

УДК 531.1

РЕГУЛЯРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НАИБЫСТРЕЙШЕГО ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ¹⁾

© 2022 г. А. Н. Дарьина^{1,*}, А. И. Дивеев^{1,**}, Д. Ю. Карамзин^{1,***}, Ф. Л. Перейра^{2,****},
Е. А. Софронова^{1,*****}, Р. А. Чертовских^{2,*****}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² Исследовательский центр систем и технологий (SYSTEC), Университет г. Порто, Порто, Португалия

*e-mail: daryina@ccas.ru

**e-mail: aidiveev@mail.ru

***e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru

****e-mail: flp@fe.up.pt

*****e-mail: sofronova_ea@mail.ru

*****e-mail: roman.home@gmail.com

Поступила в редакцию 01.05.2021 г.
Переработанный вариант 05.04.2022 г.
Принята к публикации 11.05.2022 г.

Исследована задача быстрогодействия для мобильного управляемого робота при фазовых ограничениях. Предложен численный метод решения, основанный на принципе максимума Понтрягина. Известно, что задача управления мобильным роботом, как и любое движение, согласно унитарной модели, принадлежит классу существенно нерегулярных задач относительно фазовых ограничений. Решение такой задачи с помощью принципа максимума затруднено тем, что нет формулы для меры-множителя Лагранжа. Неясно, как выразить эту меру через другие экстремальные значения, и тем самым непонятно, как свести условия принципа максимума к соответствующей краевой задаче. Чтобы обойти указанную трудность, в работе предложен один метод регуляризации задачи, основанный на ϵ -возмущении. Приведены результаты численного эксперимента. Результаты эксперимента демонстрируют непрерывность меры-множителя. Библиография: 21. Фиг. 5.

Ключевые слова: оптимальное управление, фазовые ограничения, принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.31857/S0044466922090095

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается движение мобильного робота при ограничениях, накладываемых на фазовые координаты. В качестве критерия оптимальности рассматривается быстродействие, т.е. время, затрачиваемое на движение из заданной точки A в точку B . Задача о наибо́льшем движении мобильного робота при фазовых ограничениях, или задача о наибо́льшем обходе роботом препятствия, формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} J(p, u, T) := T \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = p \cos \alpha, \quad \dot{x}_2 = p \sin \alpha, \quad \dot{\alpha} = u, \\ x(0) = A, \quad x(T) = B, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad p \in [-1, 1], \quad u \in [-1, 1], \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ – основная фазовая переменная, $p, u \in \mathbb{R}$ – скалярные параметры управления, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ – заданные точки на плоскости, лежащие вне единичного круга. Задача рассматривается на отрезке времени $[0, T]$. Конечный момент времени T не фиксирован, и,

¹⁾Работа первого и третьего авторов поддержана Минобрнауки РФ, проект 075-15-2020-799. Четвертый и шестой авторы выражают признательность Фонду науки и технологии при Министерстве образования и науки Португальской республики (FCT/MCTES).

более того, необходимо найти наименьшее возможное такое время T , за которое можно, начиная движение из точки A , попасть в точку B с помощью каких-либо допустимых управлений $p(t)$, $u(t)$. При этом робот не должен заезжать на единичный круг на плоскости, который считается препятствием. Переменная α — это дополнительная фазовая переменная, отвечающая углу поворота мобильного робота. Скорость поворота робота управляется функцией $u(t)$, а продольная скорость — функцией $p(t)$. Обе функции считаются измеримыми. Робот оснащен обратным ходом, что соответствует отрицательным значениям p . Начальное значение угла поворота α_0 задано.

В задаче (1) реализуется так называемая простейшая унициклическая модель движения, которая дополняется возможностью разворота робота на месте, т.е. движением при $p = 0$. Она отвечает, например, упрощенной модели трехколесного робота с передним приводом. Отметим, что продольная и угловая скорости в этой модели являются независимыми, что не является характерным для некоторых других мобильных роботов (например, для гусеничного робота). Тем не менее предлагаемый в этой работе подход применим и к другим моделям мобильных роботов. Общий метод исследования обсуждается в разд. 4.

Важно отметить существование решения задачи (1). Действительно, очевидно, что в этой задаче всегда найдется допустимый процесс, и, значит, существование решения в классе измеримых управлений p, u следует из известной теоремы Филиппова (см. [1]) (поскольку правая часть динамической системы линейна по управлению, а множество значений управления — выпуклый компакт). Обозначим решение этой задачи (которых может быть много) через $(x^*, \alpha^*, p^*, u^*, T^*)$.

Итак, задача состоит в оптимальном (по быстродействию) обходе роботом препятствия, которое задано в виде единичного круга на плоскости. В нашей работе предлагается некоторый численный метод нахождения решения $(x^*, \alpha^*, p^*, u^*, T^*)$, основанный на принципе максимума Понтрягина (см. [2]).

Отметим, что решение задачи (1) с помощью принципа максимума осложнено рядом трудностей. Во-первых, любая допустимая траектория, соприкасающаяся с границей единичного круга, не будет регулярной по Р.В. Гамкрелидзе (см. [3], [2, гл. 6]). Действительно, в любой точке границы имеет место

$$x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha = 0,$$

а значит, градиент функции $\Gamma(x, p, u) := -2p(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)$ — скалярного произведения правой части динамической системы на градиент фазоограничения — по (p, u) равен нулю. Более того, по этой же причине в задаче (1) заведомо не будут выполняться даже и более слабые, чем условия регулярности, известные условия управляемости относительно фазовых ограничений (см. [4]). (Такая ситуация весьма распространена в технических системах, где обычно количество фазовых переменных превышает количество переменных управления.) Поэтому мера-множитель Лагранжа, отвечающая за фазовое ограничение, может иметь сингулярную составляющую. В связи с этим, т.е. в связи с отсутствием регулярности и наличием сингулярной составляющей меры, не представляется возможным свести условия принципа максимума к соответствующей краевой задаче, решение которой привело бы к решению задачи управления. Здесь, в частности, возникает проблема нахождения точек выхода на границу и схода с границы фазового ограничения.

Кроме того, применение принципа максимума затруднено наличием особого режима по угловой скорости u . Робот не всегда будет следовать с максимальной по модулю угловой скоростью, т.е. при $|u| = 1$. Однако на участках, где $|u| < 1$, условие максимума, очевидно, не информативно. Возникает проблема нахождения точек выхода на особый режим управления и схода с него.

Оба явления, т.е. отсутствие регулярности относительно фазового ограничения и особый режим управления по угловой скорости, имеют совершенно разную природу. Тем не менее одним из возможных решений и в первом, и во втором случаях является подходящая регуляризация исходной задачи. В работе предлагается с помощью малого параметра $\varepsilon > 0$ определенным образом возмутить исходную задачу (1), так чтобы возмущенная задача стала регулярной в упомянутом выше смысле. Для этого будут использованы дополнительные переменные управления.

2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

В этом разделе приведем некоторые факты из теории принципа максимума для задач быстрого действия с фазовыми ограничениями. Рассмотрим такую задачу в общем виде:

$$\begin{aligned} T \rightarrow \min, \quad \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = A, \quad x(T) = B, \\ u(t) &\in U \quad \text{для п.в. } t \in [0, T], \\ g(x(t)) &\leq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь, $t \in [0, T]$ – время, x – фазовая переменная в \mathbb{R}^n , u – переменная управления в \mathbb{R}^m . Управляющая функция $u(\cdot)$ измерима. Множество U имеет вид

$$U := \{u \in \mathbb{R}^m : \varphi(u) \leq 0\},$$

где φ – заданная вектор-функция. Точки A и B определяют начальную и конечную позиции (краевые условия). Допустимая траектория $x(\cdot)$ является абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяет дифференциальному ограничению $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ для п.в. $t \in [0, T]$, начальному и конечному краевому условию, а также неравенству $g(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, которое задает фазовые ограничения. Число T определяет конечный момент времени движения, оно не фиксировано, но подлежит минимизации.

Отображения

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad \text{и} \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

предполагаются достаточно гладкими (точнее, $f, \varphi \in C^1$, $g \in C^2$).

Пусть $u(\cdot)$ – управление, а $x(\cdot)$ – отвечающая ему траектория на отрезке времени $[0, T]$. Тройка (x, u, T) называется допустимым процессом, если выполнены конечные и фазовые ограничения. Допустимый процесс (x^*, u^*, T^*) называется оптимальным, если конечное время T в (2) принимает наименьшее возможное значение на множестве всех допустимых процессов (так называемый глобальный минимум). Ниже предположим, что в задаче (2) существует по крайней мере один оптимальный процесс (x^*, u^*, T^*) .

Для формулировки принципа максимума Понтрягина потребуются некоторые определения и обозначения. Назовем точку $u \in U$ регулярной, если градиенты $\nabla \varphi^i(u)$, $i \in I(u)$, линейно независимы. Здесь $I(u) := \{i : \varphi^i(u) = 0\}$ – так называемое множество активных индексов (т.е. множество индексов активных ограничений); символ ∇ означает классический градиент скалярной функции.

Пусть задана измеримая функция $u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1. Замыканием по мере функции $u(\cdot)$ в точке τ называется множество векторов $v \in \mathbb{R}^m$ таких, что

$$\ell(\{t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon] : |u(t) - v| \leq \varepsilon\}) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где ℓ – мера Лебега на \mathbb{R} .

Многозначное отображение, ставящее в соответствие точке на прямой замыкание по мере функции в этой точке, обозначим как $\text{Clos } u$. В контексте изучения задач оптимального управления понятие замыкания по мере измеримой функции было предложено в [5]. В [6] элементы множества $\text{Clos } u(\tau)$ называются существенными значениями функции u в точке τ . Некоторые свойства замыкания по мере функции описаны также в [7].

Рассмотрим функцию

$$\Gamma(x, u) := \langle \nabla g(x), f(x, u) \rangle.$$

Сформулируем условие регулярности.

Определение 2. Процесс (x^*, u^*, T^*) называется регулярным относительно фазовых ограничений, если для всех $t \in [0, T^*]$, и всех $u \in \text{Clos } u^*(t)$ таких, что $g(x^*(t)) = \Gamma(x^*(t), u) = 0$, точка u регулярна, и выполнено условие

$$\Gamma_u^*(x^*(t), u) \notin \text{lin}\{\nabla \varphi^i(u), i \in I(u)\}.$$

Здесь Γ_u^* означает классическую частную производную функции Γ по u .

Рассмотрим расширенную функцию Гамильтона–Понтрягина

$$\bar{H}(x, u, \psi, \mu) := \langle \psi, f(x, u) \rangle - \mu \Gamma(x, u),$$

где ψ, μ – переменные из \mathbb{R}^n и \mathbb{R} соответственно.

