УДК 517.968.72

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ МЕХАНИКИ[1)]

© 2020 г. В. В. Власов[1,*], Н. А. Раутиан[1,**]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: vikmont@yandex.ru

**e-mail: nrautian@mail.ru

Поступила в редакцию 07.05.2019 г.
Переработанный вариант 11.07.2019 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Изучается корректная разрешимость начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффицинтами в гильбертовых пространствах, а также проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегродифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений. Получены результаты о корректной разрешимости упомянутых интегродифференциальных уравнений в весовых пространствах Соболева вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве, заданных на положительной полуоси. Установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений. Библ. 19.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения, оператор-функции, спектральный анализ.

DOI: 10.31857/S0044466920080153

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [1]–[3] а также как интегродифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина (см. [4]–[7]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью, кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [8], [9]).

Перечисленные задачи можно объединить в достаточно широкий класс интегродифференциальных уравнений в частных производных, поэтому более естественно рассматривать интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегродифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных.

Следует отметить, что метод, используемый нами для доказательства корректной разрешимости начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений, существенно отличается от более традиционного подхода, использованного Л. Пандолфи в работе [7], где разрешимость изучается в функциональном пространстве на конечном временном интервале $(0,T)$. В нашей работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ вектор-функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, где A – положительный самосопряженный оператор в

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00288).

гильбертовом пространстве. Доказательство нашей теоремы 1 о резрешимости существенно использует гильбертову структуру пространств $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а также теорему Пэли—Винера, в то время, как в работе [7] рассмотрения проводятся в банаховом функциональном пространстве гладких функций на конечном временном интервале $(0,T)$.

В предшествующих работах авторов [10]—[12] проводилось подробное исследование задачи (2.1), (2.2) в случае, когда $B = 0$. Наш подход к исследованию основан на спектральном анализе оператор-функции (2.8), который также дает возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Указанные результаты подытожены в гл. 3 монографии [13].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geq \kappa_0$ $(\kappa_0 > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Превратим область определения $Dom(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $Dom(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β. Пусть B — симметрический оператор, действующий на пространстве $Dom(A)$, неотрицательный $(Bx, y) = (x, By)$, $(Bx, x) \geq 0$ для любых $x, y \in Dom(A)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leq \kappa\|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$, для любого $x \in Dom(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \tag{2.2}$$

$$u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2.3}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующее представление:

$$K(t) = \sum_{k=1}^\infty a_k e^{-\gamma_k t}, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^\infty b_k e^{-\gamma_k t}, \tag{2.4}$$

где коэффициенты $a_k > 0$, $b_k \geq 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Кроме того, будем считать, что выполнено условие

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{\gamma_k} < 1, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{\gamma_k} < 1. \tag{2.5}$$

Условие (2.5) означает, что $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условию (2.5) добавить также условие

$$K(0) = \sum_{k=1}^\infty a_k < +\infty, \quad Q(0) = \sum_{k=1}^\infty b_k < +\infty, \tag{2.6}$$

тогда ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$. Введем следующие обозначения:

$$a := \sum_{k=1}^\infty a_k, \quad b := \sum_{k=1}^\infty b_k,$$

$$A_0 := A + B.$$

Согласно известному результату (теорема в [14, с. 361]), оператор A_0 является самосопряженным и положительным. Превратим область определения $Dom(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $Dom(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 2.1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} – ограниченные, а оператор A_0^{-1} – компактный.

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (2.1), (2.2) с начальными условиями $u(+0) = 0$, $u^{(1)}(+0) = 0$ имеет следующее представление:

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda). \tag{2.7}$$

Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (2.1) и имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{2.8}$$

где $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ – преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(\lambda + \gamma_k)}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(\lambda + \gamma_k)}, \tag{2.9}$$

$\hat{f}(\lambda)$ – преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, I – тождественный оператор в пространстве H.

