УДК 517.958

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДАРВИНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В НЕОДНОРОДНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

© 2020 г. А. В. Калинин[1,2,*], А. А. Тюхтина[1,]**

[1] *603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, ННГУ, Россия*

[2] *603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 66, ИПФ РАН, Россия*

**e-mail: avk@mm.unn.ru*

***e-mail: kalinmm@yandex.ru*

Поступила в редакцию 15.02.2020 г.
Переработанный вариант 15.02.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Исследуется квазистационарное дарвиновское приближение для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах. Доказывается теорема о существовании и единственности решения начально-краевой задачи для возникающей системы дифференциальных уравнений. Приводятся оценки близости решений рассматриваемой квазистационарной задачи и соответствующей нестационарной задачи в зависимости от характерных значений данных. Библ. 37.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, квазистационарное приближение, приближение Дарвина, неоднородные среды.

DOI: 10.31857/S0044466920080104

1. ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений Максвелла в гауссовой системе единиц имеет вид [1]

$$\operatorname{rot}\vec{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}(x,t)}{\partial t}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(x,t)}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}(x,t) = 0, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{D}(x,t) = 4\pi\rho(x,t), \tag{1.4}$$

где $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, $T>0$. Предполагается, что векторные поля $\vec{H}$, $\vec{J}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ удовлетворяют линейным материальным соотношениям

$$\vec{D}(x,t) = \varepsilon(x)\vec{E}(x,t),\quad \vec{B}(x,t) = \mu(x)\vec{H}(x,t),\quad \vec{J}(x,t) = \sigma(x)\vec{E}(x,t) + \vec{J}^{\text{ст}}(x,t), \tag{1.5}$$

где $\vec{J}^{\text{ст}}$ – объемная плотность сторонних токов.

Система (1.1)–(1.5) будет рассматриваться при следующих граничных и начальных условиях:

$$\vec{E}(x,t)\times\vec{\nu}(x) = 0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),$$

где $\vec{\nu}(x)$ – единичный вектор внешней нормали в точке $x\in\partial\Omega$,

$$\vec{H}(x,0) = \vec{h}(x),\quad \vec{E}(x,0) = \vec{e}(x),\quad x\in\Omega.$$

В прикладных задачах для моделирования достаточно медленных электромагнитных процессов вместо системы (1.1)–(1.5) часто используются различные квазистационарные приближения [1]–[3]. При моделировании относительно медленных электромагнитных процессов в плазме получило достаточно широкое распространение приближение Дарвина [1], [4]–[9]. В этом приближении полагается, что ток смещения $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\vec{E}$ в уравнении (1.1) можно заменить на $-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi$, где

$$\vec{E} = \vec{\mathscr{E}} - \mathrm{grad}\,\varphi, \quad \mathrm{div}\,\varepsilon\vec{\mathscr{E}} = 0. \tag{1.6}$$

Для областей, заполненных неоднородной проводящей средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$, первое уравнение системы в этом приближении принимает вид

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{J} - \frac{1}{c}\varepsilon(x)\frac{\partial\,\mathrm{grad}\,\varphi(x,t)}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Система (1.7), (1.2)–(1.5) в этом случае рассматривается при граничных и начальных условиях

$$\vec{E}(x,t)\times\vec{\nu}(x) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \quad \vec{H}(x,0) = \vec{h}(x), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x\in\Omega. \tag{1.8}$$

Вопросы о иерархии различных квазистационарных приближений обсуждаются в работах [2], [10], [11]. В частности, в [11] отмечается, что приближение Дарвина охватывает используемые при моделировании различных физических процессов традиционные нерелятивистское магнитное приближение и нерелятивистское электрическое приближение [1]–[3].

Для медленно протекающих процессов в средах с достаточно высокой проводимостью характерно нерелятивистское магнитное приближение, которое также называется магнитным гидродинамическим приближением или просто квазистационарным приближением [1]–[3], [12]. Формально это приближение заключается в пренебрежении током смещения, т.е. в уравнении (1.1) можно положить $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \approx 0$. Различным аспектам математического и численного моделирования, исследованию корректности различных постановок задач для этого приближения посвящена достаточно обширная литература, в частности – работы [13]–[25]. В работах [13]–[15] обсуждается обоснование квазистационарного магнитного приближения.

Другое квазистационарное приближение, называемое нерелятивистским электрическим приближением [2], применяется для описания достаточно медленных процессов в средах с малой проводимостью. В частности, традиционно используется при моделировании электромагнитных процессов в атмосфере [26]–[31]. Формально это приближение заключается в пренебрежении слагаемым $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ в уравнении (1.2), что приводит к потенциальности электрического поля в пространственно-односвязных областях.

В работах [10], [32]–[34] получены строгие результаты о корректности задач для линейной системы уравнений Максвелла (1.1)–(1.4) в рамках приближения Дарвина и установлена асимптотическая связь между решениями задач, полученных в рамках дарвиновского приближения, и решениями соответствующих задач для исходной нестационарной системы Максвелла при малом значении параметра $\beta = \Delta x/(c\Delta t)$, где Δx – характерный пространственный масштаб, Δt – характерный временной масштаб, c – скорость света. В этих работах предполагалось, что в системе (1.1)–(1.4) объемная плотность тока $\vec{J}$ и объемная плотность заряда ρ – заданные функции, что формально соответствует предположению о непроводящей среде (в (1.5) $\sigma \equiv 0$). В этом случае задача определения электрического и магнитного полей разбивается на независимые друг от друга эллиптические задачи поиска потенциальной составляющей электрического поля $\vec{E}_L = -\mathrm{grad}\,\varphi$, магнитной индукции $\vec{B}$ и вихревой составляющей электрического поля $\vec{E}_T = \vec{\mathscr{E}}$.

В настоящей работе изучается приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах. Условие неоднородности сред приводит, в отличие от работ [32]–[34], к связанной системе дифференциальных уравнений для неизвестных функций $\vec{H}$, $\vec{\mathscr{E}}$, $-\mathrm{grad}\,\varphi$, не сводящейся к классическим задачам математической физики. Доказывается теорема о существовании и единственности решения начально-краевой задачи для системы уравнений Максвелла в указанном приближении при общих условиях на коэффициенты. Для строгого исследования решений задачи используется метод Фаэдо–Галеркина. Приводятся оценки близости решения задачи к решению соответствующей нестационарной задачи через норму производной по времени напряженности поля сторонних токов. Рассматриваемые оценки зависят от двух безразмерных параметров: β и $\gamma = 4\pi\sigma^*\Delta t$, где σ^* – характерное значение удельной проводимости, и получены при дополнительном условии согласования начальных данных

$$\operatorname{rot}\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{e} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{\text{ст}}(0), \quad \operatorname{rot}\vec{e} = 0, \tag{1.9}$$

позволяющем избежать эффекта пограничного слоя по времени.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В работе предполагается, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару в $\mathbb{R}^3$ с липшиц-непрерывной границей Γ, в почти каждой точке $x \in \Gamma$ определен единичный вектор внешней нормали $\vec{\nu}(x)$.

