ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 9, с. 1522–1531

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.588

МЕТОД КОНТИНУАЛЬНЫХ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ КУЛОНА И ФУНКЦИЕЙ АППЕЛЯ F_1

И. А. Шилин[1,2,*], Дж. Чой[3]

[1] 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ Московский энергетический институт, Россия

[2] 119991 Москва, ул. Малая Пироговская, 1, Московский педагогический государственный университет, Россия

[3] Department of Mathematics, Dongguk University, Gyeongju, Republic of Korea

*e-mail: ilyashilin@li.ru

Поступила в редакцию 15.06.2021 г.
Переработанный вариант 13.02.2022 г.
Принята к публикации 11.05.2022 г.

Рассматривается введенная авторами функция A, зависящая от одного комплексного, двух действительных переменных и еще одного аргумента, задающего тривиальную или собственную подгруппу трехмерной собственной лоренцевой группы и, таким образом, являющегося действительным числом или парой действительных чисел. Первые три аргумента при этом определяют пространства представления и базисные функции в этих пространствах. Показано, что ее частные значения можно выразить через волновые кулоновские функции или гипергеометрическую функцию Аппеля F_1. Полученная формула преобразования функции A используется для вывода континуальной теоремы сложения для этой функции и вычисления значения одномерного интегрального преобразования типа Фурье–Меллина произведения двух кулоновских функций – его результат выражается через функцию F_1. Библ. 31.

Ключевые слова: волновые кулоновские функции, функция Аппеля F_1, трехмерная собственная лоренцева группа, представление группы, ядро интегрального оператора, интегральное преобразование типа Фурье–Меллина.

DOI: 10.31857/S004446692209006X

1. ВВЕДЕНИЕ

Вычисление матричных элементов неприводимых представлений групп и алгебр Ли (инфинитезимальных операторов) является важной задачей в прикладной теории представлений групп [1]. Помимо применений результатов этой задачи в физике элементарных частиц, атомной физике и квантовой теории поля, важность этой задачи усиливается приложениями полученных результатов в теории специальных функций, возникающих в математической физике.

В настоящей работе рассматривается функция A, зависящая от одного комплексного и двух вещественных аргументов, описывающих соответственно пространства представления трехмерной группы Лоренца G и базисы в этих пространствах, а также еще одного аргумента, являющегося элементом тривиальной или собственной подгруппы в G и, таким образом, зависящей от одного или двух вещественных параметров. В частных случаях значения этой функции удается выразить через хорошо известные гипергеометрические функции: волновые кулоновские функции или функцию Аппеля F_1, зависящую от двух переменных. С другой стороны, через функцию A удается выразить ядра интегральных операторов представления в обычном смысле или в смысле "смешанного" [2] базиса. Таким образом, функции Кулона и Аппеля приобретают теоретико-групповую трактовку. При этом связь между ядрами приводит к интегральным формулам для указанных специальных функций.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ A

Пусть σ – фиксированное комплексное число и G – собственная трехмерная лоренцева группа, т.е.

$$G = \{g \in SL(3,\mathbb{R}) \,|\, g^{-1}\mathrm{diag}(1,-1,-1) = \mathrm{diag}(1,-1,-1)g^{\mathrm{T}}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ линейное пространство, состоящее из функций, которые заданы на конусе $C: x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,\ x_1 > 0$, бесконечно дифференцируемы на области определения и при любых $x \in C$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ удовлетворяют равенству $f(\alpha x) = |\alpha|^{\sigma} f(x)$. Система функций

$$B_1 = \{f_{p_1}(x) = (x_1 + x_2)^{\sigma} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1 x_3/(x_1+x_2)} \,|\, p_1 \in \mathbb{R}\} \tag{2.1}$$

является базисом пространства $\mathcal{D}$. Используя обобщенные функции [3]

$$(s)_{\pm}^{\lambda} = \begin{cases} |s|^{\lambda} & \text{при} \quad \pm s > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \mp s \geqslant 0, \end{cases}$$

другой базис в $\mathcal{D}$ можно описать формулой

$$B_2 = \{f_{p_2^{\pm}}(x) = (x_2)_{\pm}^{\sigma - \mathrm{i}p_2}(x_1 + x_3)^{\mathrm{i}p_2} \,|\, p_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{2.2}$$

Каждый из базисов B_1 и B_2 состоит из собственных функций инфинитезимального оператора (оператора Казимира) для соответствующей однопараметрической подгруппы в G, а их построение подробно описано в [4]. При переходе от σ к другому комплексному числу $\hat{\sigma}$ получается аналогичное линейное пространство $\hat{\mathcal{D}}$, базисы которого, построенные по формулам (2.1) и (2.2), обозначим соответственно $\hat{B}_1$ и $\hat{B}_2$. Далее в работе используется обозначение $\hat{\sigma} = -\sigma - 1$.

Пусть γ – многообразие на конусе C, по одному разу пересекающее все (быть может, за исключением нескольких) его образующие, а H – подгруппа группы G, для которой γ является однородным пространством (например, для окружности $\gamma_r: x_2^2 + x_3^2 = r^2$ подгруппа H_{γ_r} состоит из поворотов в плоскости $x_1 = r$).

Теорема 1 (см. [5]). *При $\hat{\sigma} = -\sigma - 1$ билинейные интегральные функционалы*

$$\mathrm{F}_{\gamma} : \mathcal{D} \times \hat{\mathcal{D}} \to \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int\limits_{\gamma} u(x)v(x)\mathrm{d}\gamma,$$

где $\mathrm{d}\gamma$ – мера на γ, инвариантная относительно подгруппы H, совпадают.