2.1. Корректная разрешимость

Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\left(\left\|u^{(n)}(t)\right\|_H^2 + \|A_0 u(t)\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$, см. монографию [15, гл. 1]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$.

Определение 2.1. Будем называть вектор-функцию *и сильным решением задачи* (2.1)–(2.3), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, для некоторого $\gamma \geq 0$ $(A_0 = A + B)$, удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, и начальному условию (2.2).

Определение 2.2. Вектор-функцию $u(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ назовем *обобщенным* (*слабым*) *решением задачи* (2.1)–(2.3), если $u(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{gathered}
-\left\langle u^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} + \left\langle (A+B)^{1/2}u(t), (A+B)^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma\left\langle u^{(1)}(t), v(t)\right\rangle - \\
-\left\langle \int_0^t K(t-s)(A+B)^{-1/2}Au(s)ds, (A+B)^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \\
-\left\langle \int_0^t Q(t-s)(A+B)^{-1/2}Bu(s)ds, (A+B)^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle f(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle \varphi_1, v(0)\rangle = 0,
\end{gathered} \tag{2.10}$$

а также условию (2.2).

Отметим, что по определению пространства $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, вектор-функции $u^{(1)}(t)$ и $A_0^{1/2}u(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$, поскольку норма в этом пространстве определяется в виде

$$\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{n/2})} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left(\left\| u^{(n)}(t) \right\|_H^2 + \left\| A_0^{n/2} u(t) \right\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Следующие теоремы представляют достаточные условия корректной разрешимости задачи (2.1)–(2.3).

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (2.6), $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geq 0$ *и* $f(0) = 0$, *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geq \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.1)–(2.3) *имеет единственное решение в пространстве* $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)} \leq d \left(\|f'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A_0 \varphi_0\|_H + \left\| A_0^{1/2} \varphi_1 \right\|_H \right), \tag{2.11}$$

где константа d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие* (2.6), $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geq 0$, *векторы* $\varphi_0 \in H_{1/2}$, $\varphi_1 \in H$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geq \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.1)–(2.3) *имеет обобщенное решение в пространстве* $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, *для которого справедлива следующая оценка*:

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \leq d \left(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \left\| A_0^{1/2} \varphi_0 \right\|_H + \|\varphi_1\|_H \right), \tag{2.12}$$

где константа d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

2.2. Спектральный анализ

Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$, в случае, когда выполнены условия (2.5), (2.6), а также следующие условия:

$$\sup_{k \in N} \gamma_k^2 (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = +\infty. \tag{2.13}$$

Существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} = 0. \tag{2.14}$$

Замечание 2.2. Условие (2.14) выполняется в случае степенного поведения последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$, т.е. когда $\gamma_k \simeq k^\alpha$, $\alpha > 0$. В этом случае

$$\frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} \sim \frac{\alpha}{k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

В задачах усреднения в многофазных средах последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ являются последовательностями собственных значений некоторых вспомогательных эллиптических задач и, поэтому, имеют степенную асимптотику (подробнее см. [8], [9]). В свою очередь, условие (2.14) не выполняется, если последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем, большим единицы, т.е. $\gamma_k = cq^k$, $q > 1$, $c > 0$. Подобное поведение членов последовательности γ_k реже встречается в приложениях.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* (2.5), (2.6), (2.13), (2.14). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит объединению интервалов* $\Delta_k = (-\gamma_k, \tilde{p}_k) \subset (-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ $(\gamma_0 = 0)$ *и полосы* $\{\lambda \in \mathbb{C} | \alpha_1 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \alpha_2\}$, *где* $\tilde{p}_k = \max\{p_k(\tau'), p_k(\tau'')\}$, $p_k(\tau)$ – *вещественные корни уравнения*

$$\Phi_\tau(p) := \tau \sum_{k=1}^\infty a_k (p + \gamma_k)^{-1} + (1 - \tau) \sum_{k=1}^\infty b_k (p + \gamma_k)^{-1} = 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