Теорема 1. *Предположим, что регулярный относительно фазовых ограничений процесс (x^*, u^*, T^*) является оптимальным в задаче (2). Тогда существуют множители Лагранжа: число $\lambda \in [0, 1]$, абсолютно непрерывная векторная функция $\psi \in \mathbb{W}_{1,\infty}([0, T^*]; \mathbb{R}^n)$, и непрерывная скалярная функция $\mu \in \mathbb{C}([0, T^*]; \mathbb{R})$ такие, что*

$$\begin{aligned} \lambda + |\psi(t) - \mu(t)\nabla g(x^*(t))| &> 0 \quad \forall t \in [0, T^*]; \\ \psi(t) &= -\bar{H}'_x(x^*(t), u^*(t), \psi(t), \mu(t)) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T^*]; \\ \max_{u \in U} \bar{H}(x^*(t), u, \psi(t), \mu(t)) &= \bar{H}(x^*(t), u^*(t), \psi(t), \mu(t)) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T^*], \\ \max_{u \in U} \bar{H}(x^*(T^*), u, \psi(T^*), \mu(T^*)) &= \lambda. \end{aligned}$$

Кроме того, функция $\mu(\cdot)$ не убывает, и

$$\int_0^{T^*} g(x^*(t)) d\mu(t) = 0.$$

Теорема 1 была получена в [7] при некоторых дополнительных предположениях гладкости, а в [8] и [9] была доказана в полной общности. Краткая версия доказательства приведена в разд. 6. Отметим также, что теорема 1 является уточнением соответствующего результата из [2, гл. 6]. Уточнение касается непрерывности меры-множителя $\mu(\cdot)$.

Приведем несколько замечаний, которые будут использованы далее.

Замечание 1. Из условий принципа максимума вытекает известный закон сохранения вдоль экстремали (см. [2], [10])

$$\max_{u \in U} \bar{H}(x^*(t), u, \psi(t), \mu(t)) = \lambda \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Замечание 2. Из условий принципа максимума следует, что $\mu(\cdot)$ постоянна на любом отрезке времени $[a, b]$, на котором оптимальная траектория лежит во внутренности фазовых ограничений, т.е. когда $g(x^*(t)) < 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

Замечание 3. Ввиду правила множителей Лагранжа, условие максимума влечет

$$\bar{H}'_u(x^*(t), u^*(t), \psi(t), \mu(t)) \in N_U(u^*(t)) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T^*],$$

где N_U означает предельный нормальный конус ко множеству (см. [11]). Предполагая, что все точки множества U регулярны, можно утверждать существование дополнительного множителя Лагранжа – векторной функции $\xi : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^r$ с неотрицательными компонентами такой, что $\langle \xi(t), \varphi(u^*(t)) \rangle = 0$,

$$\bar{H}'_u(x^*(t), u^*(t), \psi(t), \mu(t)) = \xi(t)\varphi'(u^*(t)) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T^*].$$

Замечание 4. Пусть набор множителей (λ, ψ, μ) удовлетворяет принципу максимума, и $a \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Тогда набор множителей

$$(\lambda, \psi(t) + a\nabla g(x^*(t)), \mu(t) + a)$$

снова удовлетворяет всем условиям принципа максимума (см. [2], [12]). Поэтому можно считать, что $\mu(T^*) = 0$ и тогда $\mu(t) \geq 0$, или, что эквивалентно, $\mu(0) = 0$ и тогда $\mu(t) \leq 0$.

Принцип максимума из теоремы 1 предоставляет так называемую полную систему уравнений для нахождения оптимального процесса, в которой количество уравнений формально равно количеству неизвестных. Действительно, в условиях регулярности на границе фазового ограничения замечание 3 позволяет выразить μ через другие экстремальные значения. Вне границы фазового ограничения μ постоянна, согласно замечанию 2. Поэтому, используя свойство непрерывности, меру-множитель μ можно выразить через x^*, ψ, u^* . Если одновременно с этим с помощью условия максимума получается выразить и экстремальное управление, то условия

принципа максимума сводятся к решению соответствующей краевой задачи, которая может быть решена стандартными методами. Опираясь на эти соображения, можно предложить алгоритм вычисления экстремалей. Такой алгоритм будет описан ниже в вычислительной части работы (разд. 5) и применен для нахождения приближенного решения задачи о наивысшем обходе препятствия мобильным роботом (1).

Отметим, что условие регулярности, сформулированное в определении 2, нельзя назвать удобным для предварительного анализа задачи, поскольку оно оперирует с заданным оптимальным процессом, который, вообще говоря, заранее неизвестен (его нам и следует вычислить). В связи с этим представляется более практичным иметь некоторое априорное условие регулярности в терминах функций f , φ и g , которое бы гарантировало регулярность любого допустимого процесса, а значит, и заведомую применимость метода, основанного на теореме 1. Такое априорное условие регулярности несложно привести.

Условие Р). Для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$ таких, что $g(x) = \Gamma(x, u) = 0$, имеет место, что точка u регулярна, и

$$\Gamma'_u(x, u) \notin \text{lin}\{\nabla\varphi^i(u), i \in I(u)\}.$$

Это априорное условие легко проверить для конкретной задачи. В контексте задач быстрого действия, его естественно дополнить следующим замечанием.

Замечание 5. Пусть $0 \in \text{int } f(x, U) \forall x$. Тогда условие Р) достаточно проверять на множестве

$$\{x \in \mathbb{R}^n, u \in U : g(x) = \Gamma(x, u) = 0, f(x, u) \neq 0\}.$$

Это следует из леммы 1 в разд. 6. Тогда условие Р) гарантирует регулярность любого оптимального процесса задачи. Это модифицированное условие Р) используется ниже при анализе движения мобильного робота.

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Любой допустимый процесс задачи (1) нерегулярен относительно фазовых ограничений, как только траектория касается границы допустимой области. Действительно, в любой точке границы области имеем $x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha = 0$, и, значит, градиент функции $\Gamma(x, p, u) = -2p(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)$ по (p, u) равен нулю. Поэтому теорему 1 не удастся применить для численного решения поставленной задачи, как это было сделано, например, в [9]. Однако предлагается рассмотреть некоторое возмущение исходной задачи такое, что в возмущенной задаче выполняется условие Р). Теорему 1 будем применять к возмущенной задаче.

Итак, зафиксируем малое число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -задачу

$$\begin{aligned} J(p, u, v, w, T) := T \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 &= p \cos \alpha + \varepsilon w_1 + \varepsilon v_1, \quad \dot{x}_2 = p \sin \alpha + \varepsilon w_2 + \varepsilon v_2, \\ \dot{\alpha} &= u, \quad x(0) = A, \quad x(T) = B, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \\ p^2 + w_1^2 + w_2^2 &\leq 1, \quad u^2 + v_1^2 + v_2^2 \leq 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ и $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ – дополнительные переменные управления, отвечающие за регуляризацию задачи. Ясно, что задача (3) является релаксацией задачи (1), так как любой допустимый процесс задачи (1) будет допустимым и в задаче (3), если положить $v = w = 0$. Кроме того, решение в задаче (3) существует. Обозначим ее решение (какое-либо) через $\varphi_\varepsilon := (x_\varepsilon, \alpha_\varepsilon, p_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon, T_\varepsilon)$.

Покажем, что ε -задача регулярна. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Любое решение φ_ε задачи (3) является регулярным относительно фазовых ограничений.

Доказательство. Имеем

$$\Gamma(x, \alpha, p, u, v, w) = -2x_1(p \cos \alpha + \varepsilon w_1 + \varepsilon v_1) - 2x_2(p \sin \alpha + \varepsilon w_2 + \varepsilon v_2).$$

В силу замечания 5 условие регулярности будет заведомо выполнено для любого оптимального процесса, если на множестве

$$x, \alpha, p, u, v, w : x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad \Gamma(x, \alpha, p, u, v, w) = 0, \quad f(x, \alpha, p, u, v, w) \neq 0$$

градиент функции Γ по (p, u, v, w) и градиенты активных ограничений на управление линейно независимы, т.е. линейно независима следующая система из трех векторов (множитель 2 сокращен):

$$a_1 := \begin{bmatrix} -x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ 0 \\ -\varepsilon x_1 \\ -\varepsilon x_2 \\ -\varepsilon x_1 \\ -\varepsilon x_2 \end{bmatrix}, \quad a_2 := \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad a_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь функция f – правая часть динамической системы в (3), т.е.

$$f := \begin{bmatrix} p \cos \alpha + \varepsilon w_1 + \varepsilon v_1 \\ p \sin \alpha + \varepsilon w_2 + \varepsilon v_2 \\ u \end{bmatrix}.$$

Векторы a_1, a_2, a_3 , очевидно, попарно линейно независимы при активных ограничениях на управление, так как $|x| = 1$. Поэтому, как легко видеть, если три вектора линейно зависимы, то первый вектор (с точностью до знака) является линейной комбинацией двух других: $a_1 = \alpha a_2 + \beta a_3$, причем $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Тем самым $u = 0$, и

$$\begin{aligned} -x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha &= \alpha p, \\ -\varepsilon x_1 &= \beta v_1, \quad -\varepsilon x_2 = \beta v_2, \\ -\varepsilon x_1 &= \alpha w_1, \quad -\varepsilon x_2 = \alpha w_2. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя полученное в выражения для Γ , имеем

$$\Gamma(x, \alpha, p, u, v, w)/2 = \alpha(p^2 + |w|^2) + \beta|v|^2 = \alpha + \beta = 0.$$

Таким образом, поскольку рассматривается случай, когда ограничения на управление активны, $\alpha = -\beta$. Учитывая, что $|x| = 1$, имеем $|v| = 1 \Rightarrow |\alpha| = |\beta| = \varepsilon \Rightarrow |w| = 1 \Rightarrow p = 0$. Следовательно, получили $p = u = 0$ и $w = -v \Rightarrow f = 0$. Это означает, что условие P) выполнено с учетом замечания 5. Тем самым установлено, что ε -задача регулярна. Предложение 1 доказано.

Несложно проверяется, что решения ε -задачи аппроксимируют решение задачи (1), а именно, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любой числовой последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ существует решение x^*, α^*, T^* задачи (1) и подпоследовательность ε_{k_i} такие, что $x_{\varepsilon_{k_i}} \rightrightarrows x^*, \alpha_{\varepsilon_{k_i}} \rightrightarrows \alpha^*,$ и $T_{\varepsilon_{k_i}} \rightarrow T^*$. Если решение задачи (1) единственно, то $\varepsilon_{k_i} = \varepsilon_k$.*

Утверждение является простым следствием слабой секвенциальной компактности шара в гильбертовом пространстве и того, что ε -задача является релаксацией линейно-выпуклой задачи (1).

Таким образом, установлено, что если требуется найти численно хотя бы одно (какое-либо) решение задачи (1), то при малом $\varepsilon > 0$ таким решением может быть решение ε -задачи (3), которое, в свою очередь, можно найти приближенно с помощью решения условий принципа максимума Понтрягина.