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [35], [36]:

$$H(\operatorname{div};\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div}\vec{u} \in L_2(\Omega)\}, \quad K(\operatorname{div};\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div}\vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{\operatorname{div}} = (\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{div}\vec{u},\operatorname{div}\vec{v})_{2,\Omega},$$

$$H(\operatorname{rot};\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot}\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\}, \quad K(\operatorname{rot};\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot}\vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{\operatorname{rot}} = (\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{rot}\vec{u},\operatorname{rot}\vec{v})_{2,\Omega},$$

где через $(\cdot,\cdot)_{2,\Omega}$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Через $H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $H_0(\operatorname{div};\Omega)$ обозначается замыкание множества пробных вектор-функций $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ соответственно в $H(\operatorname{rot};\Omega)$ и $H(\operatorname{div};\Omega)$, $K_0(\operatorname{rot};\Omega) = K(\operatorname{rot};\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $K_0(\operatorname{div};\Omega) = K(\operatorname{div};\Omega) \cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$.

Справедливы следующие утверждения (см. [35], [36]).

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – липшицева область. Функция $\vec{u} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$ лежит в классе $H_0(\operatorname{rot};\Omega)$ тогда и только тогда, когда при всех $\vec{v} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$*

$$\int_\Omega (\operatorname{rot}\vec{u}\cdot\vec{v})dx = \int_\Omega (\operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{u})dx.$$

Лемма 2. *Для любой функции $\vec{u} \in K(\operatorname{rot};\Omega)$ найдется функция $p \in H^1(\Omega)$ такая, что $\vec{u} = \operatorname{grad} p$. Если $\vec{u} \in K_0(\operatorname{rot};\Omega)$, можно выбрать $p \in H_0^1(\Omega)$.*

Пусть $\eta : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \{L_2(\Omega)\}^3$ – непрерывный линейный самосопряженный оператор такой, что при некоторых $\eta_1, \eta_2 > 0$ имеем

$$\eta_1 \|\vec{u}\|^2_{2,\Omega} \le (\eta\vec{u},\vec{u})_{2,\Omega} \le \eta_2 \|\vec{u}\|^2_{2,\Omega}$$

для всех $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Обозначим через $\{L_2(\eta;\Omega)\}^3$ пространство $\{L_2(\Omega)\}^3$, снабженное скалярным произведением $(\vec{u},\vec{v})_\eta = (\eta\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega}$. Положим также

$$K(\operatorname{div}\eta;\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \eta\vec{u} \in K(\operatorname{div};\Omega)\},$$

$$K_0(\operatorname{div}\eta;\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \eta\vec{u} \in K_0(\operatorname{div};\Omega)\},$$

$$U_1(\eta;\Omega) = K(\operatorname{div}\eta;\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot};\Omega), \quad U_2(\eta;\Omega) = K_0(\operatorname{div}\eta;\Omega) \cap H(\operatorname{rot};\Omega).$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *Ортогональное дополнение к $K(\operatorname{div}\eta;\Omega)$ в $\{L_2(\eta;\Omega)\}^3$ совпадает с подпространством $K_0(\operatorname{rot};\Omega)$.*

Лемма 4. *Ортогональное дополнение к $K_0(\operatorname{div}\eta;\Omega)$ в $\{L_2(\eta;\Omega)\}^3$ совпадает с подпространством $K(\operatorname{rot};\Omega)$.*

Леммы 3, 4 вытекают из соответствующих утверждений для $\eta \equiv 1$, доказанных в [35], [36], поскольку

$$\eta K(\operatorname{div}\eta;\Omega) = K(\operatorname{div};\Omega), \quad \eta K_0(\operatorname{div}\eta;\Omega) = K_0(\operatorname{div};\Omega).$$

Лемма 5. *Существует такая постоянная $C(\Omega) > 0$, зависящая только от области Ω, что для всех $\vec{u} \in U_i(\eta;\Omega)$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство*

$$\int_\Omega (\vec{u})^2 dx \leq C(\Omega)\int_\Omega (\operatorname{rot}\vec{u})^2 dx. \tag{2.1}$$

Лемма доказана, например, в [24].

3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА

Система уравнений Максвелла (1.1)–(1.4) с учетом материальных соотношений (1.5) в гауссовой системе единиц записывается в виде

$$\operatorname{rot}\vec{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\sigma(x)\vec{E}(x,t) + \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{\text{ст}}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(x)\vec{E}(x,t), \tag{3.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mu(x)\vec{H}(x,t), \tag{3.2}$$

$(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$.

Система (3.1), (3.2) рассматривается при однородных краевых условиях

$$\vec{E}(x,t) \times \vec{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \tag{3.3}$$

и начальных условиях

$$\vec{H}(x,0) = \vec{h}(x), \quad \vec{E}(x,0) = \vec{e}(x). \tag{3.4}$$

Неизвестные функции $\vec{J}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ могут быть найдены из соотношений (1.5), уравнение (1.4) служит для опредения функции ρ.

В работе предполагается, что $\vec{J}^{\text{ст}} : Q \to \mathbb{R}^3$, $\vec{h} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{e} : \Omega \to R^3$ – суммируемые с квадратом функции, μ, σ, ε – функции из $L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющие условиям

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon(x) \leq \varepsilon_2, \quad \mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_2, \quad \sigma_1 \leq \sigma(x) \leq \sigma_2,$$

μ_i, σ_i, ε_i $(i = 1, 2)$ – заданные положительные числа.

Определим следующие гильбертовы пространства вектор-функций:

$V(\Omega) = H(\operatorname{rot};\Omega) \times H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $L(\Omega) = \{L_2(\Omega)\}^3 \times \{L_2(\Omega)\}^3$ со скалярным произведением

$$(\Phi_1,\Phi_2)_L = (\vec{u}_1,\vec{u}_2)_\mu + (\vec{v}_1,\vec{v}_2)_\varepsilon, \quad \Phi_i = \{\vec{u}_i,\vec{v}_i\} \in L(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

Пусть $A : V(\Omega) \to L(\Omega)$ – линейный оператор, определенный соотношением

$$A\Phi = \left\{\mu^{-1}\operatorname{rot}\vec{v}, -\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\vec{u}\right\}, \quad \Phi = \{\vec{u},\vec{v}\} \in V(\Omega).$$

Тогда задача (3.1)–(3.4) допускает следующую обобщенную постановку.

Найти такую функцию $\Psi = \{\vec{H},\vec{E}\} \in L_2(0,T,L(\Omega))$, что для всех $\Phi = \{\vec{u},\vec{v}\} \in V(\Omega)$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\Psi,\Phi)_L - (\Psi,A\Phi)_L + \frac{4\pi}{c}(\sigma\vec{E},\vec{v})_{2,\Omega} - \frac{4\pi}{c}(\vec{J}^{\text{ст}},\vec{v})_{2,\Omega}, \tag{3.5}$$

$$\Psi(0) = \Psi_0 = \{\vec{h},\vec{e}\}. \tag{3.6}$$

Введем оператор $B : L(\Omega) \to L(\Omega)$, $B\Phi = \{0, \varepsilon^{-1}\sigma\vec{v}\}$ и функционал $f : L(\Omega) \to \mathbb{R}^1$, $f(\Phi) = (\vec{J}^{\text{ст}},\vec{v})_{2,\Omega}$. Тогда равенство (3.5) примет вид

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\Psi,\Phi)_L - (\Psi,A\Phi)_L + \frac{4\pi}{c}(B\Psi,\Phi)_L = -\frac{4\pi}{c}f(\Phi).$$

Справедлива

Теорема 1. *Для любых* $\Psi_0 \in L(\Omega)$, $\vec{J}^{\text{ст}} \in L_2(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$ *существует единственное решение* $\Psi \in L_2(0,T,L(\Omega))$ *задачи* (3.5), (3.6). *Если* $\Psi_0 \in V(\Omega)$, $\vec{J}^{\text{ст}} \in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$, *то* $\Psi \in L_2(0,T,V(\Omega))$, $\partial/\partial t\Psi \in L_\infty(0,T,L(\Omega))$ *и справедливы соотношения* (3.1), (3.2).