Гомоморфизм $T: G \to GL(\mathcal{D})$ в группу невырожденных линейных операторов пространства $\mathcal{D}$, при котором оператор $T(g)$ функции f ставит в соответствие композицию $f g^{-1}$ левого "сдвига" конуса C элементом g^{-1} и функции f, является G-представлением в пространстве $\mathcal{D}$. Группу G можно записать [6] в виде $G = H_{\gamma_r}\tilde{H}H_{\gamma_r}$, где $\tilde{H}$ – подгруппа гиперболических вращений в плоскости Ox_1x_2. Опираясь на это разложение, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2 (см. [7]). *При $\hat{\sigma} = -\sigma - 1$ билинейные интегральные функционалы F_{γ} инвариантны относительно пары операторов представления $(T(g), \hat{T}(g))$, т.е. $\mathrm{F}_{\gamma}(T(g)f, \hat{T}(g)\hat{f}) = \mathrm{F}_{\gamma}(f, \hat{f})$.*

Для дальнейшего изложения определим функцию

$$A: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \times G \to \mathbb{C},$$

ставящую набору $(\sigma, p, \hat{p}, g)$ в соответствие число $\mathrm{F}_{\gamma}(T(g)f_p, \hat{f}_{\hat{p}})$. Корректность этого определения следует из теоремы 1. В последующих теоремах четвертый аргумент этой функции будет принадлежать либо тривиальной подгруппе, либо подгруппе H°, состоящей из поворотов

$$h^{\circ}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\xi & -\sin\xi \\ 0 & \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix}$$

в плоскости Ox_2x_3, но в общем случае (поскольку $\dim G = 3$) принадлежит одно- или двухпараметрической подгруппе. Хотя параметр ξ, задающий подгруппу H°, принимает все значения из отрезка $[-\pi;\pi]$, ограничимся случаем $0 < \xi < \dfrac{\pi}{2}$. Так как алгебра Ли группы G порождается кососимметрической матрицей $a = e_{23} - e_{32}$ и двумя симметрическими $b = e_{12} + e_{21}$ и $c = e_{13} + e_{31}$ (где e_{ij} — матрицы канонического базиса пространства матриц размера 3×3), для формы $B(x,y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ Картана—Киллинга выполняются равенства $B(b,b) = B(c,c) = -B(a,a) = 2$ и $H^\circ = \exp \operatorname{Span}(a)$, то H° является максимальной компактной подгруппой в G.

Теорема 3. *Выполняется формула преобразования*

$$A(\sigma, p, \hat{p}, g) = A(\hat{\sigma}, \hat{p}, p, g^{-1}).$$

Доказательство. Так как T является гомоморфизмом групп, то в силу теоремы 2 имеем

$$A(\sigma, p, \hat{p}, g) = \mathrm{F}_\gamma(T(g)f, \hat{f}) = \mathrm{F}_\gamma(T(g^{-1})T(g)f, \hat{T}(g^{-1})\hat{f}) =$$
$$= \mathrm{F}_\gamma(T(\mathrm{id})f, \hat{T}(g^{-1})\hat{f}) = \mathrm{F}_\gamma(\hat{T}(g^{-1})\hat{f}, f) = A(\hat{\sigma}, \hat{p}, p, g^{-1}).$$

3. ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ $A(-\sigma-1, p_2^{\pm}, p_1, \mathrm{id})$ ЧЕРЕЗ ВОЛНОВЫЕ КУЛОНОВСКИЕ ФУНКЦИИ

При решении линейного дифференциального уравнения $\mathfrak{d}f(p) = 0$, в котором дифференциальный оператор определен формулой

$$\mathfrak{d} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2} + 1 - \frac{2\hat{p}}{p} - \frac{\sigma(\sigma+1)}{p^2},$$

важную роль играют кулоновские функции

$$F_\sigma(\hat{p}; p) = C_\sigma(\hat{p})p^{\sigma+1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}p}\,{}_1F_1(1+\sigma+\mathbf{i}\hat{p}; 2\sigma+2; -2\mathbf{i}p)$$

и

$$H_\sigma^{\pm}(\hat{p}; p) = D_\sigma^{\pm}(\hat{p})p^{\sigma+1}\mathrm{e}^{\pm\mathbf{i}p}\times$$
$$\times\left[\frac{\Gamma(-2\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma\pm\mathbf{i}\hat{p})}{}_1F_1(1+\sigma\pm\mathbf{i}\hat{p}; 2\sigma+2; \mp2\mathbf{i}p) + \frac{\Gamma(2\sigma+1)}{(\mp2\mathbf{i}\hat{p})^{2\sigma+1}\Gamma(1+\sigma\pm\mathbf{i}\hat{p})}{}_1F_1(-\sigma\pm\mathbf{i}\hat{p}; -2\sigma; \mp2\mathbf{i}p)\right],$$

