ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 9, с. 1473–1490

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.863

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЯМИ В КОЛЛЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ПЕНСИОННОГО СТРАХОВАНИЯ: ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. А. Белкина[1,*], Н. Б. Конюхова[2,], С. В. Курочкин[2,***]**

[1] *117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия*

[2] *119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия*

**e-mail: tbel@cemi.rssi.ru*

***e-mail: nadja@ccas.ru*

****e-mail: kuroch@ccas.ru*

Поступила в редакцию 03.03.2022 г.
Переработанный вариант 26.03.2022 г.
Принята к публикации 11.05.2022 г.

Для коллективной модели пенсионного страхования (дуальной модели риска) рассматривается проблема оптимального управления инвестициями с целью максимизации вероятности неразорения страховой компании. Применение динамического программирования для поиска оптимальной стратегии приводит к сингулярным нелинейным краевым задачам для интегродифференциальных уравнений. В случае экспоненциального распределения размера премий даются аналитические исследования этих задач. Приводятся результаты расчетов и дается их сравнение с проведенными ранее расчетами для простых стратегий инвестиций (рисковых и безрисковых) в рассматриваемой модели. Библ. 13. Фиг. 3.

Ключевые слова: коллективная модель пенсионного страхования, вероятность неразорения страховой компании, оптимальное управление инвестициями, уравнение Беллмана, экспоненциальное распределение размера премий, нелинейные интегродифференциальные уравнения, сингулярные краевые задачи.

DOI: 10.31857/S0044466922090058

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа относится к проблеме оптимального управления инвестициями в моделях страхования. В то же время, в определенном смысле, она является продолжением работ [1], [2], где рассматриваются стратегии управления определенного вида.

В [1] рассматривается задача о вероятности неразорения (ВНР) для коллективной модели пенсионного страхования (или так называемой модели аннуитета в страховании жизни, см. [3]) в условиях инвестирования всего резерва страховой компании (СК) или фиксированной его доли в рисковый актив, моделируемый геометрическим броуновским движением. Типичный договор страхования в данной модели – это договор пожизненной ренты, предполагающий пожизненное обеспечение страхователя в обмен на передачу права наследования его собственности в пользу СК. Коллективная модель страхового риска рассматривается как дуальная по отношению к классической модели Крамéра–Лундберга (о соотношении этих двух моделей см. [4]). В структуре процесса, описывающего динамику резерва СК, эта двойственность выражается, в частности, в замене на противоположные знаков как у случайной составляющей (составного пуассоновского процесса), так и у детерминированной, отвечающей в данном случае выплатам пенсий с постоянной интенсивностью. Если скачки процесса, имеющие отрицательные знаки в классической модели, означают выплаты по требованиям, то, взятые с положительным знаком, такие скачки (в дальнейшем будем называть их *премиями*) в дуальной модели соответствуют приростам резерва в моменты окончания жизни страхователей. (Другие ссылки на литературу с описанием этой модели и некоторыми результатами ее исследования можно также найти в [1], [2].) Для случая экспоненциального распределения размеров скачков в [1] показано, что ВНР как функция начального капитала (НК), определенная на неотрицательной вещественной полуоси, является решением сингулярной краевой задачи (КЗ) для интегродифференциального уравнения (ИДУ) с невольтерровым интегральным оператором. Приводится доказательство существования и единственности решения этой задачи, получены асимптотические представления для ВНР при малых и больших значениях НК, предложен эффективный алгоритм численного нахождения решения, проведены расчеты и дана их экономическая интерпретация: показано, что в пенсионном страховании вложение средств в рисковые активы играет важную роль для увеличения платежеспособности компании при малых значениях НК.

В [2] изучается та же коллективная модель пенсионного страхования (пожизненной ренты), но с учетом безрисковой стратегии инвестиций, т.е. в случае, когда весь резерв СК в каждый момент времени инвестируется в безрисковый актив (банковский счет). Дается сравнение этой стратегии с изученными в [1] рисковыми стратегиями инвестиций, при которых, независимо от размера резерва СК, в каждый момент времени постоянную положительную долю этого резерва составляют рисковые активы (акции), а оставшаяся доля инвестируется в банковский счет (такие стратегии называем *простыми рисковыми стратегиями*). Сравнение стратегий основывается на традиционном критерии платежеспособности – ВНР. При экспоненциальном распределении размеров скачков в [2] показано, что в случае безрисковых инвестиций ВНР как функция НК, определенная на неотрицательной вещественной полуоси, является решением сингулярной задачи для ИДУ с невольтерровым интегральным оператором. Получено решение поставленной задачи, проведено аналитическое исследование его свойств, приводятся численные примеры. На примерах дается сравнение влияния рисковых и безрисковых инвестиций на ВНР в данной модели. В частности, показано, что, в то время как при достаточно больших значениях НК (точнее, при значениях, не меньших некоторого числа, определяемого параметрами модели) полное вложение резерва в безрисковый актив делает разорение невозможным, при малых значениях НК применение рисковых инвестиций может увеличивать ВНР в большей мере, чем применение только безрискового актива.

Проведенное в [2] сравнение простых рисковых и безрисковой стратегий инвестиций демонстрирует актуальность проблемы оптимального динамического управления долей рискового актива в инвестиционном портфеле страховщика с целью максимизации ВНР по коллективному портфелю договоров. Аналогичная проблема, рассматриваемая в рамках динамической модели коллективного риска, впервые изучалась в [5] в случае, когда динамика страхового резерва описывается винеровским процессом со сносом (так называемая диффузионная модель риска, являющаяся по сути диффузионной аппроксимацией классической модели Крамéра–Лундберга). Для самóй классической модели оптимальное управление инвестициями было позже исследовано в [6], [7]. Во всех указанных работах рисковый актив моделировался геометрическим броуновским движением. В обоих случаях (и для классической модели, и для ее диффузионной аппроксимации) из полученных результатов следовало, что при малых значениях резерва оптимальная стратегия инвестиций требует заимствования денежных средств при заданной процентной ставке для вложения их в рисковый актив. Это привело к дальнейшим исследованиям, предполагающим ограничения на заимствования в рассматриваемой модели: например, в [8] изучался случай, когда доля рискового актива в портфеле может быть неотрицательной и не превосходящей некоторой величины. Введение же в ограничения возможности принятия отрицательных значений для доли рискового актива, т.е. возможности использования коротких позиций в акциях, привело к парадоксальному на первый взгляд результату, полученному в [9]: при сильном ограничении на заимствования и малых значениях резерва оптимальная стратегия может включать короткие позиции, в то время как в модели без каких-либо ограничений коротких позиций в оптимальной стратегии никогда не возникает.

Целью данной работы является исследование оптимальной стратегии инвестиций в описанной выше коллективной модели пенсионного страхования при отсутствии ограничений на заимствования. Специфика данной модели состоит в том, что, как уже было сказано выше, полное вложение резерва в безрисковый актив при условии, что его значение не меньше некоторой фиксированной величины, определяемой параметрами модели, обеспечивает неразорение с вероятностью единица, определяя, следовательно, оптимальную стратегию при этих значениях резерва, и задача сводится к поиску оптимальной стратегии на некотором конечном отрезке значений резерва. Тем не менее функция Беллмана данной задачи, или оптимальная ВНР как функция НК, от которой зависит оптимальная стратегия, если она существует, должна являться решением некоторого нелинейного ИДУ второго порядка, определенного на всей неотрицательной полуоси (точнее, она должна удовлетворять этому ИДУ всюду, за исключением, быть может, одной точки, являющейся правой границей указанного конечного отрезка). Исследование сингулярной нелинейной задачи для ИДУ в модели, рассматриваемой в данной работе, позволяет изучить свойства оптимальной стратегии и соответствующей ей ВНР.

Далее, в частности, используются обозначения: $\mathbf{P}(A)$ – вероятность события A; $\mathbf{E}X$ – математическое ожидание случайной величины X. Остальные обозначения и сокращения будут вводиться по мере необходимости.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Исходный процесс риска для модели без инвестиций

Приведем здесь краткое описание модели пенсионного страхования, подробно описанной в [1]. Данная модель представляется процессом динамики капитала СК по портфелю договоров пожизненной ренты (процессом риска), имеющим вид

$$R_t = u - ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Здесь R_t – размер капитала в момент времени t, $t \geq 0$; u – размер НК, $0 < c$ – размер затрат на выплату пенсий в единицу времени, $N(t)$ – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ ($\mathbf{E}N(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$), описывающий количество поступивших премий к моменту времени t; Z_k ($k = 1,2,\ldots$) – размеры премий – независимые одинаково распределенные (невырожденные) неотрицательные случайные величины (СВ), не зависящие от процесса $N(t)$ и имеющие функцию распределения (ФР) $F(z)$ такую, что

$$F(0) = 0, \quad \int_0^\infty z dF(z) = m, \quad 0 < m < \infty. \tag{1.2}$$

Будем также предполагать, что $F(z)$ имеет непрерывную плотность с носителем $(0,\infty)$. В случае экспоненциального распределения размеров премий будет

$$F(z) = 1 - \exp(-z/m), \quad m > 0. \tag{1.3}$$

1.2. Модель, включающая простые стратегии инвестирования. Постановка задачи оптимального управления инвестициями

Прежде чем сформулировать оптимизационную задачу максимизации ВНР с помощью управления инвестициями, опишем так называемые простые стратегии инвестирования. Простые стратегии, включающие два вида активов – рисковый (акции) и безрисковый (банковский счет), устроены таким образом, что с течением времени доля капитала, вложенного в акции (положительная или нулевая), остается постоянной. При меняющихся ценах активов это соответствует постоянной перестройке финансового портфеля. Если доля акций в этом портфеле нулевая, то весь капитал фонда непрерывно инвестируется в безрисковый актив; при постоянной процентной ставке $r > 0$ эволюция этого актива описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)

$$dB_t = rB_t dt, \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

где B_t – величина банковского счета в момент времени t. В этом случае динамика капитала компании X_t описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$dX_t = rX_t dt + dR_t, \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

с начальным условием $X_0 = u$.

