ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 8, с. 1422–1427

УДК 517.956

ОБ УБЫВАНИИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С KPZ-НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ[1)]

© 2020 г. А. Б. Муравник[1,2]

[1] 394018 Воронеж, ул. Плехановская, 14, АО "Концерн "Созвездие", Россия

[2] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

e-mail: amuravnik@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.02.2020 г.
Переработанный вариант 15.02.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Рассматривается задача Коши для квазилинейных параболических уравнений, содержащих нелинейности KPZ-типа. Доказывается, что наличие членов нулевого порядка в уравнении может принципиальным образом изменить поведение решения при $t \to \infty$ сравнительно с однородным случаем. А именно, решение убывает на бесконечности независимо от поведения начальной функции задачи, а скорость и характер этого убывания зависят от условий, наложенных на младшие коэффициенты уравнения. Библ. 29.

Ключевые слова: параболические уравнения, квазилинейные уравнения, нелинейности KPZ-типа, младшие члены, поведение на бесконечности.

DOI: 10.31857/S0044466920080128

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения с нелинейностями, содержащими скалярный квадрат градиента неизвестной функции (так называемые нелинейности типа Кардара–Паризи–Жанга или KPZ-нелинейности), возникают в различных приложениях (см., например, [1]–[16]). Они представляют интерес и с чисто теоретической точки зрения, поскольку содержат вторую степень первой производной неизвестной функции: как известно (см., например, [17]–[19]), это – наибольший показатель степени, при котором условия бернштейновского типа для соответствующей эллиптической задачи обеспечивают наличие априорных оценок L_∞-норм первых производных решения через L_∞-норму самого решения.

В настоящей работе изучаются параболические уравнения с нелинейностями указанного вида. Исследуется влияние младших членов; как известно из классической теории (см. [20]), в отличие от, например, эллиптического случая, указанные члены могут принципиальным образом изменять природу решений. Так, добавление (в уравнение теплопроводности) члена всего лишь нулевого порядка может сделать полностью неприменимым хорошо известный критерий Репникова–Эйдельмана для стабилизации решений (см. [21]): как только такой член добавлен, поведение решения задачи Коши при $t \to \infty$ зависит уже не от поведения шаровых средних начальной функции задачи, а от свойств коэффициента при неизвестной функции в уравнении. В линейном случае это явление изучено весьма подробно (см. [22]–[24] и имеющуюся там библиографию). В настоящей работе оно исследуется для квазилинейных уравнений с KPZ-членами, в которых коэффициент при нелинейности допускает неинтегрируемую особенность относительно неизвестной функции. Чтобы обосновать интерес к такого рода коэффициентам, достаточно отметить, что даже случай постоянного коэффициента при $|\nabla u|^2$ соответствует приложениям, не покрываемым классическими моделями математической физики (см. [1], [2]); добавляя к модели обратные связи, мы существенно обогащаем ее.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00288 А) (теоремы 1, 2) и программы РУДН "5-100" (теоремы 3, 4).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\beta}{u}|\nabla u|^2 + C(x,t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

где $n \geq 3$, u_0 непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$, $\beta > -1$ и существует такая положительная постоянная α, что коэффициент $C(x,t)$ удовлетворяет в $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ одному из следующих двух неравенств:

$$C(x,t) \leq -\alpha \min\left(1, \frac{1}{|x|^2}\right) \tag{2.3}$$

или

$$C(x,t) \leq -\alpha. \tag{2.4}$$

В настоящей статье исследуются классические решения указанной задачи Коши, т.е. функции, у которых производная по t и вторая производная по каждой из пространственных переменных (все производные понимаются в *классическом* смысле, т.е. как пределы соответствующих отношений конечных разностей) существуют в каждой точке полупространства $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$, уравнение (2.1) выполняется для них в каждой точке полупространства $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$, а предельное соотношение $\lim\limits_{t\to+0} u(x,t) = u_0(x)$ выполняется для них в каждой точке пространства $\mathbb{R}^n$.

Справедлива

Теорема 1.

(i) *Существует не более одного классического ограниченного неотрицательного решения* $u(x,t)$ *задачи* (2.1), (2.2).