которые определены при комплексных значениях параметров σ (угловой момент) и $\hat{p} \neq 0$ (параметр Зоммерфельда) и переменной p, и в которых

$$C_\sigma(\hat{p}) = \frac{2^\sigma\sqrt{\Gamma(1+\sigma+\mathbf{i}\hat{p})\Gamma(1+\sigma-\mathbf{i}\hat{p})}}{\mathrm{e}^{\hat{p}\pi/2}\Gamma(2\sigma+2)},$$

$$D_\sigma^{\pm}(\hat{p}) = \frac{(\mp2\mathbf{i})^{2\sigma+1}\Gamma(1+\sigma\pm\mathbf{i}\hat{p})}{C_\sigma(\hat{p})\Gamma(2\sigma+2)}.$$

Эти функции составляют базисы (см. [8]) $E_1 = \{H_\sigma^+(\hat{p}; p), H_\sigma^-(\hat{p}; p)\}$ и $E_2 = \left\{F_\sigma(\hat{p}; p), \frac{1}{2}(H_\sigma^+(\hat{p}; p) + H_\sigma^-(\hat{p}; p))\right\}$ пространства решений $\operatorname{Ker}\mathfrak{d}$.

В работе [9] дано “рекуррентное” определение волновых кулоновских функций, а соответствующие инфинитезимальные операторы изменения индекса рассматриваются как генераторы алгебры Ли. Интерпретация волновых кулоновских функций как матричных элементов перехода между двумя базисами пространства представления дана авторами настоящей статьи в [10]. Покажем, что в частных случаях $(p, \hat{p}, g) = (p_2^{\pm}, p_1, \mathrm{id})$ значения функции A выражаются через волновые кулоновские функции.

Теорема 4. *При* $\Re(\sigma) > -1$ *и* $p_1 \neq 0$ *имеем*

$$A(-\sigma-1, p_2^+, p_1, \mathrm{id}) = 2p_1^{-\sigma-1}\mathrm{e}^{p_2\pi/2}\sqrt{\Gamma(1+\sigma+\mathbf{i}p_2)\Gamma(1+\sigma-\mathbf{i}p_2)}F_\sigma(p_2;p_1).$$

Доказательство. Так как при гомоморфизме групп $\mathrm{id} \in G$ отображается в тождественный оператор, то, учитывая теорему 1, в качестве многообразия, по которому производится интегрирование, можно выбрать параболу $\omega = \left\{\frac{1}{2}(1+\alpha_2, 1-\alpha^2, 2\alpha) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$. Поскольку

$$H_\omega = \left\{h_\omega(\tau) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+\tau^2 & \tau^2 & 2\tau \\ -\tau^2 & 2-\tau^2 & -2\tau \\ 2\tau & 2\tau & 2 \end{pmatrix} \Bigg|\, \tau \in \mathbb{R}\right\},$$

для $x(\alpha) \in \omega$ выполняется включение $h_\omega(\tau)x(\alpha) = x(\alpha+\tau)$ и, следовательно, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\alpha$, имеем

$$A(-\sigma-1, p_2^+, p_1, \mathrm{id}) = 2^{-\sigma}\int_{\mathbb{R}}(1-\alpha^2)_+^{\sigma+\mathbf{i}p_2}(1+\alpha)^{-2\mathbf{i}p_2}\mathrm{e}^{\mathbf{i}p_1\alpha}\mathrm{d}\alpha = 2^{-\sigma}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}p_1}\int_0^2 t^{\sigma-\mathbf{i}p_2}(2-t)^{\sigma+\mathbf{i}p_2}\mathrm{e}^{\mathbf{i}p_1 t}\mathrm{d}t =$$
$$= 2^{\sigma+1}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}p_1}\mathrm{B}(1+\sigma+\mathbf{i}p_2, 1+\sigma-\mathbf{i}p_2)\,{}_1F_1(1+\sigma-\mathbf{i}p_2; 2\sigma+2; 2\mathbf{i}p_1),$$

где для вычисления последнего интеграла использована формула (см. [11, 2.3.6(1)]). Применяя преобразование Куммера $\mathrm{e}^{-z}\,{}_1F_1(a;b;z) = {}_1F_1(b-a;b;-z)$ и определение функции $F_\sigma(p,\hat{p})$, завершаем доказательство.

Отметим, что поскольку алгебра Ли группы G является прямой суммой подалгебры $\mathrm{Span}(a)$ и линейного подпространства $\mathrm{Span}(b,c)$, $\mathrm{Span}(b)$ – максимальная коммутативная подалгебра в $\mathrm{Span}(b,c)$ и спектр оператора $\mathrm{ad}\,b$ имеет вид $\{0,1,-1\}$, то максимальная нильпотентная подалгебра алгебры Ли группы G порождается неподвижной точкой $a+b$ оператора $\mathrm{ad}\,b$. Но $\exp(\tau(a+b)) = H_\omega$, поэтому подгруппа H_ω, транзитивно действующая на параболе ω, является максимальной нильпотентной подгруппой в G. В наших работах [7], [12] показано, что при сужении представления T на эту подгруппу появляются функции Бесселя–Клиффорда, а в классической (четырехмерной) лоренцевой группе – их мультииндексные аналоги (гиперфункции).