Перейдем к условиям принципа максимума для задачи (3). Фазовое ограничение $|x|^2 \leq 1$ заменим на эквивалентное ему $|x|^2/2 \leq 1/2$, что, очевидно, не отразится на свойстве регулярности ε -задачи. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, \alpha, p, u, v, w, \psi, \mu) &:= \psi_1(p \cos \alpha + \varepsilon w_1 + \varepsilon v_1) + \psi_2(p \sin \alpha + \varepsilon w_2 + \varepsilon v_2) + \psi_3 u - \\ &- \mu \Gamma(x, \alpha, p, u, v, w) = (\psi_1 + \mu x_1)(p \cos \alpha + \varepsilon w_1 + \varepsilon v_1) + (\psi_2 + \mu x_2)(p \sin \alpha + \varepsilon w_2 + \varepsilon v_2) + \psi_3 u, \end{aligned}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathbb{R}^3, \mu \in \mathbb{R}$ – сопряженные переменные.

Согласно принципу максимума существуют (зависящие от ε) число $\lambda \geq 0$, абсолютно непрерывная вектор-функция $\psi(t)$ и непрерывная убывающая скалярная функция $\mu(t)$ такие, что

$$\lambda + |\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)| + |\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)| + |\psi_3(t)| > 0 \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon]. \quad (4)$$

Уравнение для сопряженной переменной принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= -\mu(t)(p_\varepsilon(t) \cos \alpha_\varepsilon(t) + \varepsilon w_{\varepsilon 1}(t) + \varepsilon v_{\varepsilon 1}(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\mu(t)(p_\varepsilon(t) \sin \alpha_\varepsilon(t) + \varepsilon w_{\varepsilon 2}(t) + \varepsilon v_{\varepsilon 2}(t)), \\ \dot{\psi}_3(t) &= p_\varepsilon(t) \sin \alpha_\varepsilon(t)(\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)) - p_\varepsilon(t) \cos \alpha_\varepsilon(t)(\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)), \end{aligned} \quad (5)$$

причем $\psi_3(T_\varepsilon) = 0$.

Условие максимума распадается на два независимых условия

$$\begin{aligned} \max_{p^2 + |w|^2 \leq 1} ((\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t))(p \cos \alpha_\varepsilon(t) + \varepsilon w_1) + (\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t))(p \sin \alpha_\varepsilon(t) + \varepsilon w_2)) = \\ = (\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t))(p_\varepsilon(t) \cos \alpha_\varepsilon(t) + \varepsilon w_{\varepsilon 1}(t)) + (\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t))(p_\varepsilon(t) \sin \alpha_\varepsilon(t) + \varepsilon w_{\varepsilon 2}(t)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \max_{u^2 + |v|^2 \leq 1} ((\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t))\varepsilon v_1 + (\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t))\varepsilon v_2 + \psi_3(t)u) = \\ = (\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t))\varepsilon v_{\varepsilon 1}(t) + (\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t))\varepsilon v_{\varepsilon 2}(t) + \psi_3(t)u_\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (7)$$

для п.в. $t \in [0, T_\varepsilon]$.

Закон сохранения и условие трансверсальности по времени дают

$$\max_{p^2 + |w|^2 \leq 1, u^2 + |v|^2 \leq 1} \bar{H}(x_\varepsilon(t), \alpha_\varepsilon(t), p, u, v, w, \psi(t), \mu(t)) = \lambda \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon]. \quad (8)$$

Кроме того, функция $\mu(t)$ постоянна на тех отрезках времени, где оптимальная траектория целиком лежит внутри фазового ограничения $|x_\varepsilon(t)| > 1$. Также, не ограничивая общности, согласно замечанию 4 можно полагать, что $\mu(T_\varepsilon) = 0$. Таким образом, $\mu(t) \geq 0$.

Утверждение 1. *Имеет место более сильное, чем (4), условие нетривиальности*

$$|\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)| + |\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)| + |\psi_3(t)| > 0 \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon]. \quad (9)$$

Действительно, если (9) нарушается, то из (8) имеем $\lambda = 0$, а следовательно, нарушается и (4).

Таким образом, множитель λ далее не играет существенной роли, поскольку в выражениях ниже он не участвует, и можно считать после нормировки, что

$$(\psi_1(T_\varepsilon))^2 + (\psi_2(T_\varepsilon))^2 = 1.$$

Теперь найдем выражения для вычисления управлений p_ε , u_ε , v_ε , w_ε и меры-множителя Лагранжа μ .

Из условия максимума (7) имеем

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\psi_3(t)}{\sqrt{A_\varepsilon}}, \quad v_{\varepsilon 1}(t) = \frac{\varepsilon(\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t))}{\sqrt{A_\varepsilon}}, \quad v_{\varepsilon 2}(t) = \frac{\varepsilon(\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t))}{\sqrt{A_\varepsilon}},$$

где

$$A_\varepsilon := \varepsilon^2(\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t))^2 + \varepsilon^2(\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t))^2 + (\psi_3(t))^2 > 0.$$

Утверждение 2. *Имеет место более сильное, чем условие (9), условие нетривиальности*

$$|\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)| + |\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)| > 0 \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon]. \quad (10)$$

Действительно, вблизи границы области, используя замечание 3, из условия Р) можно вывести оценку

$$|\mu(t)| \leq \text{const}(|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|),$$

где const – некоторая постоянная (зависящая от ε , но не от t). Поэтому, если (10) нарушается в какой-то точке $\tau \in [0, T_\varepsilon]$, то используя неравенство Гронуолла, считая при этом, что $\mu(\tau) = \psi_1(\tau) = \psi_2(\tau) = 0$ (что возможно в силу замечания 4), из сопряженной системы выводим, что $\mu(t) = \psi_1(t) = \psi_2(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon]$. Это однако противоречит (9) при $t = T_\varepsilon$.

Из условия максимума (6) имеем

$$p_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{B_\varepsilon}}((\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)) \cos \alpha_\varepsilon(t) + (\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)) \sin \alpha_\varepsilon(t)),$$

$$w_{\varepsilon 1}(t) = \frac{1}{\sqrt{B_\varepsilon}} \varepsilon(\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)), \quad w_{\varepsilon 2}(t) = \frac{1}{\sqrt{B_\varepsilon}} \varepsilon(\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)),$$

где

$$B_\varepsilon = ((\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)) \cos \alpha_\varepsilon(t) + (\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)) \sin \alpha_\varepsilon(t))^2 + \varepsilon^2(\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t))^2 + \varepsilon^2(\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t))^2 > 0.$$

Вычислим μ . На границе фазового ограничения $\Gamma(x_\varepsilon, \alpha_\varepsilon, p_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon) = 0$, т.е. (зависимость от времени в дальнейшем для сокращения записи опускаем)

$$x_{\varepsilon 1}(p_\varepsilon \cos \alpha_\varepsilon + \varepsilon w_{\varepsilon 1} + \varepsilon v_{\varepsilon 1}) + x_{\varepsilon 2}(p_\varepsilon \sin \alpha_\varepsilon + \varepsilon w_{\varepsilon 2} + \varepsilon v_{\varepsilon 2}) = 0.$$

Подставляя сюда полученные выше выражения для $p_\varepsilon, w_\varepsilon, v_\varepsilon$, получаем

$$\frac{(b\mu + a)b + \varepsilon^2\mu + c}{\sqrt{(b\mu + a)^2 + \varepsilon^2\mu^2 + 2c\mu + d}} = -\frac{\varepsilon^2\mu + c}{\sqrt{\varepsilon^2\mu^2 + 2c\mu + d + \psi_3^2}},$$

где

$$a = \psi_1 \cos \alpha_\varepsilon + \psi_2 \sin \alpha_\varepsilon, \quad b = x_{\varepsilon 1} \cos \alpha_\varepsilon + x_{\varepsilon 2} \sin \alpha_\varepsilon,$$

$$c = \varepsilon^2(x_{\varepsilon 1}\psi_1 + x_{\varepsilon 2}\psi_2), \quad d = \varepsilon^2(\psi_1^2 + \psi_2^2).$$

Возводим в квадрат и получаем уравнение 4-й степени на μ :

$$r_4\mu^4 + r_3\mu^3 + r_2\mu^2 + r_1\mu + r_0 = 0,$$

где

$$r_4 = b^4\varepsilon^2 + b^2\varepsilon^4, \quad r_3 = 2b^2(b^2c + ab\varepsilon^2 + 2c\varepsilon^2),$$

$$r_2 = a^2\varepsilon^2(b^2 - \varepsilon^2) + 2abc(2b^2 + \varepsilon^2) + b^2(3c^2 + b^2d + 2d\varepsilon^2) + (b^2 + \varepsilon^2)^2\psi_3^2,$$

$$r_1 = 2[b^2cd + a^2c(b^2 - \varepsilon^2) + ab(c^2 + d(b^2 + \varepsilon^2)) + (ab + c)(b^2 + \varepsilon^2)\psi_3^2],$$

$$r_0 = a(-ac^2 + ab^2d + 2bcd) + (ab + c)^2\psi_3^2.$$

Решая его, после исключения приобретенных корней, получаем формулу

$$\mu = -\frac{r_3}{4r_4} \pm \frac{C_7}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2C_5 - C_6 - \frac{4r_2r_3/r_4^2 - r_3^3/r_4^3 - 8r_1/r_4}{4C_7}}, \tag{11}$$

где

$$C_7 := \sqrt{C_5 + C_6}, \quad C_6 := C_4 + \frac{1}{32^{1/3}r_4}C_3, \quad C_5 := \frac{r_3^2}{4r_4^2} - \frac{2r_2}{3r_4}, \quad C_4 := \frac{2^{1/3}C_1}{3r_4C_3},$$

$$C_3 := (C_2 + \sqrt{-4C_1^3 + C_2^2})^{1/3}, \quad C_2 := 2r_2^3 - 9r_1r_2r_3 + 27r_0r_3^2 + 27r_1^2r_4 - 72r_0r_2r_4,$$

$$C_1 := r_2^2 - 3r_1r_3 + 12r_0r_4.$$

Формула (11) используется для расчета $\mu(t)$ только на границе фазового ограничения, т.е. на тех участках траектории робота, где $x_{\varepsilon 1}^2(t) + x_{\varepsilon 2}^2(t) = 1$. Вне границы μ не изменяется со временем. Кроме того, μ непрерывна, что позволяет найти точки стыка (т.е. точки, в которых экстремаль выходит на границу или сходит с нее). Полученное значение для μ подставляется в выражения для $p_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon$ и в сопряженное уравнение. Таким образом, условия принципа максимума сводятся к решению соответствующей краевой задачи.

Итак, построена регулярная аппроксимация исходной задачи (1) и приведены нужные формулы для сведения к краевой задаче. При этом возмущенная задача (3), как и исходная, также является задачей быстрогодействия, что мы специально отмечаем. В общем случае, т.е. для задачи

управления (2), регуляризация быстродействия быстродействием представляется нетривиальной задачей. По всей видимости, такой тип регуляризации осуществим лишь при некоторых дополнительных предположениях. Тем не менее, если пренебречь свойством быстродействия аппроксимирующей задачи и, тем самым, возмущать помимо динамики еще и минимизирующий функционал, то оказывается возможным предложить достаточно общую схему регуляризации задачи управления. Более того, можно добиться даже более сильного условия регулярности относительно фазового ограничения. Такую общую схему регуляризации обсуждаем в следующем разделе.

4. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Обратимся к регуляризации общей задачи быстродействия с фазовыми ограничениями. Существует множество различных подходов к регуляризации. Ниже мы рассмотрим лишь один из таких подходов.

Рассмотрим возмущенную задачу

$$\begin{aligned} J(u, v, T) := T + \int_0^T |v|^2 dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = f(x, u) + \varepsilon v, \\ x(0) = A, \quad x(T) = B, \quad \varphi(u) \leq 0, \quad g(x) \leq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $v = (v_1, \dots, v_n)$ – дополнительное n -мерное управление.

Напомним, что фазовое ограничение называется регулярным, если $\nabla g(x) \neq 0 \quad \forall x : g(x) = 0$. Ограничения на управление $\varphi(u) \leq 0$ регулярны, если регулярны все точки множества U . Эти предположения (которые естественны для ряда прикладных задач) ниже считаются а priori выполненными. В этих предположениях проверим для данных задачи (12) выполнение условия регулярности в смысле определения 2.

Для задачи (12) имеем

$$\Gamma(x, u, v) = \langle \nabla g(x), f(x, u) \rangle + \varepsilon \langle \nabla g(x), v \rangle.$$

Градиент Γ и градиенты активных ограничений на управление по (u, v) равны:

$$(\nabla g(x) f'_u(x, u), \varepsilon \nabla g(x)), \quad (\nabla \varphi^i(u), 0), \quad i \in I(u).$$

Значит, в силу регулярности фазовых ограничений и регулярности ограничений на управление в задаче (12) любой допустимый процесс регулярен относительно фазовых ограничений. Более того, как видно, выполняется даже более сильное условие регулярности, чем сформулированное в определении 2 (см., например, [7, определение 3.5]). Таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть фазовые ограничения регулярны, и регулярны все точки $u \in U$. Тогда любой допустимый процесс задачи (12) регулярен относительно фазовых ограничений.

Исследуем вопрос о существовании решения в возмущенной задаче. Заметим, что никаких геометрических ограничений на управление v не имеется, и, следовательно, исходя из вида функционала, можно считать, что управление v ограничено лишь по норме $\|\cdot\|_{L_2}$. Однако при известных предположениях можно гарантировать, что решение задачи (12) принадлежит пространству $\mathbb{W}_{1,2}([0, T])$.

Теорема 2. Предположим, что

- (а) множество U компактно;
- (б) множество $f(x, U)$ выпукло при всех x ;
- (в) имеет место оценка $|f(x, u)| \leq \text{const}(1 + |x|) \quad \forall u \in U$;
- (г) в исходной задаче (2) существует допустимый процесс.

Тогда существует решение $(x_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon, T_\varepsilon)$ задачи (12) в классе траекторий $x \in \mathbb{W}_{1,2}([0, T])$ и управлений $u \in \mathbb{L}_\infty([0, T])$, $v \in \mathbb{L}_2([0, T])$ такое, что $x_\varepsilon \rightrightarrows x_0$, $\|v_\varepsilon\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где x_0 – одно из решений исходной задачи (2).

Доказательство. Прежде всего отметим существование решения в исходной задаче (2). Действительно, в силу сделанных предположений (a)–(d) это следует из теоремы Филиппова (см. [1]). Обозначим это решение через (x^*, u^*, T^*) .

Возьмем натуральное число N и рассмотрим ε, N -задачу, которая получается из задачи (12) путем добавления одного ограничения на управления: $|v| \leq N$. Процесс $(x^*, u^*, 0, T^*)$ является допустимым в ε, N -задаче, и, значит, в силу той же теоремы у нее существует решение, которое мы обозначим через $(x_{\varepsilon, N}, u_{\varepsilon, N}, v_{\varepsilon, N}, T_{\varepsilon, N})$. Устремим $N \rightarrow \infty$ и найдем искомым процесс $(x_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon, T_\varepsilon)$.

Имеем

$$T_{\varepsilon, N} + \|v_{\varepsilon, N}\|_{L_2}^2 = J(x_{\varepsilon, N}, u_{\varepsilon, N}, v_{\varepsilon, N}, T_{\varepsilon, N}) \leq J(x^*, u^*, 0, T^*) = T^*. \tag{13}$$

Отсюда, поскольку $T_{\varepsilon, N} > 0$, выводим, что последовательность $\{T_{\varepsilon, N}\}$ ограничена. Переходя к подпоследовательности, $T_{\varepsilon, N} \rightarrow T_\varepsilon$ при $N \rightarrow \infty$. Аналогично, переходя к подпоследовательности, $v_{\varepsilon, N} \xrightarrow{w} v_\varepsilon$ слабо в $\mathbb{L}_2([0, T_\varepsilon])$.

Из условия (c) и из (13) с помощью стандартных оценок, включающих неравенство Гронуола, получаем, что последовательность функций $x_{\varepsilon, N}$ ограничена в равномерной метрике $\|x_{\varepsilon, N}\|_C \leq \text{const}$. Поэтому семейство функций

$$y_{\varepsilon, N}(t) := A + \int_0^t f(x_{\varepsilon, N}(s), u_{\varepsilon, N}(s)) ds$$

равномерно ограничено и равномерно непрерывно. Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $y_{\varepsilon, N} \rightrightarrows y_\varepsilon$ равномерно на $[0, T_\varepsilon]$. При этом $\dot{y}_{\varepsilon, N} \xrightarrow{w} \dot{y}_\varepsilon$ слабо в L_2 . Семейство функций

$$z_{\varepsilon, N}(t) := \int_0^t v_{\varepsilon, N}(s) ds$$

также равномерно ограничено и равномерно непрерывно. Это очевидно следует из оценки (13), так как по неравенству Коши–Буняковского

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} v_{\varepsilon, N}^j(t) dt \right| \leq \sqrt{|t_1 - t_2|} \|v_{\varepsilon, N}^j\|_{L_2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поэтому, переходя к подпоследовательности, $z_{\varepsilon, N} \rightrightarrows z_\varepsilon$, и, значит, имеем $x_{\varepsilon, N} \rightrightarrows x_\varepsilon := y_\varepsilon + z_\varepsilon$. Из условий (a), (b) в силу равномерной сходимости $x_{\varepsilon, N}$ из леммы Мазура следует, что $\dot{y}_\varepsilon(t) \in f(x_\varepsilon(t), U)$ для п.в. t . По лемме об измеримом селекторе существует управление $u_\varepsilon : [0, T_\varepsilon] \rightarrow U$ такое, что $\dot{y}_\varepsilon(t) = f(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))$ для п.в. t . Таким образом,

$$x_\varepsilon(t) = A + \int_0^t f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_0^t v_\varepsilon(s) ds,$$

и x_ε удовлетворяет фазовым и граничным условиям. Значит, $(x_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon, T_\varepsilon)$ – допустимый процесс в задаче (12). Из оценки (13) в силу слабой полунепрерывности снизу функционала J имеем

$$T_\varepsilon + \|v_\varepsilon\|_{L_2}^2 \leq T^*.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассуждая таким же образом, переходя к подпоследовательности, $T_\varepsilon \rightarrow T_0$, $x_\varepsilon \rightrightarrows x_0 \in \mathbb{W}_{1,2}([0, T_0])$, $v_\varepsilon \xrightarrow{w} v_0 \in \mathbb{L}_2([0, T_0])$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогично, найдется управление u_0 такое, что процесс (x_0, u_0, T_0) является допустимым в задаче (2). Однако

$$T_0 + \|v_0\|_{L_2}^2 \leq T^* \Rightarrow T_0 = T^*, \quad v_0 = 0,$$

и $v_\varepsilon \rightarrow 0$ сильно в силу оптимальности. Следовательно, процесс (x_0, u_0, T_0) также является решением задачи (2). Теорема 2 доказана.

В классе траекторий из $\mathbb{W}_{1,2}([0, T])$ также справедлив принцип максимума. Его несложно вывести по аналогии с доказательством теоремы 2, применив к ε, N -задаче принцип максимума для траекторий класса $\mathbb{W}_{1,\infty}([0, T])$ и перейдя в полученных условиях к пределу при $N \rightarrow \infty$. Для простоты изложения предположим, что $g(A) + g(B) < 0$, т.е. что концы траектории лежат строго во внутренности фазового ограничения. С одной стороны, такое предположение позволяет избежать в пределе эффекта вырождающегося принципа максимума (см. [4], [12]) — случая, который требует отдельного рассмотрения. С другой стороны, оно не является существенным для задачи об обходе препятствия мобильным роботом. Тогда, переходя стандартным образом к пределу при $N \rightarrow \infty$ в условиях принципа максимума, можно утверждать существование нетривиального набора множителей Лагранжа $(\lambda_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$, удовлетворяющего сопряженной системе, условию максимума и условию трансверсальности по времени. (Условие максимума выводится с помощью интегральной формы и слабой сходимости.) Условие нетривиальности

$$\lambda_\varepsilon + |\psi_\varepsilon(t) - \mu_\varepsilon(t)\nabla g(x_\varepsilon(t))| > 0 \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon] \quad (14)$$

выводится с помощью условия регулярности, которое выполняется в ε -задаче, и рассуждений, полностью аналогичных приведенным в [13] при доказательстве теоремы 3.1 (отличие заключается лишь в использовании расширенной версии неравенства Гронуолла, см., например, упражнение 3.4 в [14]).

Рассмотрим ε -условие максимума по v . Имеем

$$v_\varepsilon(t) \in \operatorname{argmax}_{v \in \mathbb{R}^n} (\varepsilon < v, \psi_\varepsilon(t) - \mu_\varepsilon(t)\nabla g(x_\varepsilon(t)) > -\lambda_\varepsilon |v|^2).$$

Отсюда ввиду (14) получаем, что $\lambda_\varepsilon > 0$, следовательно,

$$v_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2\lambda_\varepsilon} (\psi_\varepsilon(t) - \mu_\varepsilon(t)\nabla g(x_\varepsilon(t))). \quad (15)$$

Таким образом, показано, что функция v_ε ограничена, и, значит, поскольку выполнены условия регулярности, можно применить теорему 1. Поэтому функция μ_ε непрерывна, и, следовательно, v_ε также непрерывна. Отметим, что сопряженная система задачи (12) отличается от исходной сопряженной системы задачи (2) наличием малого регуляризирующего члена $\varepsilon \mu_\varepsilon(t) g''(x_\varepsilon(t)) v_\varepsilon(t)$. Здесь функция v_ε определяется выражением (15). При каждом $\varepsilon > 0$ эта функция ограничена и даже, как было отмечено, непрерывна. Однако неограниченные значения не исключаются при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заметим, что, добавив в функционал J малый член $\varepsilon \|u\|_{L_2}$, наряду с регулярностью относительно фазовых ограничений, можно добиться и выполнения усиленного условия Лежандра. Тогда можно утверждать (см. [7]), что множитель μ_ε является даже липшицевой функцией (однако с константой Липшица, зависящей от ε).