(ii) *Если выполняется неравенство* (2.3), *то*

$$u \xrightarrow{t\to\infty} 0 \tag{2.5}$$

равномерно по x *в любом компакте пространства* $\mathbb{R}^n$ (*при условии, что* $u(x,t)$ *существует*).

(iii) *Если выполняется* (*более сильное*) *неравенство* (2.4), *то существует такая положительная постоянная* a, *что в полупространстве* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ *справедливо неравенство*

$$u(x,t) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u_0(x) e^{-at} \tag{2.6}$$

(*при условии, что* $u(x,t)$ *существует*).

Доказательство. Предположим, что $u(x,t)$ – классическое ограниченное неотрицательное решение задачи (2.1), (2.2). Следуя [25], введем функцию

$$v(x,t) \overset{\text{def}}{=} u^{\beta+1}(x,t). \tag{2.7}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (\beta+1)u^\beta \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_j} = (\beta+1)u^\beta \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = (\beta+1)\beta u^{\beta-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + (\beta+1)u^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \quad (j = \overline{1,n}),$$

т.е.

$$\Delta v = (\beta+1)u^\beta\left(\Delta u + \frac{\beta}{u}|\nabla u|^2\right).$$

Умножим уравнение (2.1) на $(\beta + 1)u^{\beta}$ (отметим, что этот множитель нигде не обращается в ноль). Получим, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + (\beta + 1)C(x,t)v, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \tag{2.8}$$

Это решение ограничено в силу неотрицательности и ограниченности функции $u(x,t)$ и положительности постоянной $\beta + 1$.

Кроме того, функция $v(x,t)$ удовлетворяет начальному условию

$$v\big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.9}$$

где $v_0(x) = u_0^{\beta+1}(x)$, т.е. $v_0(x)$ неотрицательна и ограничена в $\mathbb{R}^n$.

Какое бы из условий (2.3), (2.4) ни выполнялось, любое из них влечет за собой неположительность функции $C(x,t)$ и, следовательно, ограниченность сверху коэффициента уравнения (2.8) при v. Тогда, в силу [20, § 1, теорема 10], других классических ограниченных решений задачи (2.8), (2.9) (кроме функции v) не существует. Этим завершается доказательство первого утверждения теоремы, т.е. утверждения о единственности классического ограниченного неотрицательного решения задачи (2.1), (2.2). Действительно, предполагая обратное, т.е. существование еще одного классического ограниченного неотрицательного решения указанной задачи, и, обозначая указанное решение через $u_1(x,t)$, можно ввести новую функцию $v_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_1^{\beta+1}(x,t)$ и, рассуждая как и ранее, доказать, что $v_1(x,t)$ – еще одно классическое ограниченное решение задачи (2.8), (2.9), что противоречит [20, § 1, теорема 10].

Теперь предположим, что $u(x,t)$ – классическое ограниченное неотрицательное решение задачи (2.1), (2.2), а коэффициент $C(x,t)$ удовлетворяет условию (2.3). Тогда младший коэффициент уравнения (2.8) тоже удовлетворяет условию (2.3) (с положительной постоянной $(\beta + 1)\alpha$ вместо α). Теперь, в силу [24, теорема 1.1], функция $v(x,t)$ удовлетворяет предельному соотношению (2.5) равномерно по x в любом компакте пространства $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для любого положительного ε и любого компакта K пространства $\mathbb{R}^n$ существует такое положительное $T(K,\varepsilon)$, что $v(x,t) = u^{\beta+1}(x,t) \in [0,\varepsilon]$ при условии, что $x \in K$ и $t > T(K,\varepsilon)$, т.е. утверждение (ii) теоремы справедливо.