принадлежащие интервалам $(-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ $(\gamma_0 = 0)$, $\tau' := \left\|A^{-1/2}A_0A^{-1/2}\right\|^{-1}$, $\tau'' := \left\|A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}\right\|$, $(0 < \tau' < \tau'' \le 1)$,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\sup_{\|f\|=1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((a_kA + b_kB)f, f)}{((A + B)f, f)}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\inf_{\|f\|=1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((a_kA + b_kB)f, f)}{((A + B + \gamma_k^2 I)f, f)}, \quad f \in D(A).$$

Замечание 2.3. Согласно лемме 2.1 из работы [16] оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Отсюда следует, что оператор $A^{-1/2}A_0A^{-1/2} = I + A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в H. В свою очередь, в силу упомянутой леммы 2.1 из работы [16] и, в силу самосопряженности оператора $A_0 = A + B$, оператор $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$ также допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Таким образом, величины τ' и τ'', фигурирующие в формулировке теоремы 3, определены корректно.

Теорема 2.4. *Невещественный спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *симметричен относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области* $\Omega_\varepsilon := \mathbb{C}\backslash\{\lambda : \alpha_1 \le \operatorname{Re}\lambda \le \alpha_2, |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$, *собственные значения являются изолированными, т.е. не имеют точек накопления.*

Доказательства теорем 2.1, 2.3, 2.4 содержатся в статье [17].

Отметим, что в работах [18], [19] изучались интегродифференциальные уравнения с сингулярными ядрами.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2

Вначале докажем теорему 2.2 в случае однородных (нулевых) начальных условий $(\varphi_0 = \varphi_1 = 0)$. Для доказательства корректной разрешимости задачи (2.1), (2.2) используем преобразование Лапласа. Напомним основные определения и утверждения, которые будут использоваться далее.

Определение 3.1. Назовем *пространством Харди* $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\hat{f}(\lambda)$ со значениями в H, голоморфных (аналитических) в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \gamma \ge 0\}$, для которых

$$\sup_{x>\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\hat{f}(x + iy)\right\|_H^2 dy < \infty, \quad \lambda = x + iy. \tag{3.1}$$

Сформулируем хорошо известную теорему Пэли–Винера для вектор-функций в пространстве Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$.

Теорема (Пэли–Винер). 1. *Пространство* $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ *совпадает с множеством вектор-функций* (*преобразований Лапласа*), *представимых в виде*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt, \tag{3.2}$$

где $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma \ge 0$.

2. *Для любой вектор-функции* $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ *существует и единственно представление* (3.2), *где вектор-функция* $f(t)$ *принадлежит пространству* $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ *и справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\gamma + iy)e^{(\gamma+iy)t}dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \ge 0. \tag{3.3}$$

3. *Для вектор-функций* $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *связанных соотношением* (3.2), *справедливо равенство*

$$\|\hat{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma, H)} \equiv \sup_{x>\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\hat{f}(x + iy)\right\|_H^2 dy = \int_0^{\infty} e^{-2\gamma t}\|f(t)\|_H^2 dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}. \tag{3.4}$$

Сформулированная теорема Пэли–Винера хорошо известна для скалярных функций и имеет естественное обобщение для вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Доказательство теоремы 2.2. При доказательстве теоремы 2.2 будут использоваться следующие леммы.

Лемма 3.1. *Предположим, что выполнено условие теоремы* 1. *Тогда существует такое* $\gamma > 0$, *что оператор-функция* $(I - V(\lambda))^{-1}$, *где*

$$V(\lambda) = \hat{K}(\lambda)A(\lambda^2 I + A_0)^{-1} + \hat{Q}(\lambda)B(\lambda^2 I + A_0)^{-1}, \tag{3.5}$$

является аналитической в правой полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma\}$ и *справедливо следующее неравенство*:

$$\sup_{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>\gamma} \left\| (I - V(\lambda))^{-1} \right\| \le \text{const}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.2. *Справедлива следующая оценка*:

$$\left\| \lambda(\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| \le \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}, \quad |\operatorname{Re}\lambda| > \gamma. \tag{3.7}$$

Доказательства лемм 3.1, 3.2 содержатся в статье [17].