Процесс (1.5) может интерпретироваться как соответствующий “вырожденному” случаю при рассмотрении простых инвестиционных стратегий, включающих рисковый актив, влияние которых на ВНР для изучаемой здесь модели исследовалось в [1]. Пусть динамика цены рискового актива моделируется процессом геометрического броуновского движения

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t, \quad t \geq 0,$$

где S_t – цена акции в момент времени t, μ – ожидаемая доходность, $\mu > r$, $0 < \sigma$ – волатильность, w_t – стандартное броуновское движение. При указанных предположениях относительно простых стратегий соответствующий процесс риска удовлетворяет СДУ

$$dX_t = (\mu - r)\alpha X_t dt + rX_t dt + \sigma\alpha X_t dw_t + dR_t, \quad t \geq 0, \tag{1.6}$$

с начальным условием $X_0 = u$, где α – доля рискового актива в портфеле, $0 \leq \alpha \leq 1$.

В случае $\alpha = 0$ СДУ (1.6) приобретает вид (1.5) и соответствует полному вложению капитала в безрисковый актив. *Рисковыми простыми стратегиями* инвестиций (или, для краткости, “рисковыми инвестициями”) называем стратегии, соответствующие случаю $0 < \alpha \leq 1$, а при $\alpha = 0$ стратегию называем *безрисковой* (исследование безрисковой стратегии в данной модели и, в частности, ее сравнение с простыми рисковыми стратегиями в смысле их влияния на ВНР проводилось в [2]).

ВНР на бесконечном интервале времени для процесса X_t (как функция от НК u) определяется следующим образом: $\varphi(u) = \mathbf{P}(X_t \geq 0,\ t \geq 0 | X_0 = u)$.

Напомним (см. [1]), что инфинитезимальный оператор, соответствующий однородному марковскому процессу $X_t = X_t^\alpha$, удовлетворяющему СДУ (1.6), имеет вид

$$(\mathcal{A}^\alpha f)(u) = \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 u^2 f''(u) + f'(u)(\mu_\alpha u - c) - \lambda f(u) + \lambda\int_0^\infty f(u+z)dF(z), \quad u > 0, \tag{1.7}$$

где

$$\mu_\alpha = \alpha\mu + (1-\alpha)r > 0, \quad \sigma_\alpha = \alpha\sigma \geq 0. \tag{1.8}$$

При $0 < \alpha \leq 1$ в качестве области определения оператора рассматриваем некоторый класс функций $f(u)$ в пространстве $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ дважды непрерывно дифференцируемых на $(0, \infty)$ функций.

В [1] для случая экспоненциальной ФР $F(z)$ вида (1.3) показано, что ВНР процесса X_t^α как функция НК при $\alpha > 0$ является дважды непрерывно дифференцируемой на $(0, \infty)$ функцией и удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{A}^\alpha f)(u) = 0, \quad u > 0, \tag{1.9}$$

имеющему (при замене f на φ) вид линейного ИДУ

$$\frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 u^2 \varphi''(u) + (\mu_\alpha u - c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda\int_0^\infty \varphi(u+z)dF(z) = 0, \quad u > 0. \tag{1.10}$$

В данной работе вместо постоянной доли α рисковых активов в портфеле в каждый момент времени t рассматривается доля α_t рисковых активов как случайная величина, зависящая от предыдущей информации и определяющая управление в момент времени t. В целом же *допустимым* (неупреждающим) *управлением* в данной модели будем называть случайный процесс $\pi = \{\alpha_t\}_{t\geq 0}$, предсказуемый относительно естественной фильтрации, порожденной парой процессов $\{R_t, w_t\}$. Множество всех допустимых управлений будем обозначать через Π.

Тогда динамика капитала X_t^π при управлении $\pi \in \Pi$ будет определяться СДУ в виде

$$dX_t^\pi = (\mu - r)\alpha_t X_t^\pi dt + rX_t^\pi dt + \sigma\alpha_t X_t^\pi dw_t + dR_t, \quad t \geq 0. \tag{1.11}$$

ВНР процесса X_t^π с начальным условием $X_0^\pi = u$ будем обозначать через $\varphi^\pi(u)$. Ясно, что процесс (1.6) является частным случаем процесса (1.11) при управлении $\pi = \pi_\alpha$, для которого $\alpha_t \equiv \alpha$. Будем рассматривать задачу поиска оптимального управления $\pi^* = \{\alpha_t^*\}_{t\geq 0} \in \Pi$, которое, возможно, может быть задано оптимальной стратегией (функцией от текущего капитала), если она существует. Оптимальность при этом понимается как максимизация ВНР на бесконечном интервале времени:

$$\varphi^*(u) = \sup_{\pi\in\Pi}\varphi^\pi(u) \quad \forall u > 0. \tag{1.12}$$

1.3. Уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана и некоторые дополнительные условия

Применение метода динамического программирования (см., например, [10]), наряду с формулой полной вероятности и формулой Ито, позволяют осуществить эвристический (т.е. без априорного доказательства дифференцируемости) вывод ИДУ для функции Беллмана $V(u)$ рассматриваемой оптимизационной задачи (уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое для краткости далее будем называть *уравнением Беллмана*; по отношению к задачам максимизации ВНР о выводе такого уравнения см., в частности, [6]). В данном случае это уравнение имеет вид

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}(\mathcal{A}^{\alpha}V)(u) = 0, \tag{1.13}$$

где $\mathcal{A}^{\alpha}$ определено в (1.7). В дальнейшем будут доказаны утверждения о существовании решения $V(u)$ уравнения (1.13), обладающего следующими свойствами. При $r > 0$ функция $V(u)$ является, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемой на интервалах $(0, c/r)$, $(c/r, \infty)$ и удовлетворяет уравнению (1.13) всюду, за исключением, быть может, точки c/r, в которой она может не иметь производной. Кроме того, $V(u)$ удовлетворяет условиям

$$V(0) = 0, \quad V(u) = 1, \quad u \geq c/r. \tag{1.14}$$

При $r = 0$ уравнение (1.13) имеет дважды непрерывно дифференцируемое решение $V(u)$ на интервале $[0, \infty)$, удовлетворяющее условиям

$$V(0) = 0, \quad \lim_{u\to\infty} V(u) = 1. \tag{1.15}$$

Окончательный ответ на вопрос о виде и свойствах функции $\varphi^*(u)$ (соответствующей оптимальному управлению в том случае, если оно существует, и тогда супремум в (1.12) достигается) должно дать утверждение о том, что решение $V(u)$ уравнения (1.13), удовлетворяющее вышеописанным условиям, определяет функцию $\varphi^*(u)$ в соответствующей оптимизационной задаче (при $r > 0$ или $r = 0$), т.е. $V(u) \equiv \varphi^*(u)$.

Приведем здесь обоснование сформулированных выше условий на решение $V(u)$, показав, что они вытекают из “физических” свойств функции $\varphi^*(u)$ задачи (1.12). В частности, нулевое начальное условие в обоих случаях возникает в силу наличия отрицательной детерминированной неоднородной составляющей $(-cdt)$ в уравнении (1.11) (напомним, что R_t определено в (1.1)) для процесса X_t^{π}, моментально выводящей его в отрицательную область при нулевом начальном значении и при любом допустимом управлении π (для строгого доказательства в частном случае, а именно, при простых стратегиях, см. лемму 1 в [1]; данное доказательство легко распространяется на случай любого допустимого управления). Следовательно, $\varphi^*(0) = 0$, что объясняет первые условия в (1.14) и (1.15).

