниченный рост при $t \to T_1 - 0$ нормы $\mathcal{H}^1$-решения задачи Коши (2.4), (2.5) (или, что то же самое, $T_1^1(H)$-нормы соболевского решения (1.3), (1.4)) еще не означает существования компоненты $u_k(t,\cdot)$, $t \in [0,T_1)$, смешанного состояния, имеющей неограниченный рост H^1-нормы при $t \to T_1 - 0$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье получены условия на параметры нелинейного оператора в нелинейном уравнении Лиувилля–фон Неймана, при которых задача Коши (1.3), (1.4) задает однопараметрическую группу линейных преобразований пространства соболевских квантовых состояний $T_1^1(H)$. Показано, что при нарушении этих условий может иметь место явление разрушения соболевского решения задачи Коши (1.3), (1.4).

В работе [1] предложена процедура продолжения решения задачи Коши (1.1), (1.2) для нелинейного уравнения Шрёдингера через момент T_1 разрушения H^1-решения с помощью отображения временной полуоси $[0,+\infty)$ в пространство квантовых состояний $\Sigma(H)$, определяемого регуляризацией исходной задачи (1.1), (1.2). Рассматриваемое в настоящей работе уравнение Лиувилля–фон Неймана (1.3) имеет то преимущество перед уравнением Шрёдингера (1.1), что и решение уравнения (1.3), и его регуляризация, и предельные точки семейства регуляризованных решений представляют собой отображения временной полуоси $[0,+\infty)$ в пространство состояний $\Sigma(H)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Efremova L.S., Grekhneva A.D., Sakbaev V.Zh.* Phase flow generated by Cauchy problem for nonlinear Schrodinger equation and dynamical mappings of quantum states // Lobachevski J. of Math. 2019. T. 40. № 10. P. 1455–1469.
2. *Таланов В.И.* О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ. 1964. Т. 2. № 5. С. 218–222.
3. *Glassey R.T.* On the blowing up of solution to the Cauchy problem for nonlinear Schrodinger equations // J. Math. Phys. 1977. V. 18. № 4. P. 1794–1797.
4. *Zhidkov P.E.* Korteweg de Vries and nonlinear Schrodinger equations: Qualitative theory. Lect. Notes Math., V. 1756. Berlin: Springer, 2001.
5. *Merle F., Tsutsumi Y.* L_2 convergence of blow-up solutions for nonlinear Shrodinger equation with critical power nonlinearity // J. of Differ. Equat. 1990. V. 84. P. 205–214.
6. *Насибов Ш.М.* О коллапсе решений задачи Коши для кубического эволюционного уравнения Шрёдингера // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 1. С. 76–83.
7. *Tsvetkov N.* Invariant measures for the defocusing nonlinear Schrodinger equation // Annales de l'Institute Fourier. 2008. V. 58. № 7. P. 2543–2604.
8. *Сакбаев В.Ж.* Градиентный взрыв решений задачи Коши для нелийного уравнения Шрёдингера // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 171–187.
9. *Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж.* Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп // Теор. и матем. физ. 2015. Т. 185. № 2. С. 252–271.
10. *Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н.* Гамильтоновы меры Фейнмана, интеграл Колмогорова, бесконечномерные псевдодифференциальные оператора // Докл. АН. 2019. Т. 488. № 3. С. 243–247.
11. *Арсеньев А.А.* О состояниях Кубо–Мартина–Швингера классических динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством // Теор. и матем. физ. 1979. Т. 38. № 3. С. 306–312.
12. *Волович И.В., Сакбаев В.Ж.* О квантовой динамике на C^*-алгебрах // Труды МИАН. 2018. Т. 301. С. 33–47.
13. *Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж.* Геометрические свойства систем векторных состояний и разложение состояний в интегралы Петтиса // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 4. С. 1–14.
14. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
15. *Холево А.С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой механики. М.: Наука, 1980.
16. *Шерстнев А.Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008.
17. *Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Диффузия и квантовая динамика на графах // Докл. АН. 2013. Т. 451. № 2. С. 141–145.
18. *Грехнева А.Д.* О явлении взрыва решений задачи Коши–Дирихле для нелинейного уравнения Шрёдингера на отрезке // Труды МФТИ. 2016. Т. 8. № 1. С. 123–134.
19. *Brezis H.* Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, 2011.