Лемма 3.3. *Множество функций* $\{h(t)\}$ *таких, что* $h(0) = 0$, $h(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ *является всюду плотным в пространстве* $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.

Для удобства читателей, чтобы не загромождать изложение, доказательство леммы 3.3, перенесем в приложение (см. ниже).

Вначале изучим задачу с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Рассмотрим фундаментальную в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ последовательность функций таких, что $f_n^{(1)}(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $f_n(0) = 0$.

Согласно теореме 2.1 для функции $f_n(t)$ найдется единственное сильное решение $u_n(t) \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ задачи (2.1)–(2.3). Следует отметить, что сильное решение $u_n(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.10), что проверяется непосредственно интегрированием по частям. Заметим далее, что последовательность решений $\{u_n(t)\}$, соответствующих функциям $\{f_n(t)\}$, является фундаментальной в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$. Указанное свойство вытекает из теоремы Пэли–Винера, а также следующей леммы 3.4.

Лемма 3.4. *При сделанных предположениях относительно операторов A и B справедливы неравенства*

$$\left\| A_0^{1/2} L^{-1}(\lambda) \right\| \le \frac{\text{const}}{\operatorname{Re}\lambda}, \tag{3.8}$$

$$\left\| \lambda L^{-1}(\lambda) \right\| \le \frac{\text{const}}{\operatorname{Re}\lambda}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge \gamma > 0. \tag{3.9}$$

Для удобства читателей, чтобы не загромождать изложение, перенесем доказательство леммы 3.4 в приложение.

На основании оценок (3.8), (3.9), согласно теореме Пэли–Винера, вытекает, что

$$\begin{gathered} \|u_n(t)\|^2_{W^1_{2,\gamma}} = \left\|u_n^{(1)}(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}} + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}} \le \left(\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma} |\lambda| \left\|L^{-1}(\lambda)\right\|\right)^2 \|f_n(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma)} + \\ + \left(\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma} \left\|A_0^{\frac{1}{2}} L^{-1}(\lambda)\right\|\right)^2 \left\|\hat{f}_n(\lambda)\right\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma)} \le \text{const} \|f_n(t)\|^2_{L_{2,\gamma}}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Таким образом, по фундаментальной последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ мы получаем фундаментальную последовательность сильных решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$. В силу полноты пространства $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ существует функция $u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$, принадлежащая пространству $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ и удовлетворяющая интегральному тождеству (2.10). Последнее свойство вытекает из непрерывности скалярного произведения. В самом деле, рассмотрим интегральное тождество для сильных решений $u_n(t)$, соответствующих вектор-функциям $f_n(t)$:

$$\begin{gathered}-\left\langle u_n^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} + \left\langle A_0^{1/2}u_n(t), A_0^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma\langle u_n(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} - \\ - \left\langle \int_0^t K(t-s)A_0^{-1/2}Au_n(s)ds, A_0^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \left\langle \int_0^t Q(t-s)A_0^{-1/2}Bu_n(s)ds, Av(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle f_n(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} = 0.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении (3.11), в силу непрерывности скалярного произведения, получаем, что предельная функция $u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.10) при $\varphi_1 = 0$. Здесь мы используем то, что операторы $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$, $A_0^{-1/2}BA_0^{-1/2}$, как отмечалось ранее, допускают ограниченные замыкания в пространстве H.