Теорема 5. *При* $-1 < \Re(\sigma) < 0$ *и* $p_1 \neq 0$

$$A(-\sigma-1, p_2^-, p_1, \mathrm{id}) = \frac{\mathbf{i}\Gamma(2\sigma+2)C_\sigma(p_2)}{2^{2\sigma}p_1^{\sigma+1}}(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi\sigma}H_\sigma^+(p_2;p_1) - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi\sigma}H_\sigma^-(p_2;p_1)).$$

Доказательство. Интегрируя по параболе ω, имеем

$$A(-\sigma-1, p_2^-, p_1, \mathrm{id}) = 2^{-\sigma}\int_{\mathbb{R}}(1-\alpha^2)_-^{\sigma+\mathbf{i}p_2}(1+\alpha)^{-2\mathbf{i}p_2}\mathrm{e}^{\mathbf{i}p_1\alpha}\mathrm{d}\alpha =$$
$$= 2^{-\sigma}\sum_{k=0}^{1}\mathrm{e}^{(-1)^k\mathbf{i}p_1}\int_0^{+\infty} t^{\sigma+(-1)^k\mathbf{i}p_2}(t+2)^{\sigma-(-1)^k\mathbf{i}p_2}\mathrm{e}^{(-1)^k\mathbf{i}p_1 t}\mathrm{d}t.$$

Применяя формулу [11], 2.3.2(3), получаем

$$A(-\sigma-1, p_2^-, p_1, \mathrm{id}) = 2^{-\sigma}\sum_{k=0}^{1}\mathrm{e}^{(-1)^k\mathbf{i}p_1}\times$$
$$\times\Big[2^{2\sigma+1}\mathrm{B}(1+\sigma+(-1)^k\mathbf{i}p_2, -2\sigma-1)\,{}_1F_1(1+\sigma+(-1)^{k+1}\mathbf{i}p_2;\, 2\sigma+2;\, (-1)^k\mathbf{i}p_1) +$$
$$+ ((-1)^{k+1}\mathbf{i}p_1)^{-2\sigma-1}\Gamma(2\sigma+1)\,{}_1F_1(-\sigma+(-1)^k\mathbf{i}p_2; -\sigma; 2(-1)^{k+1}\mathbf{i}p_1)\Big] =$$
$$= 2p_1^{-\sigma-1}\left(\frac{\Gamma(1+\sigma+\mathbf{i}p_2)H_\sigma^+(p_2;p_1)}{D_\sigma^+(p_2)} + \frac{\Gamma(1+\sigma-\mathbf{i}p_2)H_\sigma^-(p_2;p_1)}{D_\sigma^-(p_2)}\right),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

4. ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $A(-\sigma-1, p_2^+, -p_1, h(\xi))$ ЧЕРЕЗ ВОЛНОВЫЕ КУЛОНОВСКИЕ ФУНКЦИИ

В этой части статьи докажем утверждение, обобщающее теорему 4 (аналогичное обобщение теоремы 5 опускаем).

Теорема 6. *При* $-1 < \Re(\sigma) < 0$ *имеем*

$$A(-\sigma-1, p_2^+, -p_1, h(\xi)) = \mathrm{B}(1+\sigma-\mathbf{i}p_2, 1+\sigma+\mathbf{i}p_2)\times$$
$$\times\frac{2(\sin\xi+\cos\xi+1)^{\sigma-\mathbf{i}p_2}(\sin\xi-\cos\xi-1)^{\sigma+\mathbf{i}p_2}}{\cos^{2\sigma+2}\xi[p_1\tan\xi]^{\sigma+1}(1+\cos\xi)^{\sigma}e^{\mathbf{i}p_1\tan\xi}C_\sigma(-p_2)}F_\sigma(-p_2; p_1\tan\xi).$$

Доказательство. Интегрируя вдоль параболы ω, имеем

$$A(-\sigma-1, p_2^+, -p_1, h(\xi)) = \frac{2}{(1-\cos\xi)^{\sigma+1}}\int_{\mathbb{R}}(1-\alpha)_+^{\sigma-\mathbf{i}p_2}(1+\alpha)^{2\mathbf{i}p_2}\left(\alpha+\frac{1+\cos\xi}{\sin\xi}\right)^{-2\sigma-2}\times$$
$$\times\exp\frac{\mathbf{i}p_1\sin\xi\left(\alpha+\dfrac{\cos\xi-1}{\sin\xi}\right)}{(\cos\xi-1)\left(\alpha+\dfrac{\cos\xi+1}{\sin\xi}\right)}d\alpha = \frac{2e^{\mathbf{i}p_1\sin\xi/(\cos\xi-1)}}{(1-\cos\xi)^{\sigma+1}}\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}(1-\alpha)^{\sigma-\mathbf{i}p_2}(1+\alpha)^{\sigma+\mathbf{i}p_2}\left(\alpha+\frac{1+\cos\xi}{\sin\xi}\right)^{-2\sigma-2}\exp\frac{2\mathbf{i}p_1\sin\xi}{(1-\cos\xi)\left(\alpha+\dfrac{\cos\xi+1}{\sin\xi}\right)}d\alpha.$$

Используя далее подстановку

$$t = \frac{\sin\xi}{1+\cos\xi-\sin\xi}-\frac{\sin\xi}{1+\cos\xi+\alpha\sin\xi},$$

применяем, как и в ходе доказательства теоремы 2, формулу [11, 2.3.6.1], а после выражаем функцию Куммера через функцию Кулона.

5. ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ $A(-\sigma-1, p_2^\pm, p_2^\pm, h(\xi))$ И $A(-\sigma-1, p_2^\pm, p_2^\mp, h(\xi))$ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ АППЕЛЯ F_1

Функция Аппеля F_1 является частным случаем (при $n = 2$) функции Лауричеллы F_D, которая при $|z_1|,\ldots|z_n| < 1$ определяется рядом

$$F_D\left(\begin{matrix}a; b_1,\ldots,b_n\\ c\end{matrix}\middle| z_1,\ldots,z_n\right) = \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+\ldots+m_n}(b_1)_{m_1}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\ldots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!},$$

а вне указанной области является его аналитическим продолжением [13], [14]. Другим частным случаем (при $n = 1$) является гипергеометрическая функция Гаусса. С теоретико-групповой точки зрения функция F_D изучена У. Миллером в работе [15] (а также в [2]), рассмотревшим неприводимые представления алгебры $\mathfrak{sl}(n+3, \mathbb{C})$, а ее частный случай F_1 – в работе [16]. Работам Миллера предшествовала статья Н.Я. Виленкина [17], в которой другие гипергеометрические функции двух переменных, F_A и F_B, были изучены в виде матричных элементов максимально вырожденных представлений группы $SL(n,\mathbb{R})$ (см. также [18]). В работе [19] с помощью теории алгебр Ли для каждой из 34 гипергеометрических функций двух переменных (включая F_1) найдена каноническая система, в которой соответствующая функция возникает в результате разделения переменных. Свойства функции F_1 часто раскрываются в работах, относящихся к квантовой физике (теория рассеивания, теория Редже, фейнмановские интегралы) [20]–[22]. Отметим также связь между F_1 и нормальными (неполными) эллиптическими интегралами [23], [24].

Покажем, что значения функции $A(-\sigma-1, p_2^+, p_2^{'+}, g)$ в частных случаях выражаются через функцию Аппеля F_1 или линейную комбинацию двух функций F_1.

Теорема 7. *При* $-1 < \Re(\sigma) < 0$ *имеем*

$$A(-\sigma-1, p_2^+, p_2^{'+}, h((\xi)) = \frac{(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}p_2}\,\mathrm{B}(\mathbf{i}p_2-\sigma, 1+\sigma-\mathbf{i}p_2')}{2^{\sigma+\mathbf{i}p_2}\cos^{\sigma+\mathbf{i}(p_2-p_2')-1}(1+\cos\xi-\sin\xi)^{-\sigma-\mathbf{i}p_2'}}\times$$
$$\times F_1\left(\left.\begin{matrix}\mathbf{i}p_2-\sigma; 1+\sigma+\mathbf{i}p_2, -\sigma-\mathbf{i}p_2'\\ 1+\mathbf{i}(p_2-p_2')\end{matrix}\right|\frac{1+\cos\xi-\sin\xi}{2}, \frac{1-\cos\xi-\sin\xi}{1+\cos\xi-\sin\xi}\right). \tag{5.1}$$

Доказательство. Выбирая в качестве многообразия, по которому происходит интегрирование, параболу ω, получаем

$$A(-\sigma-1, p_2^+, p_2^{'+}, h((\xi)) = \frac{2(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}p_2}}{\cos^{\sigma+1+\mathbf{i}p_2}\xi}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}}\left(\alpha+\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}\right)^{2\mathbf{i}p_2}(1+\alpha)^{2\mathbf{i}p_2'}(1-\alpha^2)_+^{\sigma}(1+2\alpha\,\mathrm{tg}\,\xi-\alpha^2)_+^{-\sigma-1}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Так как для корней $\alpha_\pm = \dfrac{\sin\xi\pm 1}{\cos\xi}$ многочлена $\alpha^2-2\alpha\tan\xi-1$ справедливо неравенство $-1<\alpha_-<1<\alpha_+$, то

$$A(-\sigma-1, p_2^+, p_2^{'+}, h((\xi)) = \frac{2(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}p_2}}{\cos^{\sigma+1+\mathbf{i}p_2}\xi}\int_{\alpha_-}^{1}\frac{(1-\alpha)^{\sigma-\mathbf{i}p_2'}(1+\alpha)^{\sigma+\mathbf{i}p_2'}\,\mathrm{d}\alpha}{\left(\dfrac{\sin\xi+1}{\cos\xi}-\alpha\right)^{\sigma+1+\mathbf{i}p_2}\left(\alpha-\dfrac{\sin\xi-1}{\cos\xi}\right)^{\sigma+1-\mathbf{i}p_2}}.$$

Переходя к новой переменной $t=\dfrac{1+\alpha\cos\xi-\sin\xi}{1+\cos\xi-\sin\xi}$, получаем равенство

$$A(-\sigma-1, p_2, p_2', h((\xi)) = \frac{(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}p_2}(1+\cos\xi-\sin\xi)^{\sigma+\mathbf{i}p_2'}}{2^{\sigma+\mathbf{i}p_2}\cos^{\sigma+\mathbf{i}(p_2-p_2')-1}\xi}\times$$
$$\times\int_0^1\frac{t^{-\sigma-1+\mathbf{i}p_2}(1-t)^{\sigma-\mathbf{i}p_2'}\,\mathrm{d}t}{\left(1-\dfrac{1+\cos\xi-\sin\xi}{2}t\right)^{\sigma+1+\mathbf{i}p_2}\left(1-\dfrac{1-\cos\xi-\sin\xi}{1+\cos\xi-\sin\xi}t\right)^{-\sigma-\mathbf{i}p_2'}}.$$

Так как при рассматриваемых значениях параметра ξ выполняются неравенства $1+\cos\xi-\sin\xi>0$ и $\left|\dfrac{1-\cos\xi-\sin\xi}{1+\cos\xi-\sin\xi}\right|<1$, то, используя формулу [25, 2.2.8.5], завершаем доказательство.