Чтобы обосновать вторые условия в (1.14) и (1.15), достаточно заметить, что функция $\varphi^*(u)$ является неубывающей (это нетрудно показать, исходя из ее определения), а также воспользоваться результатами [1], [2] относительно ВНР при использовании простых стратегий. Ясно, что из (1.12), в частности, следует, что для любого $\alpha \geq 0$ и $u > 0$ имеет место неравенство

$$\varphi^*(u) \geq \varphi^{\pi_\alpha}(u), \tag{1.16}$$

где $\varphi^{\pi_\alpha}(u)$ – ВНР для процесса вида (1.6), т.е. процесса (1.11), с начальным состоянием $X_0 = u$, соответствующего управлению π_α. Тогда, так как в случае $\alpha = 0$ и $r > 0$ имеем $\varphi^{\pi_0}(u) = 1$ при $u \geq c/r$ (см. лемму 2 в [2]), то очевидно, что этому же свойству удовлетворяет и функция $\varphi^*(u)$. Рассматривая теперь в случае $r = 0$ положительные α в неравенстве (1.16), выберем такое α, при котором $2\mu_\alpha/\sigma_\alpha^2 > 1$, где μ_α, σ_α^2 определены в (1.8), т.е. $\alpha < 2\mu/\sigma^2$. Для любого положительного α, удовлетворяющего последнему неравенству, инвестиционный портфель, соответствующий простой стратегии, т.е. управлению π_α, становятся “надежным”, и из результатов [1] (см. там теоремы 1 и 4) следует, что ВНР $\varphi^{\pi_\alpha}(u)$ процесса (1.11) с начальным состоянием $X_0 = u$ удовлетворяет условию $\lim_{u\to\infty} \varphi^{\pi_\alpha}(u) = 1$, а следовательно, этому условию удовлетворяет и функция $\varphi^*(u)$.

2. АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ $r > 0$

Будем исследовать уравнение (1.13) при $u > 0$. С учетом (1.10), (1.8) перепишем его в виде

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2u^2V''(u) + [(\alpha\mu + (1-\alpha)r)u - c]V'(u) - \lambda V(u) + \lambda\int_0^\infty V(u+z)dF(z)\right\} = 0. \quad (2.1)$$

Предположим, что существует решение $V(u)$ уравнения Беллмана (1.13) с условиями (1.14), непрерывно дифференцируемое на $\mathbb{R}_+$, дважды непрерывно дифференцируемое на интервале $(0, c/r)$ и удовлетворяющее требованиям

$$V'(u) > 0, \quad V''(u) < 0, \quad u \in (0, c/r). \quad (2.2)$$

(Заметим, что при неотрицательности второй производной функции $V(u)$ в некоторой точке $u \in (0, c/r)$ супремум в (2.1) не достигается.) Найдем значение α^*, доставляющее экстремум в (2.1) в предположении (2.2) для $u \in (0, c/r)$:

$$\alpha^* = \alpha_V^*(u) := -\frac{(\mu - r)V'(u)}{\sigma^2uV''(u)}. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получаем нелинейное ИДУ:

$$(ru - c)V'(u) - \lambda V(u) + \lambda\int_0^\infty V(u+z)dF(z) = \frac{(\mu - r)^2(V'(u))^2}{2\sigma^2V''(u)}, \quad u \in (0, c/r); \quad (2.4)$$

при $u > c/r$, с учетом (1.14), это уравнение также удовлетворяется. Пусть $H(u) = 1 - F(u)$ (дополнительная функция распределения СВ одной премии Z_k (см. (1.1))). Тогда, с учетом условий $H(0) = 1$, $\lim_{u\to\infty} H(u) = 0$ перепишем ИДУ (2.4) в виде:

$$(ru - c)V'(u) + \lambda\int_0^\infty H(z)V'(u+z)dz = \frac{(\mu - r)^2(V'(u))^2}{2\sigma^2V''(u)}, \quad u \in (0, c/r). \quad (2.5)$$

Из условий (1.14), в частности, получаем

$$V'(u) = 0, \quad u > c/r. \quad (2.6)$$

Тогда для $u \in (0, c/r)$ справедливы равенства

$$\int_0^\infty H(z)V'(u+z)dz = \int_0^{c/r-u} H(z)V'(u+z)dz = \int_u^{c/r} H(y-u)V'(y)dy. \quad (2.7)$$

В результате ИДУ (2.5) приобретает вид:

$$(ru - c)V'(u) + \lambda\int_u^{c/r} H(y-u)V'(y)dy = \frac{(\mu - r)^2(V'(u))^2}{2\sigma^2V''(u)}, \quad u \in (0, c/r). \quad (2.8)$$

Обозначив $V'(u) = v(u)$, получаем из (2.8) нелинейное ИДУ для $v(u)$:

$$(ru - c)v(u) + \lambda\int_u^{c/r} H(y-u)v(y)dy = \frac{(\mu - r)^2v^2(u)}{2\sigma^2v'(u)}, \quad u \in (0, c/r). \quad (2.9)$$

Будем искать гладкое на $(0, c/r)$ решение ИДУ (2.9) с условием

$$v(c/r) = 0, \quad (2.10)$$

которое должно выполняться в силу предположения о гладкости функции $V(u)$ на $\mathbb{R}_+$ и условия (2.6).

2.1. Поведение решения $v(u)$ и его производной при $u \uparrow (c/r)$

Пусть $v(u)$ – решение задачи (2.9), (2.10). Изучим поведение $v(u)$ при $u \uparrow (c/r)$, учитывая, что

$$H(z) = 1 + o(1), \quad z \to +0 \tag{2.11}$$

(в предположении, что $F(z)$ непрерывна в нуле).

При $u \uparrow (c/r)$ ищем $v(u)$ в виде:

$$v(u) = \gamma(c/r - u)^{\beta}(1 + o(1)), \quad v'(u) = -\gamma\beta(c/r - u)^{\beta-1}(1 + o(1)), \quad \beta, \gamma > 0. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.9), находим, что коэффициент γ не определяется, а коэффициент β – положительный корень квадратного уравнения

$$r\beta^2 + (r - \lambda - (\mu - r)^2/(2\sigma^2))\beta - (\mu - r)^2/(2\sigma^2) = 0, \tag{2.13}$$

т.е.

$$\beta = \left[-\left(r - \lambda - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(r - \lambda - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\right)^2 + 2r\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}}\right]/(2r). \tag{2.14}$$

Замечание 1. Нетрудно проверить, что если в (2.9) положить $H(z) \equiv 1$, то функция $v(u) = \gamma(c/r - u)^{\beta}$ при β вида (2.14) и любом γ окажется точным решением ИДУ (2.9).

Наряду с положительным корнем β уравнения (2.13) будем рассматривать его отрицательный корень, который обозначим через β_-. Тогда по теореме Виета получаем равенства:

$$\beta + \beta_- = (\mu - r)^2/(2r\sigma^2) + \lambda/r - 1, \quad \beta\beta_- = -(\mu - r)^2/(2r\sigma^2). \tag{2.15}$$

Рассмотрим случаи различных соотношений между параметрами в (2.15).

1. Пусть $\lambda \ge 2r$. Тогда из (2.15) получаем, что $\beta + \beta_- > 1$, т.е. $\beta > 1$. В результате из (2.12) следует справедливость предельных равенств

$$\lim_{u \to c/r - 0} v(u) = \lim_{u \to c/r - 0} v'(u) = 0, \tag{2.16}$$

т.е. $V(u)$ (напомним, что функция $v(u)$ является производной функции $V(u)$) дважды непрерывно дифференцируема в точке $u = c/r$.

2. Пусть $\lambda < 2r$ и $(\mu - r)^2/(r\sigma^2) > 2 - \lambda/r$. Покажем, что $\beta > 1$. Из (2.15) получаем

$$\beta + \beta_- > \lambda/(2r), \quad \beta\beta_- < \lambda/(2r) - 1. \tag{2.17}$$

Теперь предположим противное, т.е. что $\beta \le 1$. Тогда из первого неравенства в (2.17) получим

$$\beta_- > \lambda/(2r) - 1, \tag{2.18}$$

что несовместимо со вторым неравенством в (2.17).

Следовательно, $\beta > 1$, и снова имеем, что $V(u)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке c/r.

3. Пусть $\lambda < 2r$ и $(\mu - r)^2/(r\sigma^2) = 2 - \lambda/r$. Тогда будет

$$\beta + \beta_- = \lambda/(2r), \quad \beta\beta_- = \lambda/(2r) - 1, \tag{2.19}$$

что влечет соотношение $\beta(\lambda/(2r) - \beta) = \lambda/(2r) - 1$, откуда следует, что $\beta = 1$.

В результате из (2.12) следует справедливость предельных равенств

$$\lim_{u \to c/r - 0} v(u) = 0, \quad \lim_{u \to c/r - 0} v'(u) = -\gamma, \quad \gamma > 0, \tag{2.20}$$

т.е. $V(u)$ непрерывно дифференцируема в точке c/r, но ее вторая производная в этой точке разрывна.

4. Пусть, наконец, $\lambda < 2r$ и $(\mu - r)^2/(r\sigma^2) < 2 - \lambda/r$. Покажем, что $\beta < 1$. Из (2.15) получаем

$$\beta + \beta_- < \lambda/(2r), \quad \beta\beta_- > \lambda/(2r) - 1. \tag{2.21}$$

Теперь предположим противное, т.е. что $\beta \geq 1$. Тогда из первого неравенства в (2.21) получим

$$\beta_- < \lambda/(2r) - 1, \tag{2.22}$$

что несовместимо со вторым неравенством в (2.21).