Рассмотрим теперь общий случай, а именно задачу (2.1)–(2.3) с ненулевыми начальными условиями φ_0 и φ_1. Будем искать решение задачи (2.1)–(2.3) в виде

$$u(t) = \cos(A_0^{1/2}t)\varphi_0 + A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2})\varphi_1 + w(t).$$

Тогда $w(t)$ будет являться решением следующей задачи с однородными начальными условиями:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + A_0w(t) - \int_0^t K(t-s)Aw(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bw(s)ds = f_1(t), \quad t > 0, \tag{3.12}$$

$$w(+0) = 0, \tag{3.13}$$

$$w^{(1)}(+0) = 0, \tag{3.14}$$

где $f_1(t) = f(t) + h(t)$, вектор-функция $h(t)$ имеет вид $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$,

$$\begin{gathered}h_1(t) = \int_0^t (K(t-s)A(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0 + A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1))ds, \\ h_2(t) = \int_0^t Q(t-s)B(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0 + A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)ds.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Для доказательства утверждения о разрешимости достаточно показать, что $h(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для некоторого $\gamma_0 \ge 0$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t e^{-\gamma_j(t-s)}\cos(A_0^{1/2}s)ds = (A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}(\gamma_j(\cos(A_0^{1/2}t) - e^{-\gamma_j t}) + A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t)), \tag{3.16}$$

$$\int_0^t e^{-\gamma_j(t-s)}\sin(A_0^{1/2}s)ds = (A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\gamma_j t}I - \cos(A_0^{1/2}t)) + \gamma_j\sin(A_0^{1/2}t)). \tag{3.17}$$

В дальнейшем нам потребуются следующие легко проверяемые предложения.

Предложение 3.1. *При сделанных предположениях справедливы следующие неравенства*:

$$\left\|(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}\right\| \le \frac{1}{2}\gamma_j^{-1}\left\|A_0^{-1/2}\right\|, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Предложение 3.2. *При сделанных предположениях справедливы следующие неравенства*:

$$\left\|A_0(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}\right\| \le 1, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Из соотношений (3.16), (3.17) получаем следующее представление для функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$:

$$\begin{gathered}h_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j A(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}[(\gamma_j \cos(A_0^{1/2}t) - e^{-\gamma_j t}I) + A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t)]\varphi_0 + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} a_j A[A_0^{-1/2}(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\gamma_j t}I - \cos(A_0^{1/2}t)) + \gamma_j \sin(A_0^{1/2}t))]\varphi_1,\end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}h_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j B(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}[(\gamma_j \cos(A_0^{1/2}t) - e^{-\gamma_j t}I) + A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t)]\varphi_0 + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} b_j B[A_0^{-1/2}(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\gamma_j t}I - \cos(A_0^{1/2}t)) + \gamma_j \sin(A_0^{1/2}t))]\varphi_1.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Из сходимости рядов $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$, того, что оператор BA^{-1} допускает оценку $\|BA^{-1}\| < 1$, предложений (3.18), (3.19), неравенств

$$\|AA_0^{-1}\| \le 1, \quad \|BA_0^{-1}\| \le 1 \tag{3.22}$$

получаем следующие оценки для вектор-функций $h_1(t)$, $h_2(t)$:

$$\begin{gathered}\|h_1(t)\| \le \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(AA_0^{-1})A_0(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}\gamma_j \cos(A_0^{1/2}t)\varphi_0\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(AA_0^{-1})A_0(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}e^{-\gamma_j t}\varphi_0\right\| + \\ + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(AA_0^{-1})A_0(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t)\varphi_0\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(AA_0^{-1})A_0A_0^{-1/2}(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}A_0^{1/2}e^{-\gamma_j t}\varphi_1\right\| + \\ + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(AA_0^{-1})A_0A_0^{-1/2}(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}A_0^{1/2}\cos(A_0^{1/2}t)\varphi_1\right\| + \\ + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(AA_0^{-1})A_0A_0^{-1/2}(A_0 + \gamma_j^2 I)^{-1}\sin(A_0^{1/2}t)\varphi_1\right\| \le k_1\left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\| + k_2\|\varphi_0\| + \\ + k_3\left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\| + k_4\|\varphi_1\| + k_5\|\varphi_1\| + k_6\|\varphi_1\| \le \theta_1\left(\left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\| + \|\varphi_1\|\right)\end{gathered} \tag{3.23}$$