С учетом связи [26, 7.2.4.63]

$$F_1\left(\left.\begin{matrix}a,b,c\\ b+c\end{matrix}\right| z; w\right) = (1-w)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,b;b+c;\frac{z-w}{1-w}\right)$$

между гипергеометрическими функциями Аппеля и Гаусса, формулу (5.1) можно переписать с использованием функции Гаусса.

Поскольку

$$A(-\sigma-1,p_2^{\pm},p_2'^{\mp},h(\xi))=\frac{2(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}p_2}}{\cos^{\sigma+1+\mathbf{i}p_2}\xi}\times$$
$$\times\int\limits_{\pm1}^{\alpha_{\pm}}\left(\alpha+\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}\right)^{2\mathbf{i}p_2}(1+\alpha)^{2\mathbf{i}p_2'}(\pm\alpha^2\mp1)^{\sigma}(\pm1\pm2\alpha\tan\xi\mp\alpha^2)^{-\sigma-1}\mathrm{d}\alpha,$$

то в случае $(\hat{p},p)=(p_2^{\pm},p_2'^{\mp})$ значения функции $A(-\sigma-1,\hat{p},p,h(\xi))$ тоже выражаются через функции Аппеля F_1, а соответствующие теоремы мы опускаем. В случае $(\hat{p},p)=(p_2^{-},p_2'^{-})$ значение функции $A(-\sigma-1,\hat{p},p,h(\xi))$ можно представить в виде линейной комбинации двух функций Аппеля, а именно имеет место следующая теорема.

Теорема 8. *При* $-1<\Re(\sigma)<0$ *имеем*

$$A(-\sigma-1,p_2^{-},p_2'^{-},h((\xi))=\frac{(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}\hat{p}_2}}{\cos^{\sigma+\mathbf{i}\hat{p}}\xi(\sin\xi+\cos\xi+1)}\times$$
$$\times\left[\mathrm{B}(1,-\sigma-\mathbf{i}p_2')F_1\left(\begin{matrix}1,\mathbf{i}p_2,1+\sigma-\mathbf{i}p_2'\\1-\sigma-\mathbf{i}p_2'\end{matrix}\middle|\frac{2\cos\xi}{1+\cos\xi+\sin\xi},\frac{1+\cos\xi+\sin\xi}{1+\cos\xi-\sin\xi}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathrm{B}(1,1+\sigma-\mathbf{i}p_2)F_1\left(\begin{matrix}1,1+\sigma+\mathbf{i}p_2',1+\sigma-\mathbf{i}p_2'\\-\sigma+\mathbf{i}p_2\end{matrix}\middle|\frac{\cos\xi-\sin\xi-1}{2\cos\xi},\frac{1+\cos\xi-\sin\xi}{2\cos\xi}\right)\right].$$

Доказательство. Так как

$$A(-\sigma-1,\sigma,p_2^{-},p_2'^{-},h((\xi))=\frac{2(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}\hat{p}}}{\cos^{\sigma+1+\mathbf{i}\hat{p}}\xi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\alpha+\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}\right)^{2\mathbf{i}\hat{p}}\times$$
$$\times(1+\alpha)^{2\mathbf{i}p}(1-\alpha^2)_{-}^{\sigma}(1+2\alpha\tan\xi-\alpha^2)_{-}^{-\sigma-1}\mathrm{d}\alpha=\frac{2(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}\hat{p}}}{\cos^{\sigma+1+\mathbf{i}\hat{p}}\xi}(I_+-I_-),$$

где

$$I_{\pm}=\int\limits_{\pm\infty}^{\beta_{\pm}}\frac{(\alpha-1)^{\sigma-\mathbf{i}p}(\alpha+1)^{\sigma+\mathbf{i}p}\,\mathrm{d}\alpha}{\left(\alpha-\dfrac{\sin\xi+1}{\cos\xi}\right)^{\sigma+1+\mathbf{i}\hat{p}}\left(\alpha-\dfrac{\sin\xi-1}{\cos\xi}\right)^{\sigma+1-\mathbf{i}\hat{p}}},$$

$\beta_+=\alpha_+$ и $\beta_-=-1$, то, применяя в интеграле $I_{\pm}$ подстановку $t=1\pm\alpha$, вычисляем его по формуле [11, 2.2.8.11].

6. КОНТИНУАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ A И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА ФУРЬЕ–МЕЛЛИНА ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема 9. *При* $-1<\Re(\sigma)<0$ *имеем*

$$\int\limits_{\mathbb{R}}p_1^{-2\sigma-2}\mathrm{e}^{\mathbf{i}p_1\tan\xi}F_{\sigma}(p_2;p_1)F_{\sigma}(p_2';-p_1\tan\xi)\mathrm{d}p_1=$$
$$=\kappa F_1\left(\begin{matrix}\mathbf{i}p_2-\sigma,1+\sigma+\mathbf{i}p_2,\mathbf{i}p_2'-\sigma\\1+\mathbf{i}(p_2+p_2'^{+})\end{matrix}\middle|\frac{1+\cos\xi-\sin\xi}{2},\frac{1-\cos\xi-\sin\xi}{1+\cos\xi-\sin\xi}\right),$$