Теорема доказывается так же, как соответствующие утверждения в [37] (теоремы 4.1, 5.1 главы VII).

Из (3.2) вытекает, что при $\vec{h} \in U_2(\mu;\Omega)$ для решения задачи (3.1)–(3.4) выполнено условие

$$\mu(x)\vec{H}(x,t)\cdot\vec{\nu}(x) = 0, \quad (x,t)\in\Gamma\times(0,T).$$

Пусть Δx – характерный пространственный масштаб, Δt – характерный временной масштаб, σ^* – характерное значение удельной проводимости, ρ^* – характерное значение плотности заряда. Заменим переменную x на $\Delta x\cdot x'$, t на $\Delta t\cdot t'$. Положим $\sigma = \sigma^*\sigma_0$, $\sigma_{01} \le \sigma_0(x') \le \sigma_{02}$, и введем следующие обозначения:

$$\gamma = 4\pi\Delta t\sigma^*, \quad \beta = \frac{\Delta x}{c\Delta t}, \quad \kappa = 4\pi\Delta x\rho^*, \quad \vec{J}^{\text{ст}} = \sigma^*\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}.$$

Система уравнений Максвелла (3.1), (3.2) принимает вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \gamma\beta\sigma_0\vec{E} + \gamma\beta\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}} + \beta\frac{\partial}{\partial t'}\varepsilon\vec{E}, \tag{3.7}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t'}\mu\vec{H}, \tag{3.8}$$

где $(x',t')\in Q' = \Omega'\times(0,T')$.

Система (3.7), (3.8) рассматривается при однородных краевых условиях

$$\vec{E}(x',t')\times\vec{\nu}(x') = 0, \quad (x',t')\in\Gamma'\times(0,T'), \tag{3.9}$$

соответствующих (3.3), и начальных условиях

$$\vec{H}(x',0) = \vec{h}(x'), \quad \vec{E}(x',0) = \vec{e}(x'). \tag{3.10}$$

Уравнение (1.4) примет в безразмерных величинах вид

$$\kappa\rho = \operatorname{div}\varepsilon\vec{E}.$$

Условие (1.9) на начальные данные в безразмерных величинах записывается в виде

$$\operatorname{rot}\vec{h} = \beta\gamma\sigma_0(\vec{e} + \vec{E}^{\text{ст}}(0)), \quad \operatorname{rot}\vec{e} = 0. \tag{3.11}$$

Далее, для удобства, будем опускать штрихи при безразмерных переменных (x',t') и области их изменения $Q' = \Omega'\times(0,T')$.

Лемма 6. *Пусть выполнено условие* (3.11). *Тогда для решения задачи* (3.7)–(3.10) *имеет место оценка*

$$\int_0^T\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right\|_{2,\Omega}^2 dt \le \frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}\left(1-\exp\left(-\frac{\gamma\sigma_{01}}{\varepsilon_1}T\right)\right)^2\int_0^T\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,\Omega}^2 dt. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$ – базис в $V(\Omega)$ такой, что $\Psi_0 = g_0\Phi_1$. Докажем неравенство для приближенного решения задачи (3.7)–(3.10), имеющего вид

$$\Psi_n = \sum_{i=1}^n g_{in}(t)\Phi_i, \quad \Psi_n(0) = \Psi_0,$$

$$\beta\frac{d}{dt}(\Psi_n,\Phi_j)_L + (A\Psi_n,\Phi_j)_L + \beta\gamma(B\Psi_n,\Phi_j)_L - \beta\gamma f(\Phi_j), \quad j = 1,\ldots,n. \tag{3.13}$$

При $t = 0$ имеем

$$\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n(0),\Phi_j\right)_L + (A\Psi_0,\Phi_j)_L + \beta\gamma(B\Psi_0,\Phi_j)_L = -\beta\gamma f(\Phi_j), \quad j = 1,\ldots,n. \tag{3.14}$$

Умножая (3.14) на $g'_{jn}(0)$ и суммируя по $j = 1, \ldots, n$, получаем

$$\beta\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n(0)\right\|_L^2 - \left(\operatorname{rot}\vec{h}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n(0)\right)_{2,\Omega} + \beta\gamma\left(\sigma_0\vec{e}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n(0)\right)_{2,\Omega} = -\beta\gamma\left(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}, \frac{\partial}{lt}\vec{E}_n(0)\right)_{2,\Omega},$$
$$\partial/\partial t\Psi_n(0) = 0.$$

Продифференцируем (3.13) по t, умножим на g'_{jn}, просуммируем по $j = 1, \ldots, n$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n\right\|_L^2 + \gamma\left(B\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n, \frac{\partial}{\partial t}\Psi_n\right)_L = -\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right)_{2,\Omega}. \tag{3.15}$$

Отсюда получаем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n\right\|_L^2 + 2\gamma\int_0^t\left(B\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n, \frac{\partial}{\partial t}\Psi'_n\right)_L dt = -2\gamma\int_0^t\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right)_{2,\Omega} dt,$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}_n, \frac{\partial}{\partial t}\vec{H}_n\right)_{2,\Omega} + \varepsilon_1\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right\|_{2,\Omega}^2 + 2\gamma\int_0^t\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n, \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right)_{2,\Omega} dt \le$$

$$\le 2\gamma\int_0^t\sigma_{02}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right\|_{2,\Omega} dt.$$

Пусть $y(t) = \left\{\int_0^t\left\|\partial/\partial t\vec{E}_n\right\|_{2,\Omega}^2 dt\right\}^{1/2}$, тогда

$$\varepsilon_1 y' + \gamma\sigma_{01}y \le \gamma\sigma_{02}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q},$$

$$y(t) \le \left(1 - \exp(-\gamma\sigma_{01}\varepsilon_1^{-1}t)\right)\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q},$$

откуда вытекает (3.12).

4. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ДАРВИНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Докажем корректность начально-краевой задачи для системы уравнений Максвелла в дарвиновском приближении (1.7), (1.2)–(1.5).

Согласно леммам 2, 3 можно положить

$$\vec{E}(t) = \vec{\mathscr{E}}(t) - \operatorname{grad}\varphi(t), \quad \vec{\mathscr{E}}(t) \in K(\operatorname{div}\varepsilon;\Omega), \quad \operatorname{grad}\varphi(t) \in K_0(\operatorname{rot};\Omega).$$

Система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении (1.7), (1.2)–(1.5) принимает в безразмерных единицах вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \beta\gamma\sigma_0\vec{E} + \beta\gamma\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}} - \beta\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\operatorname{grad}\varphi, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mu\vec{H}. \tag{4.2}$$

Система (4.1), (4.2) рассматривается при граничных условиях

$$\vec{E}(x,t)\times\vec{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma\times(0,T) \tag{4.3}$$

и начальных условиях

$$\vec{H}(x,0) = \vec{h}(x), \quad \operatorname{grad}\varphi(x,0) = \operatorname{grad}\varphi_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.4}$$

Введем гильбертовы пространства $V_0(\Omega) = H(\operatorname{rot};\Omega)\times K_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $U(\Omega) = H_0(\operatorname{rot};\Omega) \cap \cap K(\operatorname{div}\varepsilon;\Omega) = U_1(\varepsilon;\Omega)$, $(\vec{u},\vec{v})_U = (\vec{u},\vec{v})_{\operatorname{rot},\Omega}$.