с некоторыми положительными постоянными k_j $(j = 1, 2 \ldots 6)$, θ_1, не зависящими от векторов φ_0, φ_1. Совершенно аналогично получаем оценку для вектор-функции $h_2(t)$:

$$h_2(t) \le \theta_2\left(\left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\| + \|\varphi_1\|\right) \tag{3.24}$$

с положительной постоянной θ_2, не зависящей от векторов φ_0, φ_1.

При получении оценок (3.23), (3.24) мы использовали известные оценки

$$\left\|\cos(A_0^{1/2}t)\right\| \le 1, \quad \left\|\sin(A_0^{1/2}\varphi_1)\right\| \le 1,$$

а также то, что оператор $A_0^{1/2}$ и оператор-функции $\cos(A_0^{1/2}t)$, $\sin(A_0^{1/2}t)$ коммутируют между собой, что в свою очередь следует из самосопряженности оператора $A_0^{1/2}$.

В свою очередь, из оценок (3.23), (3.24) вытекают неравенства

$$\|h_1(t)\|_{L_{2,\gamma}}^2 \le k_1(\gamma)\left(\left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\| + \|\varphi_1\|\right)^2, \quad k_1(\gamma) = \frac{\theta_1}{2\gamma}, \tag{3.25}$$

$$\|h_2(t)\|_{L_{2,\gamma}}^2 \le k_2(\gamma)\left(\left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\| + \|\varphi_1\|\right)^2, \quad k_2(\gamma) = \frac{\theta_2}{2\gamma}. \tag{3.26}$$

Следовательно, на основании оценок (3.25), (3.26) получаем, что вектор-функция $f_1(t) = f(t) + h(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ и для нее справедливо неравенство

$$\|f_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(R_+,H)} \le \|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(R_+,H)} + d\left(\left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\| + \|\varphi_1\|\right) \tag{3.27}$$

с постоянной d, не зависящей от векторов φ_0, φ_1. Отсюда получаем обобщенную разрешимость задачи (2.1)–(2.3) с ненулевыми начальными данными.

Перейдем к оценкам обобщенных решений. Начнем со случая нулевых начальных данных $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Для фундаментальной в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ и соответствующей ей фундаментальной последовательности решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, установлено неравенство (3.10). Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (3.10), в пределе мы получим неравенство

$$\|u(t)\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0^{1/2})} \le \mathrm{const}\,\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}.$$

Законность соответствующего предельного перехода установлена в начале доказательства теоремы 2.2.

Перейдем к случаю ненулевых начальных данных. Принимая во внимание, что задача с ненулевыми начальными данными может быть сведена к задаче с нулевыми начальными данными и новой правой частью $f_1(t) = f(t) + h(t)$. Учитывая оценку (3.27), получаем, что для решения исходной задачи выполнено неравенство

$$\|u(t)\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0^{1/2})} \le d_1\left(\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\| + \|\varphi_1\|\right) \tag{3.28}$$

с постоянной d_1, не зависящей от вектор-функции $f(t)$ и векторов φ_0, φ_1. Теорема 2.2 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 3.3. Пусть функция $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$. Будем искать функцию $h(t)$ такую, что $h(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, $h(0) = 0$ и $\|f(t) - h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \le \varepsilon$. Обозначим через $g(t) := e^{-\gamma t}f(t)$ такую вектор-функцию, что $g(t) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ и $\theta(t) := e^{-\gamma t}h(t)$, вектор-функция $\theta(t) \in W^1_2(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2}t)$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\|f(t) - h(t)\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+,H)} = \int_0^\infty e^{-2\gamma t}\|f(t) - h(t)\|^2 dt = \int_0^\infty \left\|e^{-\gamma t}f(t) - e^{-\gamma t}h(t)\right\|^2 dt = \int_0^\infty \|g(t) - \theta(t)\|^2 dt.$$

