

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 517.9

МАССОВЫЙ ПОТОК И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА
В ДЛИННОМ КОНЦЕНТРИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ
ПРИ НЕПОЛНОЙ АККОМОДАЦИИ МОЛЕКУЛ ГАЗА

© 2022 г. О. В. Гермидер¹, В. Н. Попов^{1,*}

¹ 163002 Архангельск, набережная Северной Двины, 17, Северный (Арктический) федеральный ун-т, Россия

*e-mail: v.popov@narfu.ru

Поступила в редакцию 12.10.2021 г.
Переработанный вариант 22.01.2022 г.
Принята к публикации 11.05.2022 г.

В зависимости от значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа найдено решение линеаризованной задачи об изотермическом течении разреженного газа в длинном концентрическом кольцевом канале. В качестве основного уравнения используется модельное кинетическое уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука, а в качестве граничного условия – модель зеркально-диффузного отражения молекул газа от стенок канала. Получены значения массового потока и распределение давления по длине канала при произвольных значениях параметра разрежения. Проведено их исследование в свободномолекулярном и гидродинамическом режимах течения газа в канале. Библ. 25. Фиг. 7.

Ключевые слова: модельные кинетические уравнения, течение газа в каналах, коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа.

DOI: 10.31857/S0044466922090113

ВВЕДЕНИЕ

Исследование течений газа в микро- и наноканалах имеет важное значение при разработке технических систем [1]. Характер этих течений определяется соответствующими процессами переноса, экспериментальное изучение которых затруднено [2]. При использовании кинетического подхода, основанного на решении уравнения Больцмана, появляется возможность восстановления интегральных характеристик течения с последующим их анализом в широком диапазоне изменения значений параметра разрежения без проведения сложно реализуемого физического эксперимента [3], [4]. Для получения численного решения уравнения Больцмана в режиме течения газа, отличных от свободномолекулярного, необходимы значительные вычислительные ресурсы, сократить которые позволяет применение модельных кинетических уравнений [5]–[11]. Наиболее простым и широко используемым для описания течения газа является модельное кинетическое уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) [12]. Сравнительный анализ [13] показал, что уравнение БГК позволяет получить вполне удовлетворительные результаты при описании изотермических течений. Однако известные к настоящему моменту времени методы его решения являются ресурсозатратными [11]. В связи с этим продолжает оставаться актуальной задача поиска более эффективных и менее ресурсозатратных вычислительных методов и алгоритмов решения модельных кинетических уравнений для описания процессов переноса в каналах.

В представленной работе исследуется один из аспектов общей проблемы изотермического течения газа в канале, связанный с восстановлением массового потока и давления газа в длинном концентрическом кольцевом канале. В постановочной части данная работа близка к [6] и представляет интерес как с прикладной, так и с теоретической точек зрения. С одной стороны, каналы с такой конфигурацией сечения имеют место в практическом приложении [7]. С другой стороны, особая геометрия сечения позволяет проследить изменение свойств потока разреженного газа, вызванное его торможением у внутренней цилиндрической поверхности. В качестве характерного размера поперечного сечения канала в [6] выбран гидродинамический (гидравлический) диаметр [14]. Численное решение уравнения БГК в [6] получено методом дискретных скоростей, анализ результатов выполнен в широком диапазоне разреженности газа с получением и гидродинамического предела. В данной работе развивается подход, предложенный в [10] и [15].

Оптимизация построения численного решения БГК достигается с применением свойств сумм полиномов Чебышёва [19]. В качестве характерного размера поперечного сечения канала, как и в [20], используется радиус внутреннего цилиндра. Значения массового потока и распределение давления находятся с использованием системы компьютерной алгебры Maple 18. Проводится сравнительный анализ с результатами из [6] и с аналитическими решениями в свободномолекулярном режиме и режиме течения со скольжением, которые выписываются в явном виде. Исследуется влияние коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа на величину массового потока и давления газа в канале. Предлагаемый в работе метод может быть применен к широкому классу задач, связанных с решением линеаризованных модельных кинетических уравнений, в частности, к расчету течений газа в каналах при различных поперечных сечениях канала. Данный метод без использования свойства конечных сумм был применен в [16] для решения эллипсоидально-статистического модельного уравнения в рамках задачи течения газа между двумя параллельными пластинами. Следует отметить также возрастание точности при увеличении гладкости решения и вычислительную устойчивость предлагаемого метода [17] и [18].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим изотермическое течение разреженного газа в длинном концентрическом кольцевом канале, образованном двумя цилиндрами с радиусами R_1' и R_2' ($R_1' < R_2'$), под действием заданного градиента давления, направленного вдоль оси канала z' . Считаем, что цилиндры поддерживаются при постоянной температуре и коэффициенты аккомодации тангенциального импульса молекул газа совпадают и равны α . Канал соединяет два резервуара, давления в которых обозначим через p_1' и p_2' соответственно. Полагаем, что $p_2' > p_1'$ и длина канала $L' \gg R_2'$. Состояние газа в точке \mathbf{r}' определяем функцией распределения молекул газа $f'(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, где \mathbf{v} – молекулярная скорость газа. В качестве масштабов длины, скорости, концентрации, температуры, функции распределения выберем соответственно величины [8]: R_2' , $\beta^{-1/2}$, n_0' , T_0' , $n_0'\beta^{3/2}$, где $\beta = m'/(2k_B T_0')$, k_B – постоянная Больцмана, m' – масса молекул газа, n_0' , T_0' – концентрация, температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат; $p' = n' k_B T'$. Тогда для безразмерных величин имеем следующие соотношения:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{R_2'}, \quad R_1 = \frac{R_1'}{R_2'}, \quad R_2 = 1, \quad f = \frac{f'}{n_0'\beta^{3/2}},$$

$$\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \beta^{1/2}\mathbf{u}', \quad n = \frac{n'}{n_0'}, \quad T = 1.$$