Задача (4.1)–(4.4) допускает следующую постановку: найти $\Psi = \{\vec{H}, \operatorname{grad}\varphi\} \in L_2(0,T,V_0(\Omega))$ и $\vec{\mathscr{E}} \in L_2(0,T,U(\Omega))$ такие, что для всех $\Phi = \{\vec{u}, \operatorname{grad}\psi\} \in V_0(\Omega)$, $\vec{v} \in U(\Omega)$ имеем

$$\beta\frac{d}{dt}(\Psi,\Phi)_L + (\vec{\mathscr{E}}, \operatorname{rot}\vec{u})_{2,\Omega} - \beta\gamma(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} + \beta\gamma(\sigma_0 \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} = \beta\gamma(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}, \quad (4.5)$$

$$\beta\gamma(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}, \vec{v})_{2,\Omega} - \beta\gamma(\sigma_0 \operatorname{grad}\varphi, \vec{v})_{2,\Omega} - (\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{v})_{2,\Omega} = -\beta\gamma(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}, \vec{v})_{2,\Omega} \quad (4.6)$$

и

$$\Psi(0) = \Psi_0 = \{\vec{h}, \operatorname{grad}\varphi_0\}. \quad (4.7)$$

Условие на начальные данные задачи, эквивалентное (3.11), имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{h} = \beta\gamma\sigma_0(-\operatorname{grad}\varphi_0 + \vec{E}^{\text{ст}}(0)). \quad (4.8)$$

Теорема 2. *Пусть* $\vec{h} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$, $\vec{E}^{\text{ст}} \in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$ *и выполнено условие* (4.8). *Тогда существует единственное решение* Ψ, $\vec{\mathscr{E}}$ *задачи* (4.5)–(4.7). *При этом* $\Psi \in L_\infty(0,T,L(\Omega))$, $\partial/\partial t\Psi \in L_2(0,T,L(\Omega))$ *и справедливы соотношения* (4.1), (4.2). *Имеют место оценки*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi\right\|_{2,Q}^2 \le \frac{\varepsilon_2\sigma_{02}}{\varepsilon_1\sigma_{01}}\left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma\sigma_{01}}{\varepsilon_2}T\right)\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2, \quad (4.9)$$

$$\|\vec{\mathscr{E}}\|_{2,Q}^2 \le 2\gamma^2\beta^4\mu_2^2\sigma_{02}^2C^2(\Omega)\left(\frac{\varepsilon_2\sigma_{02}}{\varepsilon_1\sigma_{01}} + 1\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2, \quad (4.10)$$

где $C(\Omega)$ – *константа из неравенства* (2.1).

Доказательство. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$ – базис в $V_0(\Omega)$ такой, что $\Psi_0 = g_0\Phi_1$, $\Phi_j = \{\vec{u}_j, \operatorname{grad}\psi_j\}$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \ldots$ – базис в $U(\Omega)$. Определим приближенное решение задачи (4.5), (4.6), (4.7):

$$\Psi_n = \sum_{i=1}^n g_{in}(t)\Phi_i, \quad \Psi_n(0) = \Psi_0, \quad \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n h_{in}(t)\vec{v}_i,$$

$$\begin{gathered}\beta\frac{d}{dt}(\Psi_n,\Phi_j)_L + (\vec{\mathscr{E}}_n, \operatorname{rot}\vec{u}_j)_{2,\Omega} - \beta\gamma(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}_n, \operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega} + \beta\gamma(\sigma_0 \operatorname{grad}\varphi_n, \operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega} = \\ = \beta\gamma(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}, \operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega}, \quad j = 1, \ldots, n,\end{gathered} \quad (4.11)$$

$$\beta\gamma(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}_n, \vec{v}_j)_{2,\Omega} - \beta\gamma(\sigma_0 \operatorname{grad}\varphi_n, \vec{v}_j)_{2,\Omega} - (\vec{H}_n, \operatorname{rot}\vec{v}_j)_{2,\Omega} = -\beta\gamma(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}, \vec{v}_j)_{2,\Omega}, \quad j = 1, \ldots, n. \quad (4.12)$$

Умножим (4.11) на g_{jn}, (4.12) на h_{jn}, просуммируем по $j = 1, \ldots, n$ и получим

$$\frac{d}{dt}\|\Psi_n\|_L^2 + 2\gamma(\sigma_0\vec{E}_n, \vec{E}_n)_{2,\Omega} = -2\gamma(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}, \vec{E}_n)_{2,\Omega},$$

где $\vec{E}_n = \vec{\mathscr{E}}_n - \operatorname{grad}\varphi_n \in L_2(0,T,H_0(\operatorname{rot};\Omega))$,

$$\|\Psi_n(t)\|_L^2 + \gamma\sigma_{01}\int_0^t \|\vec{E}_n\|_{2,\Omega}^2\,dt \le \gamma\sigma_{02}\left\|\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2 + \|\Psi_0\|_L^2,$$

$$\|\Psi_n(t)\|_L^2 \le \gamma\sigma_{02}\left\|\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2 + \|\Psi_0\|_L^2,$$

$$\int_0^T \|\vec{E}_n\|_{2,\Omega}^2 dt \le \varepsilon_1^{-1}\int_0^T (\varepsilon\vec{\mathscr{E}}_n, \vec{\mathscr{E}}_n)_{2,\Omega}dt \le \frac{\varepsilon_2\sigma_{02}}{\varepsilon_1\sigma_{01}}\left\|\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2 + \frac{\varepsilon_2}{\gamma\sigma_{01}\varepsilon_1}\|\Psi_0\|_L^2.$$

При $t = 0$ из (4.12) получаем $\vec{E}_n(0) = 0$, из (4.11) следует, что

$$\beta\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n(0)\right\|_L^2 + \beta\gamma\left(\sigma_0 \operatorname{grad}\varphi_0, \operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_n(0)\right)_{2,\Omega} = \beta\gamma\left(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}(0), \operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_n(0)\right)_{2,\Omega},$$

т.е. $\partial/\partial t\Psi_n(0) = 0$.

Продифференцируем (4.11) и (4.12) по t, умножим на g'_{jn} и h'_{jn} соответственно, просуммируем по $j = 1, \ldots, n$ и получим

$$\frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n\right\|_L^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}_n, \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H}_n\right)_{2,\Omega} - \beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}_n, \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_n\right)_{2,\Omega} +$$

$$+ \beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_n, \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_n\right)_{2,\Omega} = \beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}, \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_n\right)_{2,\Omega},$$

$$\beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}_n, \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}_n\right)_{2,\Omega} - \beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_n, \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}_n\right)_{2,\Omega} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H}_n, \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}_n\right)_{2,\Omega} = -\beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}_n\right)_{2,\Omega},$$