Таким образом, вопрос о плотности семейства функций таких, что $h(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, $h(+0) = 0$, в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ сводится к вопросу о плотности семейства функций $\{\theta(t)\}$ таких, что $\theta(t) \in W^1_2(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, $\theta(+0) = 0$, в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, H)$. В свою очередь плотность семейства функций $\{\theta(t)\}$ вытекает из известного результата из монографии [15]. В самом деле, согласно теореме 2.1 из [15], семейство бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций всюду плотно в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Следовательно, подмножество бесконечно дифференцируемых функций с носителем в $\mathbb{R}_+$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Но указанное семейство, очевидно, принадлежит семейству функций $\{\theta(t)\}$ таких, что $\theta(t) \in W^1_2(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, $\theta(+0) = 0$, что и доказывает лемму 3.3.

Доказательство леммы 3.4. Установим неравенства (3.8), (3.9). Оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ представима в виде

$$L^{-1}(\lambda) = (\lambda^2 I + A_0)^{-1}(I - V(\lambda))^{-1}, \tag{П1}$$

где оператор-функция $V(\lambda)$ задается соотношением (3.5). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что справедливы неравенства

$$\left\|A_0^{1/2}(\lambda^2 I + A_0)^{-1}\right\| \le \frac{\mathrm{const}}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}, \quad \left\|\lambda(\lambda^2 I + A_0)^{-1}\right\| \le \frac{\mathrm{const}}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}. \tag{П2}$$

Отметим, что второе неравенство (П2) доказано в лемме 3.2. Для доказательства первого неравенства согласно спектральной теореме (см. [14, с. 452, 453]) достаточно установить следующее неравенство:

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda^2+\alpha}\right)\le\frac{\text{const}}{|\operatorname{Re}\lambda|},\quad \alpha\in\sigma(A_0)\subset[\kappa_0,+\infty). \tag{3.29}$$

Переходя к вещественной и мнимой части $\lambda=\tau+i\nu$, получаем искомое неравенство

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\tau^2+(\nu-\sqrt{\alpha})^2}\sqrt{\tau^2+(\nu+\sqrt{\alpha})^2}}\le\frac{\text{const}}{|\tau|}.$$

Отсюда на основании представления (П1), неравенств (П2) и леммы 3.1 получаем утверждение леммы 3.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator approach to Linear // Problems of Hydrodynamics. V. 2. Nonself adjoint Problems for Viscous Fluids. Berlin: Basel—Boston, 2003.
2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
4. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V.31. P. 113—126.
5. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. A. and App. 2009. V. 355. P. 1—11.
6. *Лыков А.В.* Проблема тепло- и массообмена. Минск: Наука и техника, 1976.
7. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach // Appl. Math. Optim. 2005. V. 52. P. 143—165.
8. *Власов В.В., Гавриков А.А., Иванов С.А., Князьков Д.Ю., Самарин В.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства комбинированных сред // Современные проблемы матем. и механ. 2009. Т. 5. № 1. С. 134—155.
9. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сборник. 2000. Т. 191. № 7. С. 31—72.
10. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений// Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 75—114.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Докл. АН. 2010. Т. 434. № 1. С. 12—15.
12. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 39. С. 36—65.
13. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016.
14. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1966.
15. *Лионс Ж.П., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: 1971.
16. *Шкаликов А.А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1988. Т. 177. № 1. С. 96—118.
17. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 58. С. 22—42.
18. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2019. Т. 32. С. 91—110.
19. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и представление решений вольтерровых интегродифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Докл. АН. 2019. Т. 488. № 5. С. 103—107.