Следовательно, $\beta < 1$, и справедливы предельные соотношения

$$\lim_{u\to c/r-0} v(u) = 0, \qquad \lim_{u\to c/r-0} v'(u) = -\infty, \tag{2.23}$$

т.е. вновь, хотя функция $V(u)$ непрерывно дифференцируема в точке c/r, но ее вторая производная терпит разрыв, на этот раз бесконечный.

Будем далее также интересоваться асимптотическим поведением при $u \uparrow (c/r)$ функции

$$A(u) = u\alpha_V^*(u) = -(\mu - r)v(u)/(\sigma^2 v'(u)). \tag{2.24}$$

Учитывая формулы (2.12), получаем

$$A(u) = [(\mu - r)/(\beta\sigma^2)](c/r - u)(1 + o(1)), \quad u \uparrow (c/r). \tag{2.25}$$

2.2. Случай экспоненциального распределения размера премий

Рассмотрим случай экспоненциального распределения размера премий, т.е. при $F(z)$ вида (1.3). Тогда

$$H(z) = 1 - F(z) = \exp(-kz), \quad k = 1/m > 0. \tag{2.26}$$

Полагая $w(u) = v(u)\exp(-ku)$, получаем

$$v(u) = w(u)\exp(ku), \quad v'(u) = \exp(ku)[w'(u) + kw(u)]. \tag{2.27}$$

Подставляя формулы (2.27) в ИДУ (2.9), получаем

$$(ru - c)w(u) + \lambda\int_u^{c/r} w(y)dy = \frac{(\mu - r)^2 w^2(u)}{2\sigma^2[w'(u) + kw(u)]}, \quad u \in (0, c/r). \tag{2.28}$$

Получим теперь из (2.28) уравнение для функции $A(u)$. Учитывая (2.24) и соотношения (2.27), получаем

$$A(u) = -\frac{(\mu - r)w(u)}{\sigma^2[w'(u) + kw(u)]}. \tag{2.29}$$

Тогда ИДУ (2.28) преобразуется к виду

$$(ru - c)w(u) + \lambda\int_u^{c/r} w(y)dy = -[(\mu - r)/2]A(u)w(u), \quad u \in (0, c/r). \tag{2.30}$$

Продифференцируем это соотношение по u:

$$rw(u) + (ru - c)w'(u) - \lambda w(u) = -[(\mu - r)/2][A'(u)w(u) + A(u)w'(u)]. \tag{2.31}$$

Разделив обе части соотношения (2.31) на $w(u)$ и учитывая, что

$$w'(u)/w(u) = -[(\mu - r)/(\sigma^2 A(u)) + k],$$

получаем нелинейное ОДУ для $A(u)$:

$$-(r - \lambda) + (ru - c)\left[\frac{\mu - r}{\sigma^2 A(u)} + k\right] = \frac{\mu - r}{2}\left[A'(u) - kA(u) - \frac{\mu - r}{\sigma^2}\right], \tag{2.32}$$

или, что то же, в виде:

$$A'(u)A(u) = \frac{A^2(u)}{m} + \left[\frac{2(ru - c)}{(\mu - r)m} - \frac{2(r - \lambda)}{\mu - r} + \frac{\mu - r}{\sigma^2}\right]A(u) + \frac{2(ru - c)}{\sigma^2}. \tag{2.33}$$

В результате будем изучать поведение решений ОДУ (2.33) на интервале $[0, c/r]$ с учетом представления (2.25), где β определено в (2.14). В частности, интерес представляют значения $A(+0)$ и поведение $\alpha_V^*(u)$ вблизи нуля, где $\alpha_V^*(u) = A(u)/u$. Кроме того, для поиска функции $V(u)$ может быть сформулирована следующая

Задача 1. Зная $A(u), u \in [0, c/r]$ ($A(u) = 0, u \ge c/r$), найти функцию $V(u)$ такую, что выполнены уравнение

$$A(u) = -(\mu - r)V'(u)/(\sigma^2 V''(u)), \quad u \in (0, c/r), \tag{2.34}$$

и условия (1.14).

Функция $V(u)$, являющаяся решением задачи 1, как будет показано далее с помощью проверочной теоремы, определяет функцию Беллмана в задаче минимизации ВНР в рассматриваемой модели, при этом соответствующая оптимальная стратегия имеет вид

$$\alpha_V^*(u) = A(u)/u, \quad u > 0, \tag{2.35}$$

а функция $A(u)$ определяет оптимальное количество денежных средств, инвестируемых в рисковый актив при текущем значении резерва u для всех $u > 0$.

2.2.1. Алгоритм численного нахождения решений. Обозначим $\tilde{v}(u) = v(u)/\gamma$, $\tilde{V}(u) = V(u)/\gamma$, $B(u) = A^2(u)$. Тогда, в частности, получим из (2.12), (2.25):

$$\tilde{v}(u) = (c/r - u)^{\beta}(1 + o(1)), \quad u \uparrow (c/r), \tag{2.36}$$

$$B(u) = [(\mu - r)^2/(\beta^2\sigma^4)](c/r - u)^2(1 + o(1)), \quad u \uparrow (c/r), \tag{2.37}$$

где $\beta > 0$ определено в (2.14).

На интервале $[0, c/r]$ из соотношений (2.24), (2.33) и равенства $V'(u) = v(u)$ получаем систему из трех нелинейных ОДУ первого порядка для функций $\tilde{v}(u)$, $\tilde{V}(u)$ и $B(u)$:

$$\tilde{v}'(u)\sqrt{B(u)} = -(\mu - r)\tilde{v}(u)/\sigma^2, \tag{2.38}$$

$$B'(u) = \frac{2B(u)}{m} + 4\left[\frac{ru - c}{(\mu - r)m} - \frac{r - \lambda}{\mu - r} + \frac{\mu - r}{2\sigma^2}\right]\sqrt{B(u)} + \frac{4(ru - c)}{\sigma^2}, \tag{2.39}$$

$$\begin{gathered} \tilde{V}'(u) = \tilde{v}(u), \\ u \in (0, c/r); \end{gathered} \tag{2.40}$$

при этом, очевидно, должны выполняться условия

$$\tilde{v}(c/r) = 0, \quad B(c/r) = 0, \tag{2.41}$$

$$\tilde{V}(0) = 0, \tag{2.42}$$

$$\tilde{V}(c/r) = 1/\gamma, \tag{2.43}$$

где параметр γ пока неизвестен и будет определен в результате расчетов. Для численного нахождения решений систему ОДУ (2.38)–(2.40) будем рассматривать на интервале $[0, \hat{u}]$, где $0 < \hat{u} < c/r$, $c/r - \hat{u}$ мало (по причине вхождения в ОДУ (2.38) и (2.39) величины $\sqrt{B(u)}$, которая вблизи значения $u = c/r$ будет вычисляться неустойчиво). При этом вместо условий (2.41), используя представления (2.36), (2.37), получаем приближенные условия в точке $\hat{u}$:

$$\tilde{v}(\hat{u}) \approx (c/r - \hat{u})^{\beta}, \quad B(\hat{u}) \approx [(\mu - r)^2/(\beta^2\sigma^4)](c/r - \hat{u})^2. \tag{2.44}$$

Вычислительный алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Прежде всего находим функцию $A(u)$, учитывая ее связь с $B(u)$ и решая справа налево для системы из двух нелинейных ОДУ (2.38), (2.39) задачу Коши (ЗК) от точки $u = \hat{u}$ до точки $u = 0$ с начальными условиями (2.44). Получаем, в частности, значения

$$\tilde{v}(0) = \tilde{v}_0, \quad B(0) = B_0. \tag{2.45}$$

Решение задачи 1 дают следующие 2 шага.

Шаг 2. Для системы из трех ОДУ (2.38)–(2.40) решаем слева направо ЗК от точки $u = 0$ до точки $u = \hat{u}$ с начальными условиями (2.45), (2.42).

Шаг 3. Приближенно продолжаем решение $\tilde{V}(u)$ из точки $u = \hat{u}$ в точку $u = c/r$, применив представление (2.36) с учетом того, что $\tilde{V}(u)$ является первообразной $\tilde{v}(u)$. Тем самым определим значение γ, исходя из условия (2.43). Тогда искомое решение $V(u)$, которое в силу (1.14) должно быть равно единице в точке c/r, определяется равенством

$$V(u) = \tilde{V}(u)/\tilde{V}(c/r), \quad u \in [0, c/r]. \tag{2.46}$$

2.2.2. Утверждение о существовании решения краевой задачи. Напомним, что в общем случае при $u \uparrow (c/r)$ получили для производных $V(u)$ соотношения (см. (2.12)):

$$V'(u) = \gamma(c/r - u)^{\beta}(1 + o(1)), \quad V''(u) = -\gamma\beta(c/r - u)^{\beta-1}(1 + o(1)), \quad \beta, \gamma > 0, \tag{2.47}$$

где β – положительный корень уравнения (2.13), определенный формулой (2.14), а γ – некоторая положительная постоянная, которая в случае экспоненциального распределения размера премий (т.е. при $F(z)$ вида (1.3)) может быть приближенно вычислена в соответствии с шагом 3 описанного выше алгоритма.