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n\right\|_L^2 + 2\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n, \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right)_{2,\Omega} = -2\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right)_{2,\Omega},$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n\right\|_L^2 + \gamma\sigma_{01}\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right\|_{2,\Omega}^2 dt \le \gamma\sigma_{02}\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,\Omega}^2 dt, \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_1\left\|\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_n\right\|_{\Omega}^2 + \gamma\sigma_{01}\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_n\right\|_{2,\Omega}^2 dt \le \gamma\sigma_{02}\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,\Omega}^2 dt,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n\right\|_L^2 \le \gamma\sigma_{02}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2,$$

$$\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_n\right\|_{2,\Omega}^2 dt \le \frac{\varepsilon_2\sigma_{02}}{\varepsilon_1\sigma_{01}}\min\left\{1, \frac{\gamma\sigma_{01}}{\varepsilon_2}T\right\}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2,$$

$$\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}_n\right\|_{2,\Omega}^2 dt \le \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_n\right\|_{2,\Omega}^2 dt \le \frac{\varepsilon_2\sigma_{02}}{\varepsilon_1\sigma_{01}}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2.$$

Существует подпоследовательность Ψ_{n_k}, сходящаяся $*$-слабо в $L_\infty(0, T, L(\Omega))$ к некоторой функции $\Psi \in L_\infty(0, T, L(\Omega))$, при этом $\partial/\partial t\Psi_{n_k}$ сходится $*$-слабо в $L_\infty(0, T, L(\Omega))$ к $\Psi^1 \in L_\infty(0, T, L(\Omega))$, $\vec{\mathscr{E}}_{n_k}$ сходится слабо в $L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ к $\vec{\mathscr{E}} \in L_2(0, T, K(\varepsilon, \Omega))$. Для всех $\Phi \in L(\Omega)$, $\omega \in \mathscr{D}(0, T)$ имеем

$$\int_0^T(\Psi^1, \Phi)_L\omega dt = \lim_{n_k\to\infty}\int_0^T\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{n_k}, \Phi\right)_L\omega dt = -\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T(\Psi_{n_k}, \Phi)_L\omega' dt = -\int_0^T(\Psi, \Phi)_L\omega' dt,$$

т.е. $\partial/\partial t\Psi = \Psi^1 \in L_2(0, T, L(\Omega))$.

Пусть $\omega \in C^1([0, T])$, $\omega(T) = 0$. Умножим (4.11), (4.12) на ω и проинтегрируем по частям:

$$-\beta\int_0^T\omega'(\Psi_n, \Phi_j)_L dt + \int_0^T\omega(\vec{\mathscr{E}}_n, \operatorname{rot}\vec{u}_j)_{2,\Omega}dt - \beta\gamma\int_0^T\omega(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}_n, \operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega}dt +$$

$$+ \beta\gamma\int_0^T\omega(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi_n, \operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega}dt = \beta\gamma\int_0^T\omega(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}, \operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega}dt + \beta\omega(0)(\Psi_0, \Phi_j)_L,$$

$$\beta\gamma\int_0^T\omega(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}_n, \vec{v}_j)_{2,\Omega}dt - \beta\gamma\int_0^T\omega(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi_n, \vec{v}_j)_{2,\Omega}dt - \int_0^T\omega(\vec{H}_n, \operatorname{rot}\vec{v}_j)_{2,\Omega}dt =$$

$$= -\beta\gamma\int_0^T\omega(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}, \vec{v}_j)_{2,\Omega}dt, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Переходя к пределу при $n_k \to \infty$, получаем

$$-\beta\int_0^T \omega'(\Psi,\Phi_j)_L dt + \int_0^T \omega(\vec{\mathscr{E}},\operatorname{rot}\vec{u}_j)_{2,\Omega}dt - \beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\vec{\mathscr{E}},\operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega}dt +$$

$$+\beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega}dt = \beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}},\operatorname{grad}\psi_j)_{2,\Omega}dt + \beta\omega(0)(\Psi_0,\Phi_j)_L,$$

$$+\beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\vec{\mathscr{E}},\vec{v}_j)_{2,\Omega}dt - \beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi,\vec{v}_j)_{2,\Omega}dt - \int_0^T \omega(\vec{H},\operatorname{rot}\vec{v}_j)_{2,\Omega}dt =$$

$$= -\beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}},\vec{v}_j)_{2,\Omega}dt, \quad j = 1, \ldots, n.$$

По линейности имеем

$$-\beta\int_0^T \omega'(\Psi,\Phi)_L dt + \int_0^T \omega(\vec{\mathscr{E}},\operatorname{rot}\vec{u})_{2,\Omega}dt - \beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\vec{\mathscr{E}},\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}dt +$$

$$+\beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}dt = \beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}},\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}dt + \beta\omega(0)(\Psi_0,\Phi)_L,$$

$$\beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0(\vec{\mathscr{E}} - \operatorname{grad}\varphi,\vec{v})_{2,\Omega}dt - \int_0^T \omega(\vec{H},\operatorname{rot}\vec{v})_{2,\Omega}dt - \beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0 E^{\text{ст}},\vec{v})_{2,\Omega}dt$$

для всех Φ, являющихся линейными комбинациями Φ_i и $\vec{v}$, являющихся линейными комбинациями $\vec{v}_i$. Так как эти комбинации плотны в $V_0(\Omega)$ и в $U(\Omega)$ соответственно, равенства справедливы для всех $\Phi \in V_0(\Omega)$, $\vec{v} \in U(\Omega)$. В частности, если взять $\omega \in \mathscr{D}(0,T)$, получим равенства (4.5), (4.6), которые выполняются в смысле распределений на $(0,T)$.

Умножим (4.5) на $\omega \in C^1[0,T]$, $\omega(T) = 0$ и получим

$$-\beta\int_0^T \omega'(\Psi,\Phi)_L dt + \int_0^T \omega(\vec{\mathscr{E}},\operatorname{rot}\vec{u})_{2,\Omega}dt - \beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\vec{\mathscr{E}},\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}dt +$$

$$+\beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}dt = \beta\gamma\int_0^T \omega(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}},\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}dt + \beta\omega(0)(\Psi(0),\Phi)_L,$$

$$(\Psi(0) - \Psi_0,\Phi)_L\omega(0) = 0,$$

т.е. выполнено начальное условие.

Из (4.5) вытекает, что $(\vec{\mathscr{E}},\operatorname{rot}\vec{u})_{2,\Omega} = -(\mu\partial/\partial t\vec{H},\vec{u})_{2,\Omega}$ для всех $\vec{u} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$, т.е. $\vec{E} \in L_2(0,T,H(\operatorname{rot};\Omega))$ и справедливо равенство (4.1). Умножая (4.1) на $\vec{u} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$, получаем $(\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}},\vec{u})_{2,\Omega} = (\vec{\mathscr{E}},\operatorname{rot}\vec{u})_{2,\Omega}$, т.е. $\vec{\mathscr{E}} \in L_2(0,T,H_0(\operatorname{rot};\Omega))$.

Пусть $\vec{w} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $\vec{w} = \vec{v} + \operatorname{grad}\psi$, $\vec{v} \in U(\Omega)$, $\operatorname{grad}\psi \in K_0(\operatorname{rot};\Omega)$. Из (4.5), (4.6) получаем

$$(\vec{H},\operatorname{rot}\vec{w})_{2,\Omega} = (\operatorname{rot}\vec{H},\vec{v})_{2,\Omega} = \beta\gamma(\sigma_0\vec{E},\vec{v})_{2,\Omega} + \beta\gamma(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}},\vec{v})_{2,\Omega} =$$

$$= \beta\gamma(\sigma_0\vec{E},\vec{w})_{2,\Omega} + \beta\gamma(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}},\vec{w})_{2,\Omega} - \beta\frac{d}{dt}(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega},$$

$\operatorname{rot}\vec{H} \in L_2(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$, т.е. $\vec{H} \in L_2(0,T,H(\operatorname{rot};\Omega))$, $\Psi \in L_2(0,T,V_0(\Omega))$.