Теперь применим описанную выше схему возмущения к задаче о движении мобильного робота (1). При этом понятно, что задача (12) представляет собой некоторую общую схему возмущения относительно фазового ограничения, но не учитывает возможных особых режимов. Однако, очевидно, что не все время в пути робот будет разворачиваться с максимальной по модулю угловой скоростью, и поэтому анализ особого режима по угловой скорости является критически важным для модели (1). Проблему особых режимов можно решить (по аналогии с разд. 3) с помощью дополнительной регуляризации задачи и введения дополнительных переменных управления. Другим подходом может служить возмущение минимизируемого функционала с помощью малой интегральной добавки. Ниже рассмотрим именно второй подход как альтернативу первому подходу, рассмотренному в разд. 3.

Рассмотрим возмущенную задачу

$$J(p, u, v, T) := T + \varepsilon \int_0^T |p|^2 dt + \varepsilon \int_0^T |u|^2 dt + \int_0^T |v|^2 dt \rightarrow \min, \quad (16a)$$

$$\dot{x}_1 = p \cos \alpha + \varepsilon v_1, \quad \dot{x}_2 = p \sin \alpha + \varepsilon v_2, \quad \dot{\alpha} = u, \quad (16b)$$

$$x(0) = A, \quad x(T) = B, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad (16c)$$

$$p \in [-1, 1], \quad u \in [-1, 1], \tag{16d}$$

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \geq \frac{1}{2}. \tag{16e}$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$ – дополнительная двумерная переменная управления. (Поясним, что рассмотрение переменной v_3 излишне, поскольку градиент фазового ограничения по α тождественно равен нулю.)

Имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \alpha, p, u, v) &= -x_1(p \cos \alpha + \varepsilon v_1) - x_2(p \sin \alpha + \varepsilon v_2), \\ \bar{H}(x, \alpha, p, u, v, \psi, \mu, \lambda) &= (\psi_1 + \mu x_1)(p \cos \alpha + \varepsilon v_1) + (\psi_2 + \mu x_2)(p \sin \alpha + \varepsilon v_2) + \\ &+ \psi_3 u - \varepsilon \lambda |p|^2 - \varepsilon \lambda |u|^2 - \lambda |v|^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим зависящие от параметра ε число $\lambda > 0$ (случай $\lambda = 0$, как несложно проверить, исключен), абсолютно непрерывную вектор-функцию $\psi(t)$ и непрерывную и убывающую скалярную функцию $\mu(t)$, которые удовлетворяют принципу максимума. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= -\mu(t)(p_\varepsilon(t) \cos \alpha_\varepsilon(t) + \varepsilon v_{\varepsilon 1}(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\mu(t)(p_\varepsilon(t) \sin \alpha_\varepsilon(t) + \varepsilon v_{\varepsilon 2}(t)), \\ \dot{\psi}_3(t) &= p_\varepsilon(t) [\sin \alpha_\varepsilon(t)(\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)) - \cos \alpha_\varepsilon(t)(\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t))], \end{aligned} \tag{17}$$

а также

$$\psi_3(T_\varepsilon) = 0. \tag{18}$$

Анализ условия максимума по переменным v_1, v_2 дает

$$v_{\varepsilon 1}(t) = \frac{\varepsilon}{2\lambda}(\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)), \quad v_{\varepsilon 2}(t) = \frac{\varepsilon}{2\lambda}(\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)). \tag{19}$$

Условие максимума по переменной p влечет

$$p_\varepsilon(t) = \operatorname{sgn} a_\varepsilon(t) \min \left\{ \frac{|a_\varepsilon(t)|}{2\varepsilon\lambda}, 1 \right\}, \tag{20}$$

где

$$a_\varepsilon(t) = (\psi_1(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 1}(t)) \cos \alpha_\varepsilon(t) + (\psi_2(t) + \mu(t)x_{\varepsilon 2}(t)) \sin \alpha_\varepsilon(t). \tag{21}$$

Из условия максимума по переменной u следует, что

$$u_\varepsilon(t) = \operatorname{sgn} \psi_3(t) \min \left\{ \frac{|\psi_3(t)|}{2\varepsilon\lambda}, 1 \right\}. \tag{22}$$

Заметим, что $|\psi_1(T_\varepsilon)| + |\psi_2(T_\varepsilon)| > 0$. Действительно, иначе, учитывая, что $\mu(T_\varepsilon) = 0$ и $\psi_3(T_\varepsilon) = 0$ ввиду условия трансверсальности по времени получаем $\lambda = 0$. Таким образом, после нормировки можно считать, что

$$(\psi_1(T_\varepsilon))^2 + (\psi_2(T_\varepsilon))^2 = 1. \tag{23}$$

Найдем формулы для множителей λ и μ . Используя условие трансверсальности по времени, учитывая, что $\mu(T_\varepsilon) = 0$, $\psi_3(T_\varepsilon) = 0$ и (23), решая соответствующее квадратное уравнение и отбрасывая лишние корни, приходим к следующим выражениям для λ :

Случай 1. Пусть $a_\varepsilon(T_\varepsilon) \leq -\varepsilon^2/\sqrt{1-\varepsilon}$. Тогда

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{-a_\varepsilon(T_\varepsilon) + \sqrt{a_\varepsilon^2(T_\varepsilon) + \varepsilon^2(\varepsilon + 1)}}{2(\varepsilon + 1)}. \tag{24}$$

Случай 2. Пусть $a_\varepsilon(T_\varepsilon) \in (-\varepsilon^2/\sqrt{1-\varepsilon}, \varepsilon^2/\sqrt{1-\varepsilon})$. Тогда

$$\lambda = \lambda_2 = \sqrt{\frac{a_\varepsilon^2(T_\varepsilon) + \varepsilon^3}{4\varepsilon}}. \tag{25}$$

Случай 3. Пусть $a_\varepsilon(T_\varepsilon) \geq \varepsilon^2/\sqrt{1-\varepsilon}$. Тогда

$$\lambda = \lambda_3 = \frac{a_\varepsilon(T_\varepsilon) + \sqrt{a_\varepsilon^2(T_\varepsilon) + \varepsilon^2(\varepsilon + 1)}}{2(\varepsilon + 1)}. \quad (26)$$

На границе фазового ограничения имеем

$$\Gamma(x_\varepsilon, \alpha_\varepsilon, p_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon) = 0,$$

т.е.

$$x_{\varepsilon 1}(p_\varepsilon \cos \alpha_\varepsilon + \varepsilon v_{\varepsilon 1}) + x_{\varepsilon 2}(p_\varepsilon \sin \alpha_\varepsilon + \varepsilon v_{\varepsilon 2}) = 0.$$

(Зависимость от времени в дальнейшем для удобства записи опущена.) Подставляя в это равенство полученные выше выражения для p_ε и v_ε , при $a_\varepsilon \leq -2\varepsilon\lambda$, $a_\varepsilon \in (-2\varepsilon\lambda, 2\varepsilon\lambda)$ и $a_\varepsilon \geq 2\varepsilon\lambda$ получаем следующие выражения для вычисления μ :

Случай А. Пусть $a_\varepsilon(t) \leq -2\varepsilon\lambda$. Тогда

$$\mu = \frac{2\lambda}{\varepsilon^2}(x_{\varepsilon 1} \cos \alpha_\varepsilon + x_{\varepsilon 2} \sin \alpha_\varepsilon) - (\psi_1 x_{\varepsilon 1} + \psi_2 x_{\varepsilon 2}). \quad (27)$$

Случай Б. Пусть $a_\varepsilon(t) \in (-2\varepsilon\lambda, 2\varepsilon\lambda)$. Тогда

$$\mu = -\frac{(\psi_1 \cos \alpha_\varepsilon + \psi_2 \sin \alpha_\varepsilon)(x_{\varepsilon 1} \cos \alpha_\varepsilon + x_{\varepsilon 2} \sin \alpha_\varepsilon) + \varepsilon^3(\psi_1 x_{\varepsilon 1} + \psi_2 x_{\varepsilon 2})}{(x_{\varepsilon 1} \cos \alpha_\varepsilon + x_{\varepsilon 2} \sin \alpha_\varepsilon)^2 + \varepsilon^3}. \quad (28)$$

Случай В. Пусть $a_\varepsilon(t) \geq 2\varepsilon\lambda$. Тогда

$$\mu = -\frac{2\lambda}{\varepsilon^2}(x_{\varepsilon 1} \cos \alpha_\varepsilon + x_{\varepsilon 2} \sin \alpha_\varepsilon) - (\psi_1 x_{\varepsilon 1} + \psi_2 x_{\varepsilon 2}). \quad (29)$$

Заметим, что каждого λ_1 , λ_2 и λ_3 реализуются свои случаи А, Б и В (итак, всего имеется 9 разных случаев).

Вне границы фазового ограничения μ не изменяется со временем. Кроме того, μ непрерывна, что позволяет найти точки стыка (т.е. точки, в которых экстремаль выходит на границу или сходит с нее). Полученное значение для μ подставляется в выражения для p_ε , v_ε и в сопряженное уравнение. Таким образом, условия принципа максимума сводятся к решению соответствующей краевой задачи.

Теперь, считая выполненным (23), $\mu(T_\varepsilon) = 0$ и $\psi_3(T_\varepsilon) = 0$, получим необходимые оценки сверху на $|\psi|$ и μ в зависимости от ε . Поскольку из формул для λ в общем случае имеем $\lambda = O(\varepsilon^{-1})$, то из формул для v_ε находим

$$\mu(t) \leq \text{const}(\varepsilon^{-2} |v_\varepsilon(t)| + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|).$$

Отсюда, используя сопряженное уравнение (17) и неравенство Гронуолла (напомним, что v_ε непрерывна), стандартными рассуждениями получаем, что

$$|\psi(t)| \leq \|v_\varepsilon\|_{L_2} O(\varepsilon^{-2}) \Rightarrow \mu(0) = \|v_\varepsilon\|_{L_2} O(\varepsilon^{-2}).$$

Поскольку $\|v_\varepsilon\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем $\mu(0) = o(\varepsilon^{-2})$. Однако знанием о скорости сходимости $\|v_\varepsilon\|_{L_2}$ к нулю мы не обладаем. Таким образом, можно гарантировать лишь следующее. Пусть

$$|\psi_1(T_\varepsilon)| + |\psi_2(T_\varepsilon)| = \varepsilon^2.$$

Тогда ψ и μ ограничены на всем отрезке движения одной константой, которая не зависит от ε .

В завершение теоретической части отметим, что радиус окружности, задающей фазовое ограничение, может быть выбран произвольным образом, т.е. не обязательно быть единичным. В таком случае немного меняется формула для μ , где появляется радиус окружности r . Тем не менее, с точки зрения вычислений случай именно единичной окружности интересен тем, что он является пограничным в следующем смысле: ясно, что робот может двигаться одновременно с максимальными угловой и продольной скоростями только по единичной окружности. Если как-ли-

бо изменить радиус, то это уже не так: при $r > 1$ угловая скорость не максимальна, а при $r < 1$ – продольная.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим следующую схему приближенного решения исходной задачи (1). Фиксируем некоторое $\varepsilon \in (0, 1)$ и переходим к возмущенной задаче (16), которая регуляризована. К возмущенной задаче применяем численный метод, предложенный в [9], [15]. Используем решение этой задачи для заданного ε в качестве начального приближения к решению задачи (16) с меньшим значением ε . Решение этой задачи для наименьшего из рассмотренных значений ε считаем приближением к решению исходной задачи (1).