Далее заметим, что ИДУ (2.4) при $F(z)$ вида (1.3) приобретает вид

$$(ru - c)V'(u) - \lambda V(u) + \frac{\lambda}{m}\int_0^{\infty} V(u + z)\exp(-z/m)dz = \frac{(\mu - r)^2(V'(u))^2}{2\sigma^2 V''(u)}, \quad u \in (0, c/r), \tag{2.48}$$

а из результатов п. 2.2.1 и подразд. 2.1 следует

Теорема 1. *В случае $r > 0$ справедливы следующие утверждения: существует единственное непрерывно дифференцируемое на* $(0, \infty)$ *решение $V(u)$ сингулярной нелинейной КЗ* (2.48), (1.14) *для ИДУ, удовлетворяющее условиям* (2.2), *это решение однозначно определяется по алгоритму п.* 2.2.1 *и обладает следующими свойствами*: а) *при выполнении неравенства $\lambda \ge 2r$ или неравенств $\lambda < 2r$ и* $(\mu - r)^2/(r\sigma^2) > 2 - \lambda/r$ *функция $V(u)$ дважды непрерывно дифференцируема*; б) *при выполнении условий $\lambda < 2r$ и* $(\mu - r)^2/(r\sigma^2) = 2 - \lambda/r$ *вторая производная $V''(u)$ непрерывна на* $(0, c/r)$ *и* $(c/r, \infty)$, *но терпит конечный разрыв в точке $u = c/r$, имея ненулевой* (*отрицательный*) *предел при $u \to c/r - 0$*; в) *при выполнении неравенств $\lambda < 2r$ и* $(\mu - r)^2/(r\sigma^2) < 2 - \lambda/r$ *вторая производная $V''(u)$ также непрерывна на* $(0, c/r)$ *и* $(c/r, \infty)$, *при этом она терпит бесконечный разрыв в точке $u = c/r$, уходя в отрицательную бесконечность при $u \to c/r - 0$.*

3. АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ $r = 0$

При $r = 0$ (когда, в частности, интервал $[0, c/r)$ переходит в интервал $[0, \infty)$) уравнение (2.1) принимает вид:

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2u^2V''(u) + (\alpha\mu u - c)V'(u) - \lambda V(u) + \lambda\int_0^{\infty} V(u + z)dF(z) \right\} = 0, \quad u > 0. \tag{3.1}$$

Найдем значение α^*, доставляющее экстремум в (3.1) в предположении

$$V'(u) > 0, \quad V''(u) < 0, \quad u \in (0, \infty) \tag{3.2}$$

(в противном случае супремум не достигается):

$$\alpha^* = \alpha_V^*(u) := -\frac{\mu V'(u)}{\sigma^2 u V''(u)}, \quad u \in (0, \infty). \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.1), получаем нелинейное ИДУ

$$-cV'(u) - \lambda V(u) + \lambda\int_0^{\infty} V(u + z)dF(z) = \frac{\mu^2(V'(u))^2}{2\sigma^2 V''(u)}, \quad u \in (0, \infty), \tag{3.4}$$

с условиями (1.15).

3.1. Случай экспоненциального распределения размера премий

В случае экспоненциального распределения размера премий, т.е. при $F(z)$ вида (1.3), нелинейное ИДУ для $V(u)$ приобретает вид

$$-cV'(u) - \lambda V(u) + \frac{\lambda}{m}\int_0^\infty V(u+z)\exp(-z/m)dz = \frac{\mu^2(V'(u))^2}{2\sigma^2 V''(u)}, \quad u \in (0,\infty). \tag{3.5}$$

Получим уравнение для функции

$$A(u) = u\alpha_V^*(u) = -\mu V'(u)/(\sigma^2 V''(u)) \tag{3.6}$$

(аналогично тому, как это было сделано в случае $r > 0$). Это уравнение имеет вид

$$A'(u)A(u) = \frac{A^2(u)}{m} + \left(\frac{2\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{2c}{\mu m}\right)A(u) - \frac{2c}{\sigma^2}, \quad u \in (0,\infty). \tag{3.7}$$

Заметим, что ОДУ (3.7) имеет частное решение $A(u) = A_{par}(u) \equiv a_0$, где a_0 — положительный корень квадратного уравнения

$$\frac{a_0^2}{m} + \left(\frac{2\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{2c}{\mu m}\right)a_0 - \frac{2c}{\sigma^2} = 0 \tag{3.8}$$

(второй корень этого уравнения отрицательный).

Найдем функцию $V(u)$, соответствующую решению $A(u) = A_{par}(u) \equiv a_0$.

Из соотношения (3.6) имеем

$$(\ln V'(u))' = -\mu/(\sigma^2 A(u)), \quad u > 0. \tag{3.9}$$

Отсюда при постоянной $A(u) \equiv a_0$ и с учетом условий (1.15) получаем для функции Беллмана аналитическое решение:

$$V(u) = 1 - \exp(-\mu u/(\sigma^2 a_0)), \quad u \ge 0, \tag{3.10}$$

где

$$a_0 = -\left(\frac{2m\lambda}{\mu} + \frac{\mu m}{\sigma^2} - \frac{2c}{\mu}\right)/2 + \sqrt{\left(\frac{2m\lambda}{\mu} + \frac{\mu m}{\sigma^2} - \frac{2c}{\mu}\right)^2/4 + \frac{2cm}{\sigma^2}}. \tag{3.11}$$

Проверим, что функция (3.10) удовлетворяет также нелинейному ИДУ (3.5). Сначала вычислим интегральное слагаемое в (3.5):

$$\begin{gathered}\int_0^\infty V(u+z)\exp(-z/m)/m dz = \int_0^\infty (1 - \exp(-\mu(u+z)/(\sigma^2 a_0)))\exp(-z/m)/m dz = \\ = 1 - \exp(-\mu u/(\sigma^2 a_0))/(\mu m/(\sigma^2 a_0) + 1).\end{gathered} \tag{3.12}$$

При подстановке этого выражения и формул для $V(u)$, $V'(u)$, $V''(u)$ в ИДУ (3.5), получаем соотношение

$$-\frac{c\mu}{\sigma^2 a_0} - \frac{\lambda}{(\mu m/(\sigma^2 a_0) + 1)} + \lambda + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = 0, \tag{3.13}$$

которое легко преобразуется к уравнению (3.8) для a_0, т.е. ИДУ (3.5) удовлетворяется.

Таким образом, нами найдено подходящее решение сингулярной нелинейной КЗ (3.5), (1.15) для ИДУ. С использованием проверочных аргументов далее будет показано, что это решение определяет функцию Беллмана в задаче минимизации ВНР в рассматриваемой модели. При этом соответствующая оптимальная стратегия имеет вид

$$\alpha_V^*(u) = a_0/u, \quad u > 0, \tag{3.14}$$

где a_0 — положительный корень уравнения (3.8) (т.е. определяется формулой (3.11)), задающий оптимальное постоянное (не зависящее от размера резерва) количество денежных средств, инвестируемых в рисковый актив.

3.1.1. Сравнение с моделью без инвестиций. Сравним полученное выше решение $V(u)$ (3.10) с ВНР $\varphi(u)$ в модели без инвестиций [2]:

$$\varphi(u) = 1 - \exp(-(\lambda m - c)u/(cm)), \quad u \geq 0, \tag{3.15}$$

где $\lambda m > c$.

Надо показать, что $(\lambda m - c)/(cm) < \mu/(\sigma^2 a_0)$. Предположим противное, т.е. что $(\lambda m - c)/(cm) \geq \mu/(\sigma^2 a_0)$. Тогда из уравнения (3.8) имеем

$$\frac{a_0^2}{m} + \left(\frac{2(\lambda m - c)}{\mu m} + \frac{\mu}{\sigma^2}\right)a_0 - \frac{2c}{\sigma^2} \geq \frac{a_0^2}{m} + \left(\frac{2c}{\sigma^2 a_0} + \frac{\mu}{\sigma^2}\right)a_0 - \frac{2c}{\sigma^2} = \frac{a_0^2}{m} + \frac{\mu}{\sigma^2}a_0, \tag{3.16}$$

откуда получаем неравенство $a_0^2/m + (\mu/\sigma^2)a_0 \leq 0$, т.е. приходим к противоречию.

Для полноты изложения рассмотрим далее вопрос о поведении других решений ОДУ (3.7).

3.1.2. Случай неограниченно возрастающих решений, когда $A(0) > a_0 > 0$**.** Заметим, что при $A(u) > a_0 > 0$, $u \geq 0$, правая часть ОДУ (3.7) положительна, откуда следует, что $A'(u) > 0$, $u \geq 0$. Тогда траектории решений ЗК для ОДУ (3.7) с условием $A(0) > a_0 > 0$ являются строго возрастающими и неограниченными, так как не могут иметь пределом число, большее a_0. Отсюда, в частности, получаем, что $A(u_0) > A(0)$ $\forall u_0 > 0$.