Пусть Ψ_1, $\vec{\mathscr{E}}_1$ и Ψ_2, $\vec{\mathscr{E}}_2$ – два решения задачи, $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$, $\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}_1 - \vec{\mathscr{E}}_2$, тогда $\Psi(0) = 0$,

$$\frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\|\Psi\|_L^2 + \beta\gamma(\sigma_0\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{E}})_{2,\Omega} = 0,$$

т.е. решение единственно.

Из оценки (4.13) следует, что

$$\partial/\partial t\vec{\mathscr{E}} \in L_2(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3), \quad \vec{\mathscr{E}} \in C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3).$$

При $t = 0$ из (4.6) получаем

$$\beta\gamma(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}(0),\vec{v})_{2,\Omega} - \beta\gamma(\sigma_0 \operatorname{grad}\varphi_0,\vec{v})_{2,\Omega} - (\vec{h},\operatorname{rot}\vec{v})_{2,\Omega} = -\beta\gamma(\sigma_0\vec{E}^{\text{ст}}(0),\vec{v})_{2,\Omega}$$

для $\vec{v} \in U(\Omega)$, т.е. $\vec{\mathscr{E}}(0) = 0$.

Продифференцировав (4.6) по t, получим

$$\beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}},\vec{v}\right)_{2,\Omega} - \beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi,\vec{v}\right)_{2,\Omega} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{H},\operatorname{rot}\vec{v}\right)_{2,\Omega} = -\beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}E^{\text{ст}},\vec{v}\right)_{2,\Omega}.$$

Из равенства (4.2) вытекает, что $\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}} = -\beta\partial\backslash\partial t\mu\vec{H} \in L_\infty(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$. Таким образом,

$$\frac{\beta\gamma}{2}\frac{d}{dt}(\sigma_0\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{E}})_{2,\Omega} - \beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi,\vec{\mathscr{E}}\right)_{2,\Omega} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{H},\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}}\right)_{2,\Omega} = -\beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}},\vec{\mathscr{E}}\right)_{2,\Omega},$$

$$\frac{\beta\gamma}{2}\frac{d}{dt}\left(\sigma_0\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{E}}\right)_{2,\Omega} + \frac{1}{\beta}\left(\mu^{-1}\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}},\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}}\right)_{2,\Omega} = \beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi,\vec{\mathscr{E}}\right)_{2,\Omega} - \beta\gamma\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}},\vec{\mathscr{E}}\right)_{2,\Omega},$$

$$\beta\gamma(\sigma_0\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{E}})_{2,\Omega} + \frac{2}{\beta\mu_2}\int_0^t\left\|\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}}\right\|_{2,\Omega}^2 dt \le \beta\gamma\sigma_{02}\left(s\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi\right\|_{2,\Omega}^2 dt + \frac{2}{s}\int_0^t\left\|\vec{\mathscr{E}}\right\|_{2,\Omega}^2 dt + s\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}E^{\text{ст}}\right\|_{2,\Omega}^2 dt\right),$$

где $s > 0$. Возьмем $s = 2\beta^2\gamma\mu_2\sigma_{02}C(\Omega)$, где $C(\Omega)$ – константа из неравенства (2.1). Имеем

$$\beta\gamma\sigma_{01}(\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{E}})_{2,\Omega} + \frac{1}{\beta\mu_2 C(\Omega)}\int_0^t\left\|\vec{\mathscr{E}}\right\|_{2,\Omega}^2 dt \le 2\gamma^2\beta^3\mu_2\sigma_{02}^2C(\Omega)\left(\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi\right\|_{2,\Omega}^2 dt + \int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial t}E^{\text{ст}}\right\|_{2,\Omega}^2 dt\right) \le$$

$$\le 2\gamma^2\beta^3\mu_2\sigma_{02}C(\Omega)\left(\frac{\varepsilon_2\sigma_{02}}{\varepsilon_1\sigma_{01}} + 1\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}E^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}^2.$$

Таким образом, справедлива оценка (4.10).

5. СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ И КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧ

Пусть $\{\vec{H}^n,\vec{E}^n\} \in L_2(0,T,V(\Omega))$ – решение задачи (3.7)–(3.10), $\vec{E}^n = \vec{\mathscr{E}}^n - \operatorname{grad}\varphi^n$, где $\vec{E} \in L_2(0,T,U(\Omega))$, $\operatorname{grad}\varphi^n \in L_2(0,T,H_0(\operatorname{rot};\Omega))$. Обозначим через $\{\vec{H}^d,\operatorname{grad}\varphi^d\} \in L_2(0,T,V_0(\Omega))$, $\vec{\mathscr{E}}^d \in L_2(0,T,U(\Omega))$ решение задачи (4.1)–(4.4), где $-\operatorname{grad}\varphi_0 = \vec{e}$, $\kappa\rho^n = -\operatorname{div}\varepsilon\operatorname{grad}\varphi^n \in L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))$, $\kappa\rho^d = -\operatorname{div}\varepsilon\operatorname{grad}\varphi^d \in L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3.11) *и* (4.8). *Тогда справедливы неравенства*

$$\left\|\operatorname{grad}\varphi^n - \operatorname{grad}\varphi^d\right\|_{2,Q} \le C_1\frac{1}{\gamma}(1-\exp(-a\gamma))^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}E^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}, \tag{5.1}$$

$$\left\|\vec{\mathscr{E}}^n - \vec{\mathscr{E}}^d\right\|_{2,Q} \le C_2\frac{1}{\gamma}(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}E^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}, \tag{5.2}$$

$$\left\|\vec{H}^n - \vec{H}^d\right\|_{L_\infty(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)} \le C_3\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}E^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}, \tag{5.3}$$

$$\left\|\vec{H}^n - \vec{H}^d\right\|_{L_2(0,T,H(\operatorname{rot};\Omega))} \le C_4\beta(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}, \tag{5.4}$$

$$\kappa\left\|\rho^n - \rho^d\right\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \le C_5\frac{1}{\gamma}\left(1-\exp\left\{-\gamma\frac{\sigma_{01}T}{\varepsilon_1}\right\}\right)^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}, \tag{5.5}$$

где положительные постоянные a и C_i, $i = 1$–5, не зависят от β, γ.