где

$$\kappa = \frac{2^{-\sigma-\mathbf{i}p_2-1}\pi\cos^{3+\sigma+\mathbf{i}(p_2'-p_2)}\xi(1+\cos\xi)^{\sigma}(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}p_2}}{(1+\cos\xi-\sin\xi)^{2\mathbf{i}p_2'}(1-\sin\xi-\cos\xi)^{\sigma-\mathbf{i}p_2}}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{\Gamma(1+\sigma+\mathbf{i}p_2)\Gamma(1+\sigma-\mathbf{i}p_2)}\mathrm{B}(\mathbf{i}p_2-\sigma,1+\sigma+\mathbf{i}p_2')C_\sigma(p_2')}{\mathrm{B}(1+\sigma+\mathbf{i}p_2',1+\sigma-\mathbf{i}p_2')}.$$

Доказательство. Представим функцию $\hat{T}(g)\hat{f}_{p_2^+}$ в виде суммы двух интегральных операторов

$$\hat{T}(g)\hat{f}_{p_2^+} = \int_{\mathbb{R}} k_+(p_2,p_2')\hat{f}_{p_2'^+}\mathrm{d}p_2 + \int_{\mathbb{R}} k_-(p_2,p_2')\hat{f}_{p_2'^-}\mathrm{d}p_2', \tag{6.1}$$

ядра $k_\pm(p_2,p_2')$ которых являются аналогами матричных элементов оператора. Домножив обе части равенства (6.1) на функцию $f_{p_2''^+}\in B_2$ и проинтегрировав по гиперболе $\rho = \{(\cosh\alpha,\pm1,\sinh\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$, получаем, что

$$F_\rho(\hat{T}(g)\hat{f}_{p_2^+}, f_{p_2''^+}) = \int_{\mathbb{R}} k_+(p_2,p_2')\delta(p_2'+p_2'')\mathrm{d}p_2$$

(где δ – дельта-функция), откуда

$$k_+(p_2,p_2') = (2\pi)^{-1}A(-\sigma-1,p_2^+,-p_2'^+,g). \tag{6.2}$$

Таким образом, ядро $k_+(p_2,p_2')$ уже фактически вычислено в теореме 5.

Запишем теперь функции $\hat{f}_{p_2^\pm}$ в виде интегрального оператора

$$\hat{f}_{p_2^\pm} = \int_{\mathbb{R}} \lambda_\pm(p_2,p_1)\hat{f}_{p_1}\mathrm{d}p_1, \tag{6.3}$$

где ядра $\lambda_\pm(p_2,p_1)$ является аналогом матричного элемента матрицы перехода между базисами. Домножим обе части равенства (6.3) и проинтегрируем по окружности γ_r. Так как

$$H_{\gamma_r}\simeq H^\circ = \left\{h^\circ(\tau) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\tau & -\sin\tau\\ 0 & \sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\middle|\tau\in\mathbb{R}\right\},$$

$\gamma_r = \{x(\alpha) = (r, r\cos\alpha, r\sin\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$, $h^\circ(\tau)x(\alpha) = x(\alpha+\tau)$ для $x\in\gamma_r$, $\mathrm{d}\gamma_r = \mathrm{d}\alpha$, то получаем формулу, аналогичную (6.2):

$$\lambda_\pm(p_2,p_1) = (2\pi)^{-1}A(-\sigma-1,p_2^\pm,-p_1,\mathrm{id}),$$

а значит, ядра $\lambda_\pm(p_2,p_1)$ уже вычислены в теоремах 4 и 5.

Переписав (6.2) согласно определению функции A в виде

$$k_+(p_2,p_2') = (2\pi)^{-1}F_\gamma(\hat{T}(h(\xi)\hat{f}_{p_2}, f_{-p_2'}),$$

получим с учетом формулы (6.3), что

$$k_+(p_2,p_2') = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}\lambda(p_2,p_1)A(-\sigma-1,p_1,-p_2'^+,h(\xi))\mathrm{d}p_1,$$

где A по теореме 4 выражается через функцию Кулона. Так как $h^{-1}(\xi) = h(-\xi)$, то в силу теоремы 2

$$k_+(p_2,p_2') = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}\lambda_+(p_2,p_1)A(\sigma,-p_2'^+,p_1,h(-\xi))\mathrm{d}p_1,$$

т.е.

$$A(-\sigma-1,p_2^+,-p_2'^+,h(\xi))=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}A(-\sigma-1,p_2^{\pm},-p_1,\mathrm{id})A(\sigma,-p_2'^+,p_1,h(-\xi))\mathrm{d}p_1. \tag{6.4}$$

Равенство (6.4) является континуальной теоремой сложения для функции A.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кулоновские волновые функции первоначально были определены как решение волнового уравнения Кулона, возникающего после разделения переменных для радиальной функции в задаче о движении электрона в кулоновском поле. В описании состояния электрона часто встречаются произведения двух кулоновских функций [27] или интегралы от таких произведений [28]. Интеграл, вычисленный в теореме 9, можно рассматривать как обобщение интегралов типа Меллина, рассматриваемых в [29]–[31]. Схожие с ним интегралы мы получаем в [10, разд. 8], используя подпредставление трехмерной лоренцевой группы на прямое произведение двух однопараметрических подгрупп.

Теорема сложения (6.4) остается справедливой и для других возможных пар $(\hat{p},p)$, что приводит к новым интегральным формулам. Например, с помощью теорем 5 и 8 интегралы типа Фурье–Меллина от произведения функций $H_\sigma^+(\hat{p};p)$ удается выразить через линейные комбинации двух функций F_1.