Остановимся на поведении таких решений подробнее. Рассмотрим вспомогательную ЗК для вспомогательного линейного ОДУ:

$$\tilde{A}'(u) = \frac{\tilde{A}(u)}{m} + \left(\frac{2\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{2c}{\mu m}\right) - \frac{2c}{\sigma^2 A(u_0)}, \quad u \geq u_0 > 0, \quad \tilde{A}(u_0) = A(u_0). \tag{3.17}$$

Введем функцию $b(u) = A(u) - \tilde{A}(u)$, $u \geq u_0$, где $b(u_0) = 0$. Тогда $b(u)$ есть решение ЗК:

$$b'(u) = \frac{b(u)}{m} - \frac{2c}{\sigma^2 A(u)} + \frac{2c}{\sigma^2 A(u_0)}, \quad u \geq u_0, \quad b(u_0) = 0. \tag{3.18}$$

Здесь $-2c/(\sigma^2 A(u)) + 2c/(\sigma^2 A(u_0)) \geq 0$ при $u \geq u_0$, так как $A(u) \geq A(u_0)$ при $u \geq u_0$. Тогда $b(u) \geq 0$ и $A(u) - \tilde{A}(u) \geq 0$ при $u \geq u_0$.

Решение линейной ЗК (3.17) для $\tilde{A}(u)$ имеет вид:

$$\begin{gathered}\tilde{A}(u) = A(u_0)\exp((u - u_0)/m)) + C_0(u_0)\int_{u_0}^{u}\exp((u - s)/m)ds = \\ = A(u_0)\exp((u - u_0)/m)) + C_0(u_0)m[\exp((u - u_0)/m)) - 1], \quad u \geq u_0,\end{gathered} \tag{3.19}$$

где $C_0(u_0) = 2\lambda/\mu + \mu/\sigma^2 - 2c/(\mu m) - 2c/(\sigma^2 A(u_0))$.

Заметим, что можно выбрать такое $u_0 > 0$ (быть может, достаточно большое), для которого при любом знаке $C_0(u_0)$ будет $D(u_0) = A(u_0) + mC_0(u_0) > 0$. Тогда существует постоянная $\tilde{D}(u_0) > 0$ такая, что справедливо неравенство

$$\tilde{A}(u) \geq \tilde{D}(u_0)\exp((u - u_0)/m)), \quad u \geq u_0 > 0. \tag{3.20}$$

В самом деле: при $C_0(u_0) \geq 0$ достаточно положить $\tilde{D}(u_0) = A(u_0)$, а при $C_0(u_0) < 0$ будет $\tilde{D}(u_0) = D(u_0)$, т.е. $\tilde{D}(u_0) = \min(A(u_0), D(u_0))$.

Тогда справедливо аналогичное неравенство и для $A(u)$, т.е.

$$A(u) \geq \tilde{D}(u_0)\exp((u - u_0)/m)), \quad u \geq u_0 > 0, \tag{3.21}$$

а из соотношения (3.6) получаем

$$V'(u) \geq K\exp\left(-\widehat{D}(u_0)\int\limits_{u_0}^{u}\exp(-(s-u_0)/m))ds\right) = \\ = K\exp(\widehat{D}(u_0)m(\exp(-(u-u_0)/m)-1)) \geq K_0 > 0, \quad u \geq u_0 > 0, \tag{3.22}$$

откуда следует неравенство

$$V(u) \geq K_0 u + K_1, \quad u \geq u_0 > 0, \tag{3.23}$$

т.е. $V(u)$ неограничена при $u \to \infty$.

3.1.3. Случай решений, не существующих глобально, когда $0 < A(0) < a_0$. Рассмотрим теперь решение ОДУ (3.7) при $0 < A(0) < a_0$, когда правая часть ОДУ (3.7) отрицательна, откуда следует, что $A'(0) < 0$. Тогда траектории решений ЗК для ОДУ (3.7) при $0 < A(0) < a_0$ строго убывают с ростом u. При приближении $A(u)$ к нулю сверху при $u \to u^{(0)} - 0$ при некотором $u^{(0)} > 0$ будет $A'(u) \to -\infty$, и решение не существует глобально.

Из результатов подразд. 3.1 следует

Теорема 2. *В случае* $r = 0$ *справедливы следующие утверждения: существует единственное решение* $V(u)$ *сингулярной нелинейной КЗ* (3.5), (1.15) *для ИДУ, оно однозначно определяется аналитической формулой* (3.10), *где* $a_0 > 0$ *определено в* (3.11).

4. ПРОВЕРОЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕМИЙ

Приведем сначала утверждения, устанавливающие связь решений КЗ (2.4), (1.14) и (2.4), (1.15) с ВНР, отвечающей оптимальному управлению в оптимизационной задаче (1.12) для случаев $r > 0$ и $r = 0$ соответственно (так называемые проверочные теоремы).

Теорема 3. *Пусть* $r > 0$ *и существует неубывающее решение* $V(u)$ *КЗ* (2.4), (1.14), *дважды непрерывно дифференцируемое на* $(0,\infty)$ *за исключением, быть может, точки* $u = c/r$. *Тогда оно определяет ВНР, соответствующую оптимальному управлению в задаче* (1.12), *т.е.* $V(u) = \varphi^*(u)$ *для любого* $u \geq 0$. *При этом оптимальное управление имеет вид* $\pi^* = \{\alpha^*(t)\}_{t\geq 0}$, *где* $\alpha^*(t) = \alpha_V^*(X_{t-}^{\pi^*})$, $X_t^{\pi^*}$ *– размер резерва в момент времени* t *при управлении* π^*, *а функция* $\alpha_V^*(u)$ *определена в* (2.3) *при* $u \in (0, c/r)$ *и* $\alpha_V^*(u) = 0$ *при* $u \geq c/r$.

Теорема 4. *Пусть* $r = 0$ *и существует неубывающее дважды непрерывно дифференцируемое решение* $V(u)$ *КЗ* (2.4), (1.15). *Тогда оно определяет ВНР, соответствующую оптимальному управлению в задаче* (1.12), *т.е.* $V(u) = \varphi^*(u)$ *для любого* $u \geq 0$. *При этом оптимальное управление имеет вид* $\pi^* = \{\alpha^*(t)\}_{t\geq 0}$, *где* $\alpha^*(t) = \alpha_V^*(X_{t-}^{\pi^*})$, $X_t^{\pi^*}$ *– размер резерва в момент времени* t *при управлении* π^*, *а функция* $\alpha_V^*(u)$ *определена в* (3.3).

Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны доказательству проверочного утверждения в [9] и здесь не приводятся. При этом необходимо отметить, что дополнительная трудность в доказательстве теоремы 3, связанная с применением формулы Ито при отсутствии в общем случае непрерывности второй производной функции $V(u)$ в точке $u = c/r$, преодолевается с помощью аппроксимации $V(u)$ дважды непрерывно дифференцируемыми функциями в малой окрестности данной точки с последующим устремлением радиуса этой окрестности к нулю. Применение такой аппроксимации при использовании проверочных аргументов для обоснования вида ВНР как решения КЗ для ИДУ при инвестировании резерва в безрисковый актив в данной модели демонстрируется в [11].

В случае экспоненциального распределения размеров премий справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть* $F(z)$ *имеет вид* (1.3) *и* $r > 0$. *Тогда функция* $V(u)$, *определенная в теореме* 1, *задает ВНР, соответствующую оптимальному управлению в задаче* (1.12), *т.е.* $V(u) = \varphi^*(u)$ *для любого* $u \geq 0$. *При этом оптимальное управление имеет вид* $\pi^* = \{\alpha^*(t)\}_{t\geq 0}$, *где* $\alpha^*(t) = A(X_{t-}^{\pi^*})/X_{t-}^{\pi^*}$,

$X_t^{\pi^*}$ — *размер резерва в момент времени t при управлении* π^*, *а функция* $A(u)$ *при* $u \in (0, c/r)$ *является решением начальной задачи для ОДУ* (2.33) *с условием* $\lim_{u\to c/r-0} A(u) = 0$ (см. (2.25)) *и* $A(u) = 0$ *при* $u \geq c/r$.

Утверждение теоремы 5 непосредственно следует из теорем 1 и 3 с учетом соотношения (2.24) и того факта, что функция $A(u)$ имеет асимптотическое представление (2.25), а в случае экспоненциального распределения размеров премий удовлетворяет также ОДУ (2.33).

Теорема 6. *Пусть* $F(z)$ *имеет вид* (1.3) *и* $r = 0$. *Тогда функция* $V(u)$, *определенная в теореме* 2, *т.е., функция вида* (3.10), *где* $a_0 > 0$ *определено в* (3.11), *задает ВНР, соответствующую оптимальному управлению в задаче* (1.12), *т.е.* $V(u) = \varphi^*(u)$ *для любого* $u \geq 0$. *При этом оптимальное управление имеет вид* $\pi^* = \{\alpha^*(t)\}_{t\geq 0}$, *где* $\alpha^*(t) = a_0/X_{t-}^{\pi^*}$, $X_t^{\pi^*}$ — *размер резерва в момент времени t при управлении* π^*.