5.1. Алгоритм решения задачи (16)

Принцип максимума для этой задачи сводится к краевой задаче с помощью выражений, приведенных в предыдущем разделе. Краевая задача принципа максимума решается методом стрельбы в обратном времени (т.е. перебор значений параметров, определяющих решение краевой задачи, проводится при $t = T$).

Итак, рассматривается краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16b) и (17) и краевых условий (16c) и (18). При $t = T$ имеем следующие условия на решение: мобильный робот находится в точке B (16c) и третья компонента сопряженной переменной равна нулю (18). Используя (23), считаем, что $\psi_1(T) = \cos(\theta)$ и $\psi_2(T) = \sin(\theta)$, где $\theta \in [0, 2\pi)$. Также положим $\alpha(T) = \beta$, где $\beta \in [0, 2\pi)$. Если значения θ и β заданы, то при $t = T$ заданы все функции, входящие в рассматриваемую систему дифференциальных уравнений. Суть метода стрельбы состоит в том, чтобы численно найти значения параметров θ и β , чтобы решение $(x(t), \psi(t))$ системы дифференциальных уравнений (16b) и (17), удовлетворяющее указанным краевым условиям при $t = T$, также удовлетворяло бы (в заданной точности) краевым условиям при $t = 0$ (значения всех параметров, определяющих точность численного решения задачи, приведены в следующем пункте.). Такая траектория является решением краевой задачи, полученной из принципа максимума Понтрягина, и, следовательно, является экстремалью рассматриваемой задачи оптимального управления.

При заданном наборе значений величин θ и β система уравнений (16b) и (17) численно интегрируется в обратном времени классическим методом Рунге–Кутты четвертого порядка с постоянным шагом. Перед началом интегрирования вычисляется значение λ по формулам (24)–(26). Считая, что исходная точка B не принадлежит границе, полагаем $\mu(t) = 0$, пока траектория не достигнет границы фазового ограничения (16e). При вычислении правых частей дифференциальных уравнений функции управления $p(t)$, $u(t)$, $v_1(t)$ и $v_2(t)$ вычисляются по формулам (20), (22) и (19) соответственно.

Правые части интегрируемых дифференциальных уравнений, вообще говоря, негладкие, ввиду возможных переключений режимов управления $p(t)$ и $u(t)$, т.е. при t , когда выполнено $|a_\varepsilon(t)| = 2\varepsilon\lambda$ (переключение $p(t)$, $a_\varepsilon(t)$ задано выражением (21)) и $|\psi_3(t)| = 2\varepsilon\lambda$ (переключение $u(t)$). В эти моменты времени соответствующее управление становится или перестает быть максимальным (равным 1 по абсолютной величине). Чтобы избежать потерю точности в окрестности таких точек, при расчете правых частей в методе Рунге–Кутты считаем шаг неуспешным, если при его вычислении происходит такое переключение для одного из управлений. В таком случае уменьшаем шаг интегрирования вдвое и повторяем попытку выполнения шага. Уменьшение шага прекращается после семикратного уменьшения начального шага (что отвечает уменьшению начального шага примерно на два порядка), после чего продолжаем интегрирование с начальным шагом по времени с новым режимом по рассмотренному управлению.

Если траектория пересекает границу фазового ограничения (16e), то в точке пересечения вычисляем значение меры-множителя Лагранжа μ , используя выражения (27)–(29). Если его абсолютное значение не превосходит заданной (малой) величины, считаем, что в этой точке $\mu(t)$ непрерывно, в этот момент времени происходит заход на границу фазового ограничения, дальше траектория следует по этой границе, расчет меры-множителя на каждом шаге по времени происходит по формулам (27)–(29). Если же его значение больше заданной величины, то, ввиду раз-

рыва $\mu(t)$ в этой точке, построенная траектория не является частью экстремали и, следовательно, не представляет интереса.

Для траекторий, проходящих по границе фазового ограничения, осуществляем следующую процедуру. На каждом шаге по времени фиксируем μ и продолжаем интегрирование системы дифференциальных уравнений с этим фиксированным значением меры-множителя Лагранжа. Такая траектория сходит с границы и может являться частью экстремали, соединяющей границу с точкой A или снова заходящей на границу.

На каждом шаге по времени измеряется расстояние от текущей позиции робота до краевого условия при $t = 0$ в (16с), и если оно меньше заданного значения, то построенная траектория считается решением краевой задачи. Если таких траекторий найдено несколько, то выбираем ту из них, которая отвечает меньшему значению функционала (16а).

Были использованы следующие условия, по которым траектория отвергалась из кандидатов в экстремали рассмотренной задачи:

- время движения робота больше заданного (достаточно большого) значения,
- при следовании по границе нарушение монотонности μ ,
- при сходе с границы нарушение фазового ограничения.

Для наибольшего значения ε начальный выбор значений параметров θ и β проводили на равномерной сетке в квадрате $[0, 2\pi]^2$, локальные минимумы соответствующих невязок уточнялись методом деления пополам. Для больших значений ε в качестве начального значения указанных параметров брали их “оптимальное” значение, найденное для меньшего значения ε .

5.2. Результаты расчетов

Программой, реализующей указанный алгоритм, была численно решена задача оптимального управления (0) для следующих исходных данных:

$$x(0) = A = (-1.5, 0.3),$$

$$x(T) = B = (1.5, -0.5),$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 = -\pi/4.$$

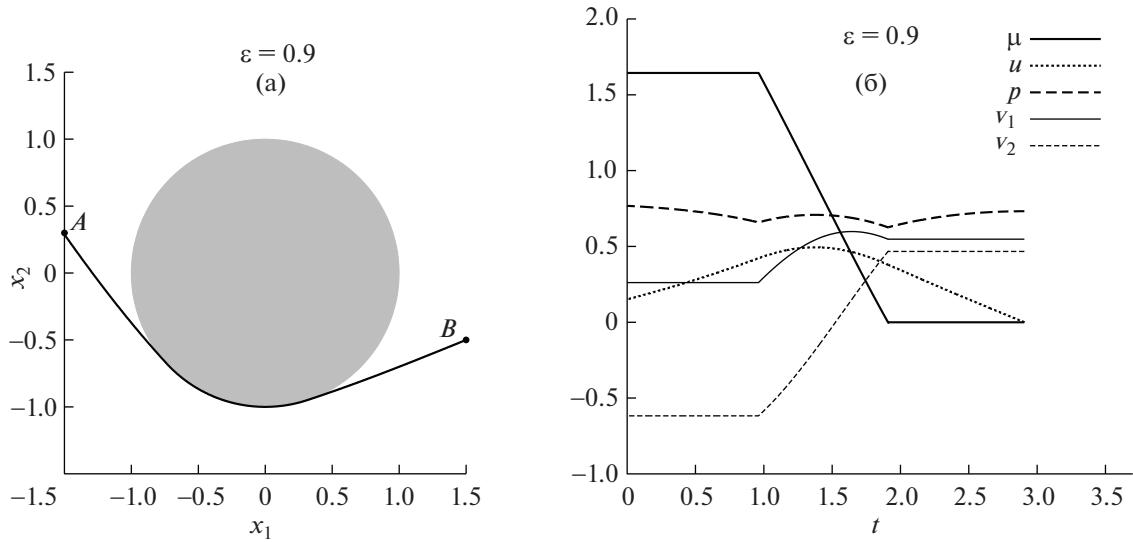
Расположение начальной и конечной точек маршрута робота, а также препятствие показаны на фиг. 1а.

Шаг интегрирования системы дифференциальных уравнений брали равным 10^{-3} . Если траектория пересекала границу фазового ограничения (16е), точку пересечения находили линейной интерполяцией, в этой точке вычисляли μ и считали ее непрерывной (т.е. в этой точке происходит заход на границу), если абсолютная величина этого значения не превосходила 10^{-2} . Решение краевой задачи считалось построенным, если расстояние от траектории до начального условия (т.е. в (16с) при $t = 0$) не превосходило 10^{-2} . Построение траектории останавливалось, если время следования по траектории превосходило 20 единиц времени.

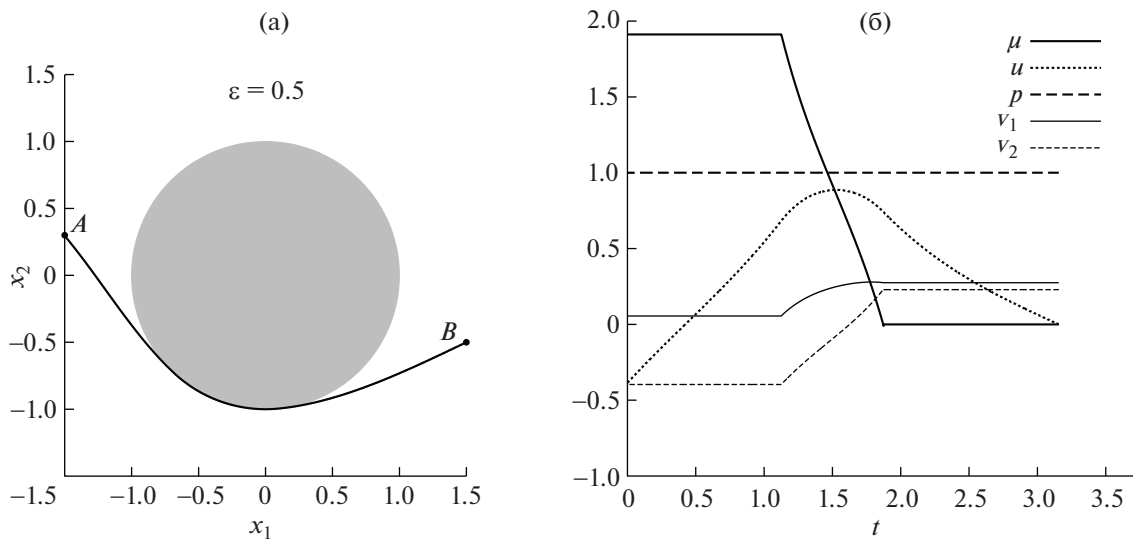
Хотя, как описано выше, решение задачи строилось в обратном времени, т.е. от $\tilde{t} = 0$ до $\tilde{t} = -T$, для построения фигур все функции преобразованы и показаны в прямом времени: $t = \tilde{t} + T$. Чтобы упростить сравнение, для всех значений ε на вертикальных и горизонтальных осях всех фигур, приведенных ниже, показаны одинаковые интервалы значений.

Были проведены расчеты для $\varepsilon = 0.9, 0.5, 0.2, 0.1$ и 0.05 , вычисленные оптимальные траектории и соответствующие управления показаны на фиг. 1–5 соответственно.