Теперь предположим, что $u(x,t)$ – классическое ограниченное неотрицательное решение задачи (2.1), (2.2), а коэффициент $C(x,t)$ удовлетворяет условию (2.4). Тогда младший коэффициент уравнения (2.8) тоже удовлетворяет условию (2.4) (с положительной постоянной $(\beta + 1)\alpha$ вместо α). Тогда, в силу [20, § 12, теорема 1] (см. также замечание 2 к указанной теореме), существует такая положительная постоянная γ, что $|v(x,t)| \le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} v_0(x)e^{-\gamma t}$ для любого (x,t) из $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, т.е. $u^{\beta+1}(x,t) \le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} u_0^{\beta+1}(x)e^{-\gamma t}$ для любого (x,t) из $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, что означает, что утверждение (iii) теоремы справедливо с положительной постоянной $a = \dfrac{\gamma}{\beta + 1}$. Этим полностью завершается доказательство теоремы 1.

Ограничение, наложенное на коэффициент β, можно снять, усилив требования, наложенные на решение. А именно, справедливо следующее утверждение (дополняющее теорему 1).

Теорема 2. *Пусть* $\beta < -1$. *Тогда справедливы три следующих утверждения.*

(i) *Существует не более одного классического ограниченного положительно-определенного решения* $u(x,t)$ (*т.е. решения, нижняя грань которого строго положительна*) *задачи* (2.1), (2.2).

(ii) *Если существует положительное* α, *для которого*

$$C(x,t) \ge \alpha \min\left(1, \frac{1}{|x|^2}\right), \tag{2.10}$$

то предельное соотношение (2.5) *выполняется равномерно по* x *в любом компакте пространства* $\mathbb{R}^n$ (*при условии, что* $u(x,t)$ *существует*).

(iii) *Если существует положительное* α, *для которого*

$$C(x,t) \geq \alpha, \tag{2.11}$$

то существует такая положительная постоянная a, для которой неравенство (2.6) *выполняется в полупространстве* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ (*при условии, что* $u(x,t)$ *существует*).

Чтобы доказать теорему 2, доказательство теоремы 1 модифицируем следующим образом. Как и выше, применяя подстановку (2.7), переходим к уравнению (2.8). В отличие от предыдущего случая, неотрицательность функции $u(x,t)$ не гарантирует ограниченности (и даже непрерывности) функции $v(x,t)$, поскольку в данном случае показатель $\beta+1$ отрицателен. Однако в условиях теоремы 2 функция $u(x,t)$ удовлетворяет более строгому условию: $u(x,t) \geq u_* \stackrel{\text{def}}{=} \inf u > 0$. Тогда полученная функция $v(x,t)$ ограничена и удовлетворяет (в классическом смысле) задаче (2.8), (2.9), и оставшаяся часть доказательства теоремы 1 применима без изменений – нужно только учесть, что в условиях теоремы 2, какое бы из условий (2.10), (2.11) ни выполнялось, любое из них влечет за собой неположительность коэффициента уравнения (2.8) при члене нулевого порядка (отметим, что в рассматриваемом случае $\beta+1<0$) и, следовательно, [24, теорема 1.1] и [20, § 12, теорема 1] применимы точно так же, как и выше.

Очевидно, что никакое положительно-определенное решение не может удовлетворять ни предельному соотношению (2.5), ни, тем более, неравенству (2.6). Это значит, что в действительности теорема 2 устанавливает достаточное условие отсутствия глобального решения исследуемой задачи (соответствующая общая теория изложена в [26], [27], см. также имеющуюся там библиографию). А именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Если $\beta < -1$ и существует такое положительное α, что неравенство (2.10) выполняется во всем полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, то задача (2.1), (2.2) не имеет положительно-определенных решений.

Замечание 1. Было бы неверно трактовать условие положительной определенности решения как чисто техническое ограничение. Из классической теории известно, что оно имеет принципиальное значение для приложений. Например, накладывая это ограничение, мы делаем классическую модель распространения тепла более реалистичной: скорость распространения возмущений становится конечной даже в линейном случае (см. [28]).