Доказательство. Положим $\vec{H} = \vec{H}^n - \vec{H}^d$, $\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}^n - \vec{\mathscr{E}}^d$, $\varphi = \varphi^n - \varphi^d$, $\vec{E} = \vec{\mathscr{E}} - \operatorname{grad}\varphi$, $\rho = \rho^n - \rho^d$. Тогда $\{\vec{H}, \vec{E}\} \in L_2(0, T, V(\Omega))$,

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \beta\gamma\sigma_0\vec{E} + \beta\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathscr{E}}^n - \operatorname{grad}\varphi), \tag{5.6}$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}} = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mu\vec{H}, \tag{5.7}$$

$$\vec{H}(0) = 0, \quad \operatorname{grad}\varphi(0) = 0.$$

Умножая скалярно (5.6) на $\operatorname{grad}\varphi$, получаем

$$0 = \gamma(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} - \gamma(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega},$$

$$(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} + 2\gamma\int_0^t(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}dt = 2\gamma\int_0^t(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}dt.$$

Если $\varepsilon^{-1}\sigma_0 \equiv \mathrm{const}$, то $(\sigma_0\vec{\mathscr{E}}, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} = (\varepsilon^{-1}\sigma_0\varepsilon\vec{\mathscr{E}}, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} = 0$, следовательно, $\operatorname{grad}\varphi = 0$. В противном случае имеем

$$\varepsilon_1\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega} + 2\gamma\sigma_{01}\int_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}dt \le 2\gamma\sigma_{02}\int_0^t\|\vec{\mathscr{E}}\|_{2,\Omega}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}\,dt,$$

$$\int_0^T\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}\,dt \le \frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}\left(1 - \exp\left(-\gamma\frac{\sigma_{01}T}{\varepsilon_1}\right)\right)^2\int_0^T\|\vec{\mathscr{E}}\|^2_{2,\Omega}\,dt.$$

Умножив (5.6) на $\vec{E}$, (5.7) на $\vec{H}$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mu\vec{H}, \vec{H})_{2,\Omega} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\vec{\mathscr{E}}^p, \vec{E}\right)_{2,\Omega} + \gamma(\sigma_0\vec{E}, \vec{E})_{2,\Omega} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} = 0,$$

откуда имеем

$$\int_0^T\|\vec{\mathscr{E}}\|^2_{2,\Omega}dt \le \frac{\varepsilon_2^3}{\gamma^2\sigma_{01}^2\varepsilon_1}\int_0^T\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}^p\right\|^2_{2,\Omega}dt, \tag{5.8}$$

$$\begin{gathered}\int_0^T\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}dt \le \frac{\sigma_{02}^2\varepsilon_2^3}{\gamma^2\sigma_{01}^4\varepsilon_1}\left(1 - \exp\left\{-\gamma\frac{\sigma_{01}T}{\varepsilon_1}\right\}\right)^2\int_0^T\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}^p\right\|^2_{2,\Omega}dt,\\ \int_0^T\|\vec{E}\|^2_{2,\Omega}dt \le \varepsilon_1^{-1}\int_0^T(\varepsilon\vec{E}, \vec{E})_{2,\Omega}dt \le \varepsilon_2\varepsilon_1^{-1}(1 + \sigma_{02}^2\sigma_{01}^{-2})\int_0^T\|\vec{\mathscr{E}}\|^2_{2,\Omega}dt,\end{gathered} \tag{5.9}$$

$$(\mu\vec{H}, \vec{H})_{2,\Omega} \le \frac{2\varepsilon_2^{5/2}}{\gamma\sigma_{01}\varepsilon_1^{1/2}}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}^p\right\|^2_{2,Q}. \tag{5.10}$$

Для всех $\psi \in H_0^1(\Omega)$ и почти всех $t \in (0, T)$

$$\kappa\langle\rho, \psi\rangle = \int_\Omega(\varepsilon\operatorname{grad}(\varphi(t)) \cdot \operatorname{grad}\psi)dx.$$

Таким образом,

$$\kappa\|\rho\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \le \varepsilon_2\|\operatorname{grad}(\varphi(t))\|_{2,Q}. \tag{5.11}$$

Из (5.6) также получаем

$$(\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\vec{H},\operatorname{rot}\vec{H})_{2,\Omega} = \beta\gamma(\varepsilon^{-1}\sigma_0\vec{E},\operatorname{rot}\vec{H})_{2,\Omega} + \beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}^{p},\operatorname{rot}\vec{H}\right)_{2,\Omega},$$
$$\left\|\operatorname{rot}\vec{H}\right\|_{2,Q}^2 \le 2\varepsilon_2^2\beta^2\left(\frac{\varepsilon_2^5\sigma_{02}^2}{\varepsilon_1^5\sigma_{01}^2}\left(1+\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}\right)+1\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}^{p}\right\|_{2,Q}^2. \tag{5.12}$$

Из теорем 1, 2 вытекает, что $\operatorname{rot}\vec{E}\in L_2(0,T,K_0(\operatorname{div};\Omega))$. Следовательно, для почти всех $t\in(0,T)$ верно

$$\mu\vec{H}(t) = \int_0^t \operatorname{rot}\vec{E}dt \in K_0(\operatorname{div};\Omega),$$

и для $\vec{H}(t)$ справедлива оценка (2.1).

Используя оценку (3.12), из (5.8)–(5.12) получаем неравенства (5.1)–(5.5), где

$$C_1 = \frac{\varepsilon_2^2\sigma_{02}^2}{\varepsilon_1\sigma_{01}^3},\quad C_2 = \frac{\varepsilon_2^2\sigma_{02}}{\varepsilon_1\sigma_{01}^2},\quad C_3 = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_2^2\sigma_{02}}{\varepsilon_1\sigma_{01}^{3/2}\mu_1^{1/2}},$$
$$C_4 = \left(2(1+C(\Omega))\left(\frac{\varepsilon_2^5\sigma_{02}^2}{\varepsilon_1^5\sigma_{01}^2}\left(1+\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}\right)+1\right)\frac{\varepsilon_2^3\sigma_{02}^2}{\varepsilon_1\sigma_{01}^2}\right)^{1/2},$$

$C_5 = \varepsilon_2 C_1$, $a = T\sigma_{01}\varepsilon_1^{-1}$, $C(\Omega)$ – постоянная из неравенства (2.1).

Укажем асимптотические свойства функций от γ, фигурирующих в правой части неравенств (5.1)–(5.3), (5.5):

$$f_\varphi(\gamma) = \frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma},\quad f_{\mathscr{E}}(\gamma) = \frac{1-\exp(-a\gamma)}{\gamma},\quad f_H(\gamma) = \frac{(1-\exp(-a\gamma))}{\sqrt{\gamma}},\quad f_\rho = f_\varphi,$$

$f_\varphi(\gamma)\le\min\{a\gamma,\gamma^{-1}\}\le\sqrt{a}$, $f_\varphi(\gamma) = O(\gamma)$ при $\gamma\to 0$, $f_\varphi(\gamma) = O(\gamma^{-1})$ при $\gamma\to\infty$;

функция $f_{\mathscr{E}}(\gamma)$ монотонно убывает, $f_{\mathscr{E}}(\gamma)\to a$ при $\gamma\to 0$, $f_{\mathscr{E}}(\gamma) = O(\gamma^{-1})$ при $\gamma\to\infty$;

$f_H(\gamma) = f_\varphi(\gamma)^{1/2}$, $f_H(\gamma) = O(\sqrt{\gamma})$ при $\gamma\to 0$, $f_H(\gamma) = O(1/\sqrt{\gamma})$ при $\gamma\to\infty$.