На первый взгляд, траектории робота, отвечающие решениям задачи оптимального управления при разных значениях ε , отличаются друг от друга мало (ср. фиг. 1а–5а). Каждая из этих траекторий состоит из трех частей – части заходящей на границу фазового ограничения, движению по границе и части, сходящей с границы. Однако режимы управления, обеспечивающие такое движение, различаются существенно. Так, при $\varepsilon = 0.9$ ни скорость поворота робота $u(t)$, ни его продольная скорость $p(t)$, не являются максимальными ни в какой точке траектории (фиг. 1б). При $\varepsilon = 0.5$ (фиг. 2б) скорость поворота снова нигде не достигает максимального значения, но его продольная скорость становится максимальной на всем участке движения, т.е. $p(t) = 1 \forall t \in [0, T]$. При $\varepsilon = 0.2$ (фиг. 3б) продольная скорость остается всегда максимальной, а скорость поворота достигает максимального значения на некотором участке движения вдоль границы.



Фиг. 1. Вычисленное решение регуляризованной задачи (0) при $\epsilon = 0.9$: (а) – оптимальная траектория робота, (б) – эволюция вдоль этой траектории меры-множителя Лагранжа $\mu(t)$ и управлений $u(t)$, $p(t)$, $v_1(t)$ и $v_2(t)$. Препятствие показано на (а) серым цветом.

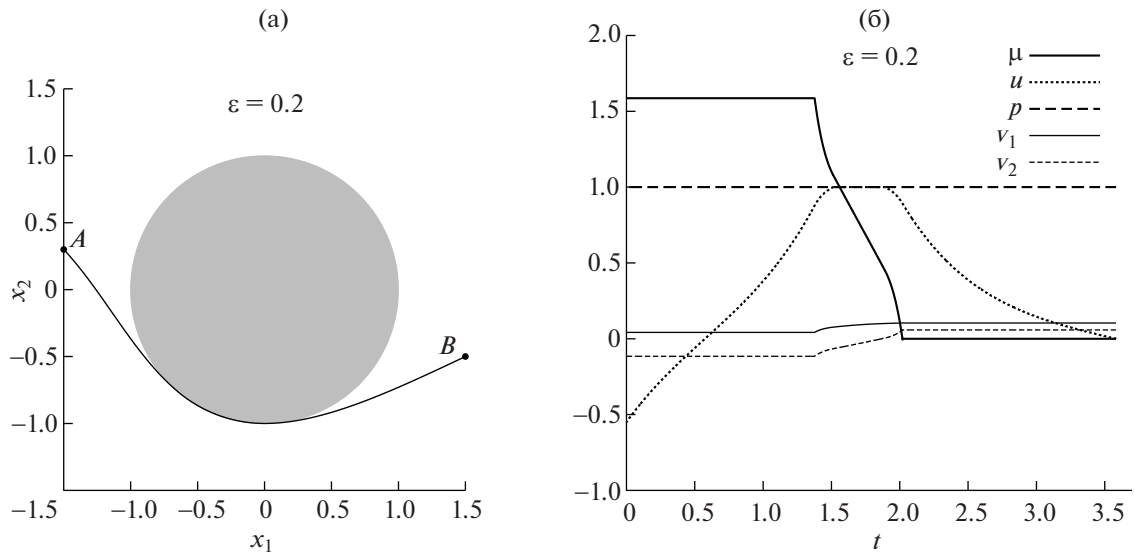


Фиг. 2. То же, что на фиг. 1, но при $\epsilon = 0.5$.

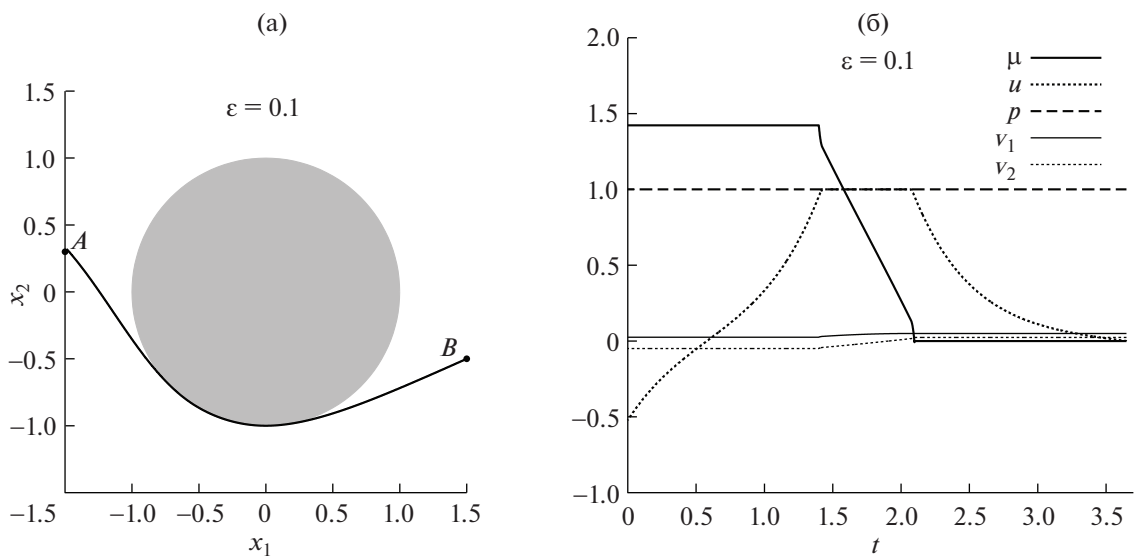
При $\epsilon = 0.1$ и 0.05 качественного изменения в сравнении с предыдущим случаем нет, но скорость поворота достигает максимального значения на большем участке границы (фиг. 4б и 5б), чем для траектории при $\epsilon = 0.2$.

Время следования по оптимальным траекториям T_ϵ растет с уменьшением ϵ : $T_{0.9} = 2.91$, $T_{0.5} = 3.16$, $T_{0.2} = 3.58$, $T_{0.1} = 3.64$ и $T_{0.05} = 3.65$. Мы не рассматривали меньших значений ϵ , поскольку разница между двумя последними, $T_{0.05}$ и $T_{0.1}$, мала – порядка 10^{-2} . Кроме того, отметим поведение регуляризаторов, т.е. функций v_1 и v_2 (тонкие линии на фиг. 1б–5б). Видно, что они стремятся к нулю в равномерной метрике при $\epsilon \rightarrow 0$, причем с линейной относительно ϵ скоростью, что также свидетельствует о сходимости метода.

Следует отметить характер изменения μ при уменьшении ϵ (при движении по границе, так как при движении вне границы величина меры-множителя Лагранжа не меняется). При $\epsilon = 0.9$

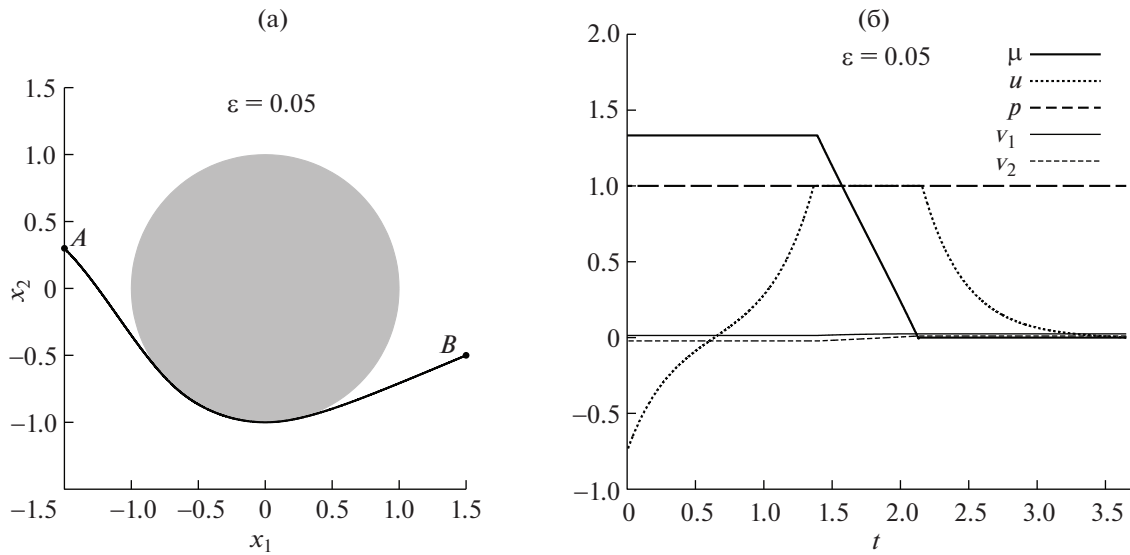


Фиг. 3. То же, что на фиг. 1, но при $\varepsilon = 0.2$.



Фиг. 4. То же, что на фиг. 1, но при $\varepsilon = 0.1$.

фиг. 1б между точкой входа и схода с границы $\mu(t)$ — практически линейная функция. При $\varepsilon = 0.5$ и 0.2 (фиг. 2б и 3б) заметно характерное нелинейное поведение — вблизи точки захода и схода с границы функция быстро меняется, оставаясь близкой к линейной при удалении от этих точек. Такая нелинейность (рост градиента) особенно заметна при $\varepsilon = 0.1$ (фиг. 4б). Однако при $\varepsilon = 0.05$ линейность уже полностью восстанавливается. Это означает, что предельная мера-множитель Лагранжа, которая отвечает принципу максимума в исходной задаче (1), по всей вероятности непрерывна. В этой связи отметим, что в известной литературе существует совсем немного примеров, которые демонстрируют наличие сингулярной составляющей меры и, в частности, атомов (см., например, [16], [17]). Представляется любопытным, что в такой существенно нерегулярной задаче, как движение мобильного робота относительно препятствия, мера-множитель все же сохраняет свойство непрерывности. Заметим, что такое свойство не гарантируется никакой существующей теорией и установлено пока лишь эмпирически.



Фиг. 5. То же, что на фиг. 1, но при $\epsilon = 0.05$.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем доказательство теоремы 1. Напомним следующее понятие (см. [4]).

Определение 3. В концевых точках выполняются условия управляемости относительно фазовых ограничений, если найдутся векторы $u_A, u_B \in U$ такие, что

$$\begin{aligned} \langle \nabla g(A), f(A, u_A) \rangle < 0 & \text{ при } g(A) = 0, \\ \langle \nabla g(B), f(B, u_B) \rangle > 0 & \text{ при } g(B) = 0. \end{aligned}$$

Относительно этих условий и условия регулярности имеет место следующее простое утверждение.

Предложение 2. Пусть допустимый процесс (x, u, T) регулярен относительно фазовых ограничений. Тогда в концевых точках выполнены условия управляемости относительно фазовых ограничений.