В общем случае, в отличие от оценки (2.6), соотношение (2.5) не дает никакой информации о скорости убывания решения. Однако, усиливая ограничение, наложенное на параметр α, можно уточнить полученное соотношение и доказать, что решение убывает как степенная функция. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t)$ – *классическое ограниченное неотрицательное решение задачи* (2.1), (2.2), *где* $n \geq 3$, u_0 *непрерывна и ограничена в* $\mathbb{R}^n$, $\beta > -1$ *и существует такая постоянная* α, *что* $\dfrac{\alpha}{\beta+1} > n-1$, *а* $C(x,t)$ *удовлетворяет условию* (2.3). *Тогда для любого компакта* K *пространства* $\mathbb{R}^n$ *существуют такие постоянные* M *и* T, *что*

$$u(x,t) \leq \frac{M}{t^{æ}}, \quad æ = \frac{2-n+\sqrt{(2-n)^2+4\alpha}}{6(\beta+1)}, \tag{2.12}$$

для любого (x,t) *из* $K \times (T,+\infty)$.

Теорема 4. *Пусть* $u(x,t)$ – *классическое ограниченное положительно-определенное решение задачи* (2.1), (2.2), *где* $n \geq 3$, u_0 *непрерывна и ограничена в* $\mathbb{R}^n$, $\beta < -1$ *и существует такая постоянная* α, *что* $\dfrac{\alpha}{\beta+1} < n-1$, *а* $C(x,t)$ *удовлетворяет условию* (2.10). *Тогда для любого компакта* K *пространства* $\mathbb{R}^n$ *существуют такие постоянные* M *и* T, *что оценка* (2.12) *выполняется для любого* (x,t) *из* $K \times (T,+\infty)$.

Обе теоремы доказываются по одной и той же схеме: применяя подстановку (2.7), переходим к задаче (2.8), (2.9) (точно так же, как в теоремах 1, 2) и учитываем, что младший коэффициент превосходит $n-1$. Затем применяем [24, теорема 2.1], чтобы получить оценку вида (2.12)

$$\left(\text{с постоянной } æ = \frac{2-n+\sqrt{(2-n)^2+4\alpha}}{6}\right)$$

для функции $v(x,t)$. Наконец, в полученной оценке возвращаемся к функции $u(x,t)$.

Замечание 2. Случай, в котором $\beta = 0$, покрывается теоремами 1 и 3, а получаемые при этом результаты согласуются с результатами, известными для линейного случая: теорема 1(i) сводится к частному случаю [20, § 1, теорема 10], теорема 1(ii) – к частному случаю [24, теорема 1.1], теорема 1(iii) – к частному случаю замечания 2 к [20, §12, теорема 1], а теорема 3 – к частному случаю [24, теорема 2.1].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнивая исследуемую задачу со случаем, когда уравнение не содержит членов нулевого порядка (см. [29, раздел 3]), мы видим, что наличие членов нулевого порядка может изменить ситуацию принципиальным образом. Если уравнение не содержит таких членов, то решение может иметь предел, а может и не иметь его; в первом случае этот предел может быть равен нулю, а может быть отличен от нуля: все определяется поведением среднего

$$\frac{n\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}r^n}\int\limits_{|x|<r} u_0^{\beta+1}(x)dx \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

Если же в уравнение добавляется член нулевого порядка (указанного выше вида), то поведение (непрерывной и ограниченной) начальной функции уже ни на что не влияет: все определяется свойствами младших коэффициентов уравнения. В зависимости от того, насколько сильны ограничения, наложенные на коэффициент β уравнения (2.1) и на параметр α условий (2.3) и (2.4), можно выделить следующие три типа убывания решения при $t\to+\infty$:

- $|u|\le Ce^{-at}$, $a>0$, равномерно по x в $\mathbb{R}^n$;
- $|u|\le Ct^{-\gamma}$, $\gamma>0$, равномерно по x в K для любого компакта K пространства $\mathbb{R}^n$;
- $u\to 0$ равномерно по x в K для любого компакта K пространства $\mathbb{R}^n$.