С учетом замечания, сделанного при доказательстве теоремы 3, в случае, когда среда однородная ($\varepsilon\equiv\mathrm{const}$, $\mu\equiv\mathrm{const}$, $\sigma_0\equiv 1$) имеем

$$\operatorname{grad}\varphi^d = \operatorname{grad}\varphi^n,\quad \rho^d = \rho^n$$

и справедливы оценки

$$\left\|\vec{\mathscr{E}}^n - \vec{\mathscr{E}}^d\right\|_{2,Q} \le \frac{\varepsilon}{\gamma}\left(1-\exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}T\right)\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{H}^n - \vec{H}^d\right\|_{L_\infty(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)}^2 \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma\mu}}\left(1-\exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}T\right)\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{H}^n - \vec{H}^d\right\|_{L_2(0,T,H(\operatorname{rot};\Omega))} \le 2(1+C(\Omega))^{1/2}\varepsilon\beta\left(1-\exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}T\right)\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathscr{E}}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q},$$

где $\vec{E}^{\text{ст}} = \vec{\mathscr{E}}^{\text{ст}} + \operatorname{grad}\psi^{\text{ст}}$, $\vec{\mathscr{E}}^{\text{ст}}\in L_2(0,T,K(\operatorname{div}\Omega))$, $\operatorname{grad}\psi^{\text{ст}}\in L_2(0,T,K_0(\operatorname{rot};\Omega))$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в теореме 3 неравенства (5.1)–(5.5) позволяют оценивать в различных нормах отличие между квазистационарными и нестационарными полями $\vec{H}$, $\vec{\mathscr{E}}$, $\operatorname{grad}\varphi$, ρ через $\left\|\partial/\partial t\vec{E}^{\text{ст}}\right\|_{2,Q}$ с коэффициентами, зависящими от параметров $\beta = \Delta x/(c\Delta t)$ и $\gamma = 4\pi\sigma^*\Delta t$, характеризующими скорость протекающих процессов.

Отметим, что для медленных процессов при $\Delta t \to \infty$ будет выполнено $\beta \to 0$ и $\gamma \to \infty$, и для близости напряженностей магнитных полей $\vec{H}^n$ и $\vec{H}^d$ достаточно малости коэффициента β (оценка (5.4)), хотя есть и альтернативная оценка (5.3) через γ в силу асимптотических свойств $f_H(\gamma)$ при $\gamma \to \infty$. Соответственно для близости составляющих напряженностей электрических полей $\vec{\mathscr{E}}^n$ и $\vec{\mathscr{E}}^d$, $\operatorname{grad}\varphi^n$ и $\operatorname{grad}\varphi^d$, а также плотностей зарядов ρ^n и ρ^d достаточно малости $1/\gamma$ в силу асимптотических свойств функций $f_{\mathscr{E}}(\gamma)$ и $f_\varphi(\gamma)$.

Также можно отметить, что в силу асимптотических свойств функций $f_\varphi(\gamma)$ и $f_H(\gamma)$ при $\gamma \to 0$ (быстро протекающие процессы) из оценок (5.1), (5.3), (5.5) может следовать близость полей $\vec{H}^n$ и $\vec{H}^d$, $\operatorname{grad}\varphi^n$ и $\operatorname{grad}\varphi^d$, ρ^n и ρ^d.

При применении неравенств (5.1)–(5.5) следует иметь в виду, что при варьировании параметра γ, зависящего также от удельной проводимости σ, может меняться также норма $\partial/\partial t\vec{E}^{\text{ст}}$, поскольку $\vec{E}^{\text{ст}} = \vec{J}^{\text{ст}}/\sigma$.

В случае однородных сред потенциальная составляющая электрического поля $\operatorname{grad}\varphi^d$ в приближении Дарвина совпадает с точным значением потенциальной составляюшей электрического поля $\operatorname{grad}\varphi^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, Физматлит, 1982.
2. *Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
3. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
4. *Darwin C.G.* The dynamical motions of charged particles // Phil. Mag. 1920. V. 39:233. P. 537–551.
5. *Kaufman A.N., Rostler P.S.* The Darwin model as a tool for electromagnetic plasma simulation // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 2. P. 446–448.
6. *Nielson C.W., Lewis H.R.* Particle code models in the non radiative limit // Methods Comput. Phys. V. 16. P. 367–388. N.Y.: Academic Press, 1976.
7. *Hewett D.W., Nielson C.W.* A multidimensional quasineutral plasma simulation model // J. Comput. Phys. 1978. V. 29. P. 219–236.
8. *Hewett D.W., Boyd J.K.* Streamlined Darwin simulation of nonneutral plasmas // J. Comput. Phys. 1987. V. 70. P. 166–181.
9. *Databases Бородачев Л.В., Мингалёв И.В., Мингалёв О.В.* Дрейфовый алгоритм движения частицы в дарвинской модели плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 3. С. 467–480.
10. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations // Numer. Math. 1996. V. 73. P. 329–372.
11. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 2007. V. 75. № 3. P. 230–239.
12. *Kawashima S., Shizuta Y.* Magnetohydrodynamic approximation of the complete equations for an electromagnetic fluid. II // Proc. Japan Acad. 1986. V. 62. Ser. A. № 5. P. 181–184.
13. *Ammari H., Buffa A., Nedelec J.-C.* A justification of eddy currents model for the Maxwell equations // SIAM J. Appl. Math. 2000. V. 60. № 5. P. 1805–023.
14. *Alonso Rodriguez A., Valli A.* Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag, 2010.
15. *Галанин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Физматлит, 1995.
16. *Bossavit A.* The computation of eddy-currents, in dimension 3, by using mixed finite elements and boundary elements in association // Math. Comput. Modelling. 1991. V. 15. № 305. P. 33–42.
17. *Fernandes P.* General approach to prove the existence and uniqueness of the solution in vector potential formulations of 3-D eddy current problems // IEE Proc.-Sci. Meas. Technol. 1995. V. 142. P. 299–306.
18. *Kolmbauer M.* Existence and uniqueness of eddy current problems in bounded and unbounded domains // Numa-Report 2011-03 Institute of Computational Mathematics, Linz, 2011 (available at www.numa.uni-linz.ac.at/Publications/List/2011/011-03.pdf).
19. *Camano J., Rodriguez R.* Analysis of a FEM-BEM model posed on the conducting domain for the time-dependent eddy current problem // J. Comp. Appl. Math. 2012. V. 236. P. 3084–3100.

20. *Калинин А.В., Калинкина А.А.* Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла // Вест. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. № 1. С. 21–38.
21. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 5. С. 608–624.
22. *Калинин А.В., Тюхтина А.А.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями // Журнал СВМО. 2016. Т. 18. № 4. С. 119–133.
23. *Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А.* Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 18–40.
24. *Калинин А.В., Тюхтина А.А., Изосимова О.А.* Модифицированные калибровочные соотношения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Журнал СВМО. 2017. Т. 19. № 4. С. 55–67.
25. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* Lp-estimates for scalar products of vector fields and their application to electromagnetic theory problems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. V. 41. № 18. P. 9283–9292.
26. *Жидков А.А., Калинин А.В.* Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 4. С. 123–129.
27. *Мареев Е.А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. № 5. С. 527–534.
28. *Калинин А.В., Слюняев Н.Н., Мареев Е.А., Жидков А.А.* Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 3. С. 314–322.
29. *Kalinin A.V., Slyunyaev N.N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 450. № 1. P. 112–136.
30. *Boström R., Fahleson U.* Vertical propagation of time-dependent electric fields in the atmosphere and ionosphere // in H. Dolezalek, R. Reiter (Eds.), Electrical Processes in Atmospheres, Steinkopff, 1977. P. 529–535.
31. *Морозов В., Куповых Г.* Теория электрических явлений в атмосфере. Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
32. *Weitzner H., Lawson W.S.* Boundary conditions for the Darwin model // Phys. Fluids B. 1989. V. 1. P. 1953–1957.
33. *Degond P., Raviart P.-A.* An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations // Forum Math. 1992. V. 4. P. 13–44.
34. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* Approximate models for the Maxwell equations // J. Comput. Appl. Math. 1994. V. 63. P. 69–81.
35. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
36. *Girault V., Raviart P.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. N.Y.: Springler-Verlag, 1986.
37. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.