Доказательство очевидно следует из определений. Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим заданный оптимальный процесс управления (x^*, u^*, T^*) , регулярный относительно фазовых ограничений. В силу предложения 2 в концевых точках выполнены условия управляемости относительно фазовых ограничений. Тогда ввиду результатов, полученных в [4], [7], [13], а также уточнений, сделанных в [8, лемма 4.1], существует невырождающий набор множителей Лагранжа (λ, ψ, μ) такой, что функция $\mu(t)$ непрерывна на $(0, T^*)$, и который удовлетворяет всем условиям принципа максимума, кроме условия нетривиальности, которое слабее, чем в теореме:

$$\lambda + \ell(\{t \in [0, T^*] : \psi(t) - \mu(t)\nabla g(x^*(t)) \neq 0\}) > 0. \tag{30}$$

Ясно, что ввиду (30) и замечания 1 можно считать, что функция μ непрерывна на всем отрезке времени $[0, T^*]$.

Необходимо показать, что в условиях регулярности, сформулированных в этой работе, условие (30) влечет

$$\lambda + |\psi(t) - \mu(t)\nabla g(x^*(t))| > 0 \quad \forall t \in [0, T^*]. \tag{31}$$

Для простоты изложения предположим, что $u^*(t) \in \text{int } U$ для п.в. t . (Общий случай рассматривается в полной аналогии.) При этом предположении из условия максимума следует, что

$$H'_u(x^*(t), u, \psi(t), \lambda) = \mu(t)\Gamma'_u(x^*(t), u) \quad \forall u \in \mathcal{U}(t), \quad t \in [0, T^*], \tag{32}$$

где H означает обычную функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, u, \psi, \lambda) := \langle \psi, f(x, u) \rangle - \lambda f_0(x, u).$$

Рассмотрим множество точек

$$\mathcal{T} := \{t \in [0, T^*] : g(x^*(t)) = 0, \exists u_0 \in \mathcal{U}(t) : \Gamma(x^*(t), u_0) = 0\}.$$

Отметим, что множество \mathcal{T} замкнуто.

Рассмотрим произвольную точку $t \in \mathcal{T}$. В силу регулярности $\Gamma'_u(x^*(t), u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 = u_0(t) \in \mathcal{U}(t)$. Поэтому, взяв скалярное произведение (32) с $\Gamma'_u(x^*(t), u_0)$, учитывая, что $|\Gamma'_u(x^*(t), u_0)|^2 > 0$, получаем, что

$$\mu(t) = \frac{\langle H'_u(x^*(t), u_0(t), \psi(t), \lambda), \Gamma'_u(x^*(t), u_0(t)) \rangle}{|\Gamma'_u(x^*(t), u_0)|^2} \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (33)$$

Используя стандартные рассуждения, основанные на соображении компактности, и условие регулярности, можно заключить, что $|\Gamma'_u(x^*(t), u_0)| \geq \varepsilon \quad \forall t \in T$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда из (33) следует оценка

$$\mu(t) \leq \text{const}(\lambda + |\psi(t)|) \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (34)$$

Здесь константа const не зависит от t .

Предположим, что условие (31) нарушено. Тогда $\lambda = 0$, и существует точка $t_0 \in [0, T^*]$ такая, что $\psi(t_0) = \mu(t_0)\nabla g(x^*(t_0))$. Для $t \in [0, T^*]$ положим

$$\check{\mu}(t) := \mu(t) - \mu(t_0), \quad \check{\psi}(t) := \psi(t) - \mu(t_0)\nabla g(x^*(t)).$$

В силу замечания 4 новый набор множителей Лагранжа $(\lambda, \check{\psi}, \check{\mu})$ снова удовлетворяет принципу максимума и (30), причем $\check{\mu}(t_0) = 0$, $\check{\psi}(t_0) = 0$. Для удобства переобозначим $\check{\mu}$, $\check{\psi}$ снова через μ и ψ соответственно.

Сначала рассмотрим случай $t_0 \in \mathcal{T}$. После переобозначений оценка (34) принимает следующий вид

$$|\mu(t)| \leq C_1|\psi(t)| \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (35)$$

Здесь $C_1 > 0$ – некоторая константа.

В силу свойства Липшиц-непрерывности сопряженной функции ψ имеем

$$|\psi(t)| \leq K|t - t_0| \quad \forall t \in [0, T^*], \quad (36)$$

при некотором $K > 0$.

Докажем оценку

$$|\mu(t)| \leq C_1 K |t - t_0| \quad \forall t \in [0, T^*]. \quad (37)$$

Действительно, при $t \in \mathcal{T}$ эта оценка вытекает из (35) и (36). Рассмотрим точку $t \in [0, T^*]$, $t > t_0$, такую, что $t \notin \mathcal{T}$. Поскольку множество \mathcal{T} замкнуто, а $t_0 \in \mathcal{T}$, существует точка $t_* \in \mathcal{T}$, $t_0 \leq t_* < t$, такая, что $\mathcal{T} \cap (t_*, t] = \emptyset$. Для точки t_* оценка (37) уже доказана. В то же время из [7, предложение 4.8] вытекает постоянство функции μ на $[t_*, t]$. Эти рассуждения доказывают (37) справа от t_0 . Точно такие же рассуждения проводятся и слева от точки t_0 . Оценка (37) установлена.

Используя полученную оценку и (36), из сопряженного уравнения имеем

$$|\psi(t)| \leq KC_2(C_1 + 1) \int_{t_0}^t (s - t_0) ds, \quad t \in [0, T^*],$$

где $C_2 > 0$.

Отсюда

$$|\psi(t)| \leq KC_2(C_1 + 1) \frac{(t - t_0)^2}{2} \quad \forall t \in [0, T^*]. \quad (38)$$

Применяя аналогичную (37) оценку, но используя (38) вместо (36), имеем

$$|\mu(t)| \leq KC_2(C_1 + 1)C_1 \frac{(t - t_0)^2}{2} \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Из этой оценки и из (38), используя сопряженное уравнение, получаем

$$|\psi(t)| \leq KC_2^2(C_1 + 1)^2 \frac{|t - t_0|^3}{3!} \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Продолжая такой итеративный процесс, на n -м шаге имеем

$$|\psi(t)| \leq \frac{KC_2^n(C_1 + 1)^n}{(n + 1)!} |t - t_0|^{n+1} \quad \forall t \in [0, T^*].$$

При этом

$$|\mu(t)| \leq \frac{KC_2^n(C_1 + 1)^n C_1}{(n + 1)!} |t - t_0|^{n+1} \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ показывает, что $\psi = 0$, $\mu = 0$. Значит, все множители равны нулю, что противоречит условию нетривиальности (30).

Случай $t_0 \notin T$ легко свести к уже рассмотренному случаю из [7, предложение 4.8]. Условие (30) доказано.

Лемма 2. Пусть (x^*, u^*, T^*) – оптимальный процесс в задаче (2). Предположим, что выполнено условие: $0 \in \text{int } f(x, U) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\exists \delta > 0$:

$$\ell(t \in [0, T^*] : |f(x^*(t), u^*(t))| \leq \delta) = 0.$$

Доказательство проводится стандартными рассуждениями от противного.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучена задача управления мобильным роботом при наличии фазовых ограничений. В качестве критерия оптимальности рассмотрено быстродействие. На основе принципа максимума Понтрягина предложен алгоритм для вычисления решения. Однако прямое приложение принципа максимума не приводит к нужному результату, что обусловлено существенной нерегулярностью задачи относительно фазовых ограничений. Поэтому был предложен метод регуляризации задачи, который позволяет решить задачу приближенно с помощью ε -аппроксимаций. Этот метод применен к тестовой задаче о безынерционном движении трехколесного мобильного робота с передним приводом. Приведены результаты численного эксперимента. Настоящее исследование является завершением цикла работ [18]–[21] авторского коллектива по тематике задач быстродействия для мобильного робота при фазовых ограничениях.

Авторы выражают признательность рецензенту за сделанные замечания и интересный комментарий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Filippov A.F.* On certain problems of optimal regulation // Bull. Moscow State Univer., ser. Math. and Mech. 1959. V. 2. P. 25–38.
2. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York, 1962.
3. *Gamkrelidze R.V.* Optimal control processes with restricted phase coordinates // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1960. V. 24, P. 315–356.
4. *Arutyunov A.V.* Optimality conditions: Abnormal and Degenerate Problems. Mathematics and Its Application. Kluwer Acad. Publ., 2000.

5. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 4. С. 725–779.
6. Clarke F.H., Vinter R.B. Optimal multiprocesses // SIAM J. Control Optim. 1989. V. 27. № 5. P. 1072–1091.
7. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu. On some continuity properties of the measure lagrange multiplier from the maximum principle for state constrained problems // SIAM J. Control Optim. 2015. V. 53. № 4. P. 2514–2540.
8. Karamzin D., Pereira F.L. On a few questions regarding the study of state-constrained problems in optimal control // J. Optim. Theor. Appl. 2019. V. 180. № 1.
9. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Pereira F.L. An indirect method for regular state-constrained optimal control problems in flow fields // IEEE Transact. Automat. Control. 2021. V. 66. № 2. P. 787–793.
10. Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю. Свойства экстремалей в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 11. С. 1464–1476.
11. Mordukhovich B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation. Vol. I. Basic Theory. Springer-Verlag, 2006, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Berlin.
12. Arutyunov A., Karamzin D. A survey on regularity conditions for state-constrained optimal control problems and the non-degenerate maximum principle // J. Optim. Theor. Appl. 2020. V. 184. № 3. P. 697–723.
13. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L. The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: Revisited // J. Optim. Theory Appl. 2011. V. 149.
14. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L. Optimal Impulsive Control. The Extension Approach. Springer, 2011.
15. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Lobo Pereira F. Regular path-constrained time-optimal control problems in three-dimensional flow fields // Europ. J. Control. 2020. V. 56. P. 98–106.
16. Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А. Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990. 318 с.
17. Захаров Е.В., Карамзин Д.Ю. К исследованию условий непрерывности меры-множителя Лагранжа в задачах с фазовыми ограничениями // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 3. С. 395–401.
18. Дарьина А.Н., Дивеев А.И., Карамзин Д.Ю., Перейра Ф.Л., Софронова Е.А., Чертовских Р.А. Исследование метода возмущений для решения нерегулярных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2020. № 22. С. 25–51.
19. Дарьина А.Н., Дивеев А.И., Карамзин Д.Ю., Перейра Ф.Л., Софронова Е.А., Чертовских Р.А. Регулярные возмущения оптимального движения трехколесного мобильного робота с передним приводом при ограниченных фазовых переменных // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2020. № 22. С. 52–77.
20. Chertovskih R., Daryina A., Diveev A., Karamzin D., Pereira F.L., Sofronova E. Regular perturbations to the motion of a three-wheeled mobile robot with the front-wheel drive under restricted state variables // Europ. Control Conf. (ECC 2020), St-Petersburg, May 2020. P. 1210–1215. article 9143809.
21. Chertovskih R., Daryina A., Diveev A., Karamzin D., Pereira F.L., Sofronova E. Investigation of a perturbation method to solve essentially non-regular time-optimal control problems with state constraints // Europ. Control Conf. (ECC 2020), St-Petersburg, May 2020. P. 849–854. article 9143703.