Учитывая, что функции, принадлежащие базису $\hat{B}_1$, являются собственными функциями оператора $\hat{T}(h_\omega(\tau))$, можно получить континуальную теорему сложения вида

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1}A(\ldots,-p_1,\mathrm{id})=\int A(\ldots,-p_2,h_\omega(\tau))A(\ldots,p_2,-p_1,\mathrm{id})\mathrm{d}p_2,$$

которая приводит к представлениям волновых кулоновских функций в виде интеграла от произведения волновой кулоновской функции и функции Аппеля F_1.

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климык А.У., Качурик И.И.* Вычислительные методы в теории представлений групп. Киев: Вища школа, 1986.
2. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959.
4. *Шилин И.А., Чой Дж.* Алгебры Ли и специальные функции, связанные с изотропным конусом. Итоги науки и техники. Серия “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. (В печати).
5. *Шилин И.А.* Двойные SO(2,1)-инвариантные интегралы и формулы для функций Уиттекера. Известия вузов. Матем. 2011. № 5. С. 56–66.
6. *Вердиев Й.А.* Инварианты представлений групп Лоренца и их применения в дуальной модели физики частиц. Баку, АН Азербайджана, 1978.
7. *Shilin I.A., Choi J.* Certain relations between Bessel and Whittaker functions related to some diagonal and block-diagonal 3×3-matrices. J. Nonlinear Sci. Appl. 2017. V. 10. P. 560–574.
8. *Gaspard D.* Connection formulas between Coulomb wave functions. J. Math. Phys. 2018. V. 59. 112104.
9. *Chattarji D.* The Coulomb wave function from the viewpoint of the Lie algebra. Il Nuova cimento. 1967. V. 48 (2). P. 524–530.
10. *Shilin I.A., Choi J., Lee J.W.* Some integrals involving Coulomb functions associated with the three-dimensional proper Lorentz group. AIMS Mathematics. 2020. V. 5 (6). P. 5664–5682.
11. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
12. *Шилин И.А., Чой Дж.* Некоторые формулы для обычных функций и гиперфункций Бесселя–Клиффорда, связанные с собственной группой Лоренца. Фунд. и прикл. математика. 2019. Т. 22. № 5. С. 195–208.
13. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Lauricella’s functions $F_A^{(N)}$, $F_B^{(N)}$ and $F_D^{(N)}$. Int. Transforms. Spec. Func. 2020. V. 31 (11). P. 921–940.

14. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Lauricella function $F_D^{(N)}$ with arbitrary number of variables. Int. Transforms. Spec. Func. 2018. V. 29 (1). P. 21–42.
15. *Miller W.* Lie theory and the Lauricella functions F_D. J. Math. Phys. 1972. V. 13. P. 1393–1399.
16. *Miller W.* Lie theory and the Appell functions F_1. SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4 (4). P. 638–655.
17. *Виленкин Н.Я.* Гипергеометрические функции от нескольких переменных и вырожденные представления группы $SL(n,\mathbb{R})$. Изв. вузов. Матем. 1970. № 4. С. 50–55.
18. *Vilenkin N.Ja., Klimyk A.U.* Representations of Lie groups and special functions. Volume 3. Classical and quantum groups and special functions. Dordrecht, Kluwer, 1992.
19. *Kalnins E.G., Manocha H.L., Miller W.* The Lie theory of two-variable hypergeometric functions. Studies in Appl. Math. 1980. V. 62 (2). P. 143–173.
20. *Kniehl B.A., Tarasov O.V.* Finding new relationships between hypergeometric functions by evaluating Feynman integrals. Nucl. Phys. B. 2012. V. 854. P. 841–852.
21. *Lee J.-C., Yang Y.* The Appell function F_1 and Regge string scattering amplitudes. Phys. Letters. B. 2014. V. 739. P. 370–374.
22. *Shpot M.A.* A massive Feynman integral and some reduction relarions for Appell functions. J. Math. Phys. 2007. V. 48 (12). 123512.
23. *Carlson B.C.* Some series and bounds for incomplete elliptic integrals. J. Math. and. Phys. 1961. V. 40. P. 125–134.
24. *Scarpello G.M., Ritelli D.* π and the hypergeometric functions of complex argument. Journal of Number Theory. 2011. V. 131. P. 1887–1900.
25. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, рядов и произведений. М.: Наука, 1963.
26. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
27. *Чибисов М.И., Ермолаев А.М., Шеркани М., Бруйар Ф.* Суммы произведений кулоновских волновых функций по вырожденным состояниям. ЖЭТФ. 2020. Т. 117 (2). С. 313–316.
28. *Ancarani L.U., Hervieux P.A.* Analytical formulas for Coulomb integrals involved in scattering problems. Phys. Rev. A. 1998. V. 58 (1). 336.
29. *Arnoldus A.G., George T.F.* Analytical evaluation of elastic Coulomb integrals. J. Math. Phys. 1992. V. 33 (2). P. 578–583.
30. *Nesbet R.K.* Analytical evaluation of integrals over Coulomb wave functions. Comp. Phys. Comm. 1988. V. 52 (1). P. 29–33.
31. *Sil N.C., Crees M.A., Seaton M.J.* Integrals involving products of Coulomb functions and inverse powers of the radial coordinate. J. Phys. B: Atomic and Molecular Physics. 1984. V. 17 (1). P. 1–21.