Автор выражает глубокую благодарность участникам Первой международной конференции “Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ” (Долгопрудный, июнь 2019 г.) за полезные обсуждения его доклада, способствовавшие дальнейшему развитию полученных результатов и их лучшему пониманию и изложению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C.* Dynamic scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 889–892.
2. *Medina E., Hwa T., Kardar M., Zhang Y.-C.* Burgers equation with correlated noise: Renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 3053–3075.
3. *Guedda M., Kersner R.* Self-similar solutions to the generalized deterministic KPZ equation // Nonlinear Differential Equations Appl. 2003. V. 10. № 1. P. 1–13.
4. *Ginelli F., Hinrichsen H.* Mean field theory for skewed height profiles in KPZ growth processes // J. Phys. A. 2004. V. 37. № 46. P. 11085–11100.
5. *Anh V.V., Leonenko N.N., Sakhno L.M.* Spectral properties of Burgers and KPZ turbulence // J. Stat. Phys. 2006. V. 122. № 5. P. 949–974.
6. *Spohn H.* Exact solutions for KPZ-type growth processes, random matrices, and equilibrium shapes of crystals // Phys. A. 2006. V. 369. № 1. P. 71–99.
7. *Gladkov A., Guedda M., Kersner R.* A KPZ growth model with possibly unbounded data: correctness and blow-up // Nonlinear Anal. 2008. V. 68. № 7. P. 2079–2091.
8. *Benjamini I., Schramm O.* KPZ in one dimensional random geometry of multiplicative cascades // Comm. Math. Phys. 2009. V. 289. № 2. P. 653–662.
9. *Duplantier B.* Liouville quantum gravity and the KPZ relation: a rigorous perspective // XVIth International Congress on Mathematical Physics. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2010. P. 56–85.

10. *Quastel J.* KPZ universality for KPZ // XVIth International Congress on Mathematical Physics. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2010. P. 401–405.
11. *Corwin I., Ferrari P.L., Péché S.* Universality of slow decorrelation in KPZ growth // Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 2012. V. 48. № 1. P. 134–150.
12. *Schehr G.* Extremes of N vicious walkers for large N: application to the directed polymer and KPZ interfaces // J. Stat. Phys. 2012. V. 149. № 3. P. 385–410.
13. *Barral J., Jin X., Rhodes R., Vargas V.* Gaussian multiplicative chaos and KPZ duality // Comm. Math. Phys. 2013. V. 323. № 2. P. 451–485.
14. *Spohn H.* KPZ scaling theory and the semidiscrete directed polymer model // Math. Sci. Res. Inst. Publ. 2014. V. 65. P. 483–493.
15. *Bernardin C., Gonçalves P., Sethuraman S.* Occupation times of long-range exclusion and connections to KPZ class exponents // Probab. Theory Related Fields. 2016. V. 166. № 1–2. P. 365–428.
16. *Funaki T., Hoshino M.* A coupled KPZ equation, its two types of approximations, and existence of global solutions // J. Funct. Anal. 2017. V. 273. № 3. P. 1165–1204.
17. *Amann H., Crandall M.G.* On some existence theorems for semi-linear elliptic equations // Ind. Univ. Math. J. 1978. V. 27. № 5. P. 779–790.
18. *Kazdan I.L., Kramer R.I.* Invariant criteria for existence of solutions to second-order quasilinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31. № 5. P. 619–645.
19. *Похожаев С.И.* Об уравнениях вида $\Delta u = f(x,u,Du)$ // Матем. сб. 1980. Т. 113. № 2. С. 324–338.
20. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.
21. *Репников В.Д., Эйдельман С.Д.* Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши //Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 2. С. 298–301.
22. *Денисов В.Н.* Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами // СМФН. 2010. Т. 36. С. 61–71.
23. *Денисов В.Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с убывающими младшими коэффициентами // СМФН. 2012. Т. 45. С. 62–74.
24. *Денисов В.Н.* О скорости стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами // СМФН. 2016. Т. 59. С. 53–73.
25. *Бицадзе А.В.* К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных // Дифференц. ур-ния. 1977. Т. 13. № 11. С. 1993–2008.
26. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.
27. *Galaktionov V.A., Mitidieri E.L., Pohozaev S.I.* Blow-Up for Higher-Order Parabolic, Hyperbolic, Dispersion and Schrödinger Equations. Boca Raton, FL: CRC Press, 2015.
28. *Калашников А.С.* О понятии конечной скорости распространения возмущений // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34. № 2. С. 199–200.
29. *Денисов В.Н., Мурaвник А.Б.* О стабилизации решения задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 3. С. 351–355.