Утверждение теоремы 6 является очевидным следствием теорем 2 и 4 с учетом соотношения (3.6) и того факта, что в случае экспоненциального распределения размера премий функция $A(u) \equiv a_0$ является решением уравнения (3.7), соответствующим определенной в теореме 2 функции $V(u)$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВНР КАК ФУНКЦИИ НК

По аналогии с [1] и [2], приведем замечание о размерности параметров модели и способе их “обезразмеривания” для последующих вычислений.

Замечание 2. В ИДУ (2.48) (и в ИДУ (3.5)) параметр m — безразмерный (при безразмерных переменных u и V), а каждый из параметров σ^2, μ, r, c и λ имеет размерность $1/[t]$, где $[t]$ — размерность времени. Чтобы перейти к безразмерным величинам, достаточно разделить ИДУ (2.48) (и ИДУ (3.5)) на какую-либо характерную положительную постоянную той же размерности: такое деление приводит задачи (2.48), (1.14) и (3.5), (1.15) к задачам того же вида с новыми параметрами $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{c}$ и $\tilde{\lambda}$, $\tilde{r}$. В частности, удобно в (2.48) и в (3.5) в качестве параметра “обезразмеривания” выбрать λ: если положить $\lambda = 1$, то остальные параметры будут измеряться в долях λ и при необходимости их можно пересчитать в размерном виде простым умножением на величину $\lambda > 0$. В результате, оставляя λ в формулах, как это принято в литературе, полагаем всюду в расчетах $\lambda = 1$.

Для всех примеров расчетов зафиксированы значения $\lambda = 1$, $m = 2$.

Расчеты оптимальной ВНР как функции НК при $r > 0$ осуществлялись по алгоритму п. 2.2.1 данной работы, а при $r = 0$ — по аналитической формуле (3.10), где a_0 определено в (3.11).

Расчеты ВНР как функции НК для простых стратегий инвестиций (с изменением доли α рискового актива в портфеле) осуществлялись при $0 < \alpha \leq 1$ по алгоритму [1, с. 1991], а при $\alpha = 0$ — по алгоритму [2, с. 1688] (см. там теорему 5).

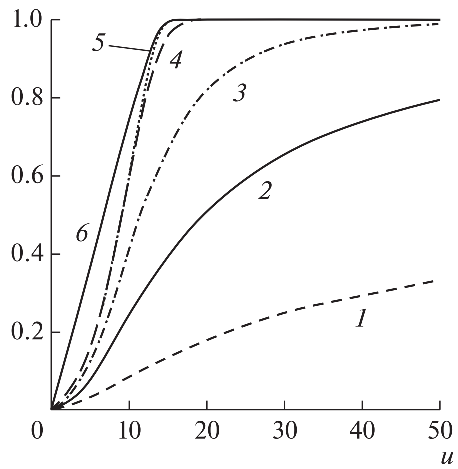
5.1. Случай $r > 0$

Данные к графикам на фиг. 1: $c = 4$; параметры составляющих портфеля: $\mu = 0.25$, $r = 0.24$ ($c/r \approx 16.7$), $\sigma^2 = 0.855$; оптимальной стратегии отвечает график *6*; графикам *1–5* отвечают значения $\alpha = \{2/3; 0.5; 1/3; 0.1; 0\}$ соответственно.

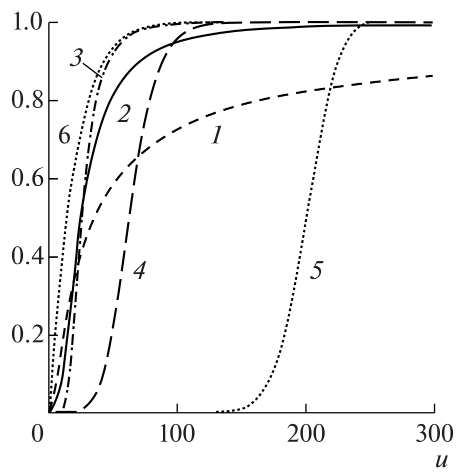
Данные к графикам на фиг. 2: $c = 4$; параметры составляющих портфеля: $\mu = 0.25$, $r = 0.01$ ($c/r = 400$), $\sigma^2 = 0.3$; оптимальной стратегии отвечает график *6*; графикам *1–5* отвечают значения $\alpha = \{1; 0.5; 1/3; 0.1; 0\}$ соответственно.

5.2. Случай $r = 0$

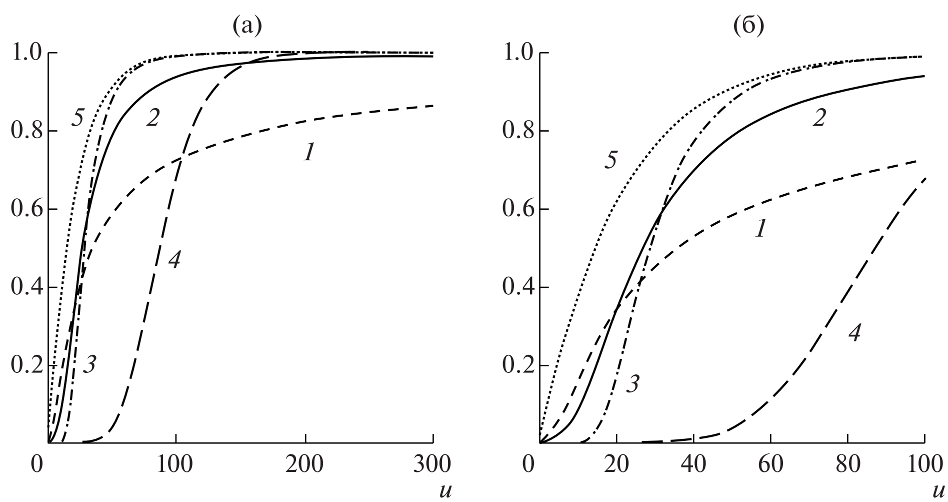
Данные к графикам на фиг. 3а (графики на фиг. 3б те же в другом масштабе): $c = 4$; параметры составляющих портфеля: $\mu = 0.25$, $\sigma^2 = 0.3$; оптимальной стратегии отвечает график *5*; графикам *1–4* отвечают значения $\alpha = \{1; 0.5; 1/3; 0.1\}$ соответственно. Заметим, что значение $\alpha = 0$, соответствующее в случае $r = 0$ отсутствию каких-либо инвестиций (как рисковых, так и безрис-



Фиг. 1. Сравнение оптимальной ВНР с ВНР при простых стратегиях инвестиций с различными долями рискового актива в портфеле, $(\mu - r)/\sigma \approx 0.011$.



Фиг. 2. Сравнение оптимальной ВНР с ВНР при простых стратегиях инвестиций с различными долями рискового актива в портфеле, $(\mu - r)/\sigma \approx 0.438$.



Фиг. 3. Сравнение оптимальной ВНР с ВНР при простых стратегиях инвестиций с различными долями рискового актива в портфеле, $r = 0$, $\mu/\sigma \approx 0.456$.

ковых), приводит здесь к тождественно нулевой функции ВНР (в силу отрицательности нагрузки безопасности в исходном процессе риска, см. [2]).

Во всех представленных примерах видно, что функция ВНР, соответствующая оптимальному управлению, мажорирует функции ВНР, соответствующие постоянным долям рискового актива в инвестиционном портфеле. В описании фиг. 1–3 для сведения приведены значения отношения Шарпа

$$Sh = \frac{\mu - r}{\sigma}, \tag{5.1}$$

соответствующие выбранным в данных примерах параметрам рискового и безрискового активов (об отношении Шарпа см., например, [12, гл. 2]). На фиг. 1 представлен случай с малым значением отношения Шарпа (ожидаемая доходность акций при большой волатильности не на много больше доходности безрискового актива), и при данном наборе выбранных долей акций α в портфеле с постоянной структурой наблюдается (видимая в данном масштабе) монотонность – возрастание ВНР с убыванием α. На самом деле в общем случае это не так. Действительно, нетрудно показать, что функция $A(u)$, определяющая оптимальное количество денежных средств, инвестируемых в акции, при экспоненциальном распределении размеров премий является ограниченной (как решение начальной задачи для уравнения (2.33) на $(0, c/r)$ с условием $A(c/r) = 0$, а при $r = 0$ – постоянной функцией $A \equiv a_0$); следовательно, при достаточно малых значениях резерва оптимальное управление дает значения доли рискового актива, превышающее единицу (что предполагает заимствование денежных средств для инвестирования их в рисковый актив), и даже стремящееся к бесконечности значение этой доли при стремлении резерва к нулю (см. соотношения (2.35), (3.14) для оптимальной стратегии). Таким образом, глобальная монотонность ВНР по α не может ожидаться, и это наглядно видно на фиг. 2 и 3: ВНР, соответствующая полному вложению резерва в рисковый актив, при малых значениях этого резерва мажорирует функции ВНР, соответствующие любой другой постоянной структуре портфеля.

Численные примеры и приведенные выше рассуждения показывают, что вычисление функций ВНР, соответствующих постоянной структуре портфеля, наряду с оптимальной ВНР, позволяют для любого заданного значения начального резерва, ограничившись простыми стратегиями, выбрать ту из них, которая дает значение ВНР, имеющее приемлемую близость к ее оптимальному значению: при разных значениях начального резерва это будут разные стратегии.

Дополнительно приведем следующее

Замечание 3 (об асимптотическом сравнении оптимальной стратегии и стратегий с постоянной структурой инвестиционного портфеля по значениям ожидаемой доходности). Замена оптимальной инвестиционной стратегии некоторой стратегией с постоянной долей рискового актива, для которой при заданном значении начального капитала значение ВНР близко к оптимальному, дает также возможность получить бóльшую ожидаемую доходность в итоговом процессе риска. Действительно, применение оператора (1.7) к функции вида $f(u) = u$ (что соответствует рассмотрению на бесконечно малом интервале времени ожидаемого приращения самого капитала, равного u в начале интервала) приводит к выражению, которое при делении на u представляет собой мгновенную (т.е. в единицу времени) ожидаемую доходность при стратегии, равной α в точке u. Как нетрудно видеть, эта доходность равна

$$\mu_\alpha + (\lambda m - c)/u, \tag{5.2}$$

где $\mu_\alpha = \alpha(\mu - r) + r$, и представляет собой (мгновенную) ожидаемую доходность инвестиционного портфеля, а второе слагаемое в (5.2) – ожидаемая доходность (также в единицу времени) исходного страхового процесса риска. Очевидно тогда, что увеличение доли α рискового актива в портфеле при его постоянной структуре приводит к увеличению общей ожидаемой доходности (в изначально сформулированном предположении $\mu > r$). Однако в то же время при больших значениях u это будет приводить и к увеличению риска, выраженного в том, что ВНР с увеличением α будет уменьшаться, а если эта доля превосходит некоторое значение, зависящее от параметров модели, ВНР обратится в тождественный ноль. Данный вывод основан на асимптотическом представлении ВНР, полученном в [13] (см. также [1]): если $\rho_\alpha := 2\mu_\alpha/\sigma_\alpha^2 > 1$, где μ_α определено выше, $\sigma_\alpha = \alpha\sigma$, то $\varphi(u) = 1 - Ku^{1-\rho_\alpha}(1 + o(1))$, $u \to \infty$, где $0 < K$ – постоянная; при $\rho_\alpha \le 1$ имеем $\varphi \equiv 0$. Отсюда нетрудно видеть, что с ростом α асимптотические характеристики ВНР ухудшаются: ρ_α является убывающей функцией при положительных α, более того, при

$$\alpha \ge \alpha_0^+ := \frac{(\mu - r)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{(\mu - r)}{\sigma^2}\right]^2 + \frac{r}{\sigma^2}} \tag{5.3}$$

величина ρ_α приобретает значения, меньшие или равные единице, что приводит к неминуемому разорению в дальнейшем при сохранении той же стратегии.

При использовании оптимальной стратегии в случае $r > 0$ доля рискового актива равна нулю при значениях u, больших фиксированного числа c/r, и тогда ожидаемая доходность результирующего процесса будет минимальной и равной $r + (\lambda m - c)/u$ (см. (5.2)), но при этом разорения никогда не произойдет (при указанных значениях u). В случае $r = 0$ оптимальная доля стремится к нулю при $u \to \infty$, и тогда ожидаемая доходность стремится к нулю при неограниченном увеличении резерва, но ВНР будет максимально возможной. Однако, заменив оптимальную стратегию простой стратегией с постоянной структурой актива, можно обеспечить значение ожидаемой доходности, имеющее положительный предел, больший безрисковой доходности r, при $u \to \infty$, сохраняя при этом близость ВНР к оптимальному значению при заданном начальном резерве. Указанный предел ожидаемой доходности соответствует значению μ_α (см. (5.2)), которое может быть оценено сверху с помощью неравенства $\mu_\alpha < \mu_{\alpha_0^+} = \mathrm{Sh}^2 + \sqrt{\mathrm{Sh}^4 + \mathrm{Sh}^2 r} + r$, выполненного в ситуации выбора α, исключающего неминуемое разорение (здесь Sh – отношение Шарпа, определенное в (5.1), α_0^+ определено в (5.3)). Такое α может быть выбрано сколь угодно близким, но строго меньшим значения α_0^+.

Заметим также, что сравнение оптимальной и других стратегий одновременно по двум критериям – ВНР и ожидаемой доходности при любых значениях начального капитала – является более общей задачей, решение которой связано с дополнительными исследованиями и численными расчетами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже отмечалось в [1] и [2], где исследовался вопрос о влиянии простых рисковых стратегий инвестирования на ВНР в коллективной модели пенсионного страхования (или дуальной модели риска), для более точного ответа на вопрос о том, какую роль рисковые активы могут играть в увеличении ВНР, необходимо изучить задачу оптимального динамического управления портфелем активов (в предположении, что доля рискового актива может меняться со временем). Эта задача, связанная с исследованием сингулярных задач для нелинейных ИДУ, изучена в данной работе. В результате показано, что оптимальное управление порождается некоторой стратегией, т.е. функцией от текущего резерва; эта стратегия в общем случае зависит от решения уравнения Беллмана рассматриваемой оптимизационной задачи, являющегося указанным нелинейным ИДУ. В случае экспоненциального распределения премий доказано существование решения краевой задачи для соответствующего ИДУ и на основании проверочных теорем сделаны выводы о том, что это решение определяет оптимальную ВНР, т.е. ВНР, соответствующую оптимальному управлению. При этом оптимальная стратегия, порождающая оптимальное управление, наиболее простой вид имеет при нулевой процентной ставке ($r = 0$): она соответствует постоянному количеству денежных средств, инвестируемых в рисковый актив; это количество определяется положительным корнем квадратного уравнения с коэффициентами, зависящими от параметров модели. Соответствующая вероятность разорения (разность между единицей и ВНР) имеет явный вид и определяется экспоненциально убывающей функцией начального резерва (напомним, что из результатов [1] следует, что при постоянной доле инвестирования резерва в рисковый актив вероятность разорения асимптотически ведет себя как степенная функция). В случае $r > 0$ оптимальная стратегия соответствует полному вложению резерва в безрисковый актив при значениях резерва, не меньших величины c/r, в противном случае, т.е. при значениях резерва, меньших указанной константы, оптимальное количество денежных средств, инвестируемых в рисковый актив, является решением некоторой начальной задачи для нелинейного ОДУ с предельным нулевым значением в точке c/r. Соответствующая оптимальная ВНР, т.е. функция Беллмана оптимизационной задачи, равна единице при значениях резерва, не меньших c/r, а на интервале $[0, c/r]$ определяется решением КЗ для нелинейного ИДУ. При этом данная функция может терпеть разрыв второй производной в точке c/r, оставаясь при этом непрерывно дифференцируемой.

Проведены численные расчеты, демонстрирующие на графиках соответствующих ВНР преимущество оптимальной стратегии по сравнению с простыми стратегиями, состоящими во вложении постоянной доли резерва в рисковый актив. Расчеты позволяют также при заданном уровне начального резерва выбрать простую стратегию, дающую приемлемое значение ВНР в смысле его близости к оптимальному значению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Славко Б.В.* Платежеспособность страховой компании в дуальной модели риска с учетом инвестиций: анализ и численные исследования сингулярных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 174–198.
2. *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Славко Б.В.* Безрисковые инвестиции и их сравнение с простыми рисковыми стратегиями в модели пенсионного страхования: решение сингулярных задач для интегродифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1676–1696.
3. *Grandell J.* Aspects of Risk Theory. New York: Springer, 1991. 175 p.
4. *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin Probabilities. Advanced series on statistical science and applied probability. V. 14. Singapore: World Scientific, 2010. 602 p.
5. *Browne S.* Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimyzing the probability of ruin // Mathemtics Operations Research. 1995. V. 20. № 4. P. 937–958.
6. *Hipp C., Plum M.* Optimal investment for insurers // Insurance Math. Econom. 2000. V. 27. № 2. P. 215–228.
7. *Hipp C., Plum M.* Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers // Finance Stochast. 2003. V. 7. № 3. P. 299–321.
8. *Azcue P., Muler M.* Optimal investment strategy to minimize the ruin probability of an insurance company under borrowing constraints // Insurance Math. Econom. 2009. V. 44. № 1. P. 26–34.
9. *Belkina T., Hipp C., Luo S., Taksar M.* Optimal constrained investment in the Cramer–Lundberg model // Scandinavian Actuarial Journal. 2014. Issue 5. P. 383–404.
10. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: МИР, 1978. 318 с.
11. *Belkina T.A., Konyukhova N.B.* On sufficient conditions for survival probability in the life annuity insurance model with risk-free investment income// In: “IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018. Moscow, October 22-27, 2018). Proceedings. In two volumes/ Editor-in-chief F. Ereshko.” Moscow: MAKS Press, 2018. V. 1. P. 213–218.
12. *Шоломицкий А.Г.* Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005. 400 с.
13. *Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous: the case of negative risk sums // Finance Stochast. 2016. V. 20. № 2. P. 355–379.