Полагаем, что модуль безразмерного градиента давления G_p является малым по величине. Тогда при малом перепаде давления на концах длинного канала ($L' \gg R_2'$) распределение давления вдоль канала можно считать линейным [13]:

$$p_0' = p_{av}', \quad p'(z) = p_{av}'(1 + G_p z), \quad G_p = \frac{p_2' - p_1'}{L p_{av}'}, \quad (1.1)$$

где $p_{av}' = (p_2' + p_1')/2$.

Если отношение $p_2^* = p_2'/p_1'$ является большим, то распределение давления перестает быть линейным. Рассматривая течение газа в средней части канала и вводя обозначения $p^* = p'/p_1'$ и $z^* = z'/L'$, находим $p^*(z^*)$ из условия постоянства полного потока массы J_M^* (уравнения неразрывности) [13]:

$$J_M^* dz^* = J_{M,p} dp^*, \quad (1.2)$$

с граничными условиями $p^*(-1/2) = 1$ и $p^*(1/2) = p_2^*$. Здесь J_M^* – неизвестный параметр, представляющий собой нормированный поток массы

$$J_M^* = \frac{L}{\pi(R_2'^2 - R_1'^2)p_1'} J_M' \sqrt{\frac{2k_B T_1'}{m'}}, \quad (1.3)$$

а величина приведенного потока массы $J_{M,p}$:

$$J_{M,p}G_p = \frac{1}{\pi(R_2'^2 - R_1'^2)p_0'} J_M' \sqrt{\frac{2k_B T_0'}{m'}} \tag{1.4}$$

определяется с использованием линеаризованного модельного кинетического уравнения БГК. Зависимость $J_{M,p}$ от z^* проявляется неявно, через параметр разреженности δ . Для модели жестких сфер имеем следующее соотношение [10]

$$\delta = \frac{R_2' p'}{\eta_g'(T')} \sqrt{\frac{m'}{2k_B T'}} \tag{1.5}$$

где $\eta_g'(T')$ – динамическая вязкость газа.

Учитывая осесимметричный характер течения газа в канале, введем цилиндрические координаты $\mathbf{r} = (\rho, r_\phi, r_z)$ в конфигурационном пространстве и $\mathbf{C} = (C_\perp, C_\psi, C_z)$ в пространстве скоростей. Пусть $\zeta = \cos \psi$, в линейном приближении получим

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C)(1 + G_p(z + h(\rho, \mathbf{C}))), \quad f_0(C) = \pi^{-3/2} \exp(-C^2),$$

$$J_{M,p} = \frac{4}{(1 - R_1'^2)} \int_{R_1'}^1 U_z(\rho) \rho d\rho, \tag{1.6}$$

$$u_z = G_p U_z, U_z(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_\perp^2) C_\perp \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} Z(\rho, \zeta, C_\perp) d\zeta dC_\perp, \tag{1.7}$$

$$Z(\rho, \zeta, C_\perp) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-C_z^2) C_z h(\rho, \mathbf{C}) dC_z.$$

Линеаризованное уравнение БГК запишем в виде [15]

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \zeta + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \frac{(1 - \zeta^2)}{\rho} \right) C_\perp + \delta Z(\rho, \zeta, C_\perp) + \frac{1}{2} = \delta U_z(\rho). \tag{1.8}$$

В качестве граничного условия на цилиндрах используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла [13]. В этом случае имеем

$$Z(1, \zeta, C_\perp) = (1 - \alpha) Z(1, C_\perp, -\zeta), \quad \zeta < 0, \tag{1.9}$$

$$Z(R_1, \zeta, C_\perp) = (1 - \alpha) Z(R_1, C_\perp, -\zeta), \quad \zeta > 0. \tag{1.10}$$

2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Неизвестную функцию $Z(\rho, \zeta, C_\perp)$, где $\rho \in [R_1, 1]$, $\zeta \in [-1, 1]$ и $C_\perp \in [0, +\infty)$, раскладываем в ряд по полиномам Чебышёва I рода T_{k_i} [19] и, ограничиваясь в этом ряду членами с номерами $k_i \leq n_i$ ($i = 1, 3$), получаем

$$Z(\rho, \zeta, C_\perp) = \mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \otimes \mathbf{T}_3(x_3) \mathbf{A}, \tag{2.1}$$

где $x_1 = (2\rho - 1 - R_1)/(1 - R_1)$, $x_2 = \zeta$, $x_3 = (C_\perp - 1)/(C_\perp + 1)$, \mathbf{T}_i – матрица размера $1 \times n_i'$ ($n_i' = n_i + 1$, $i = 1, 3$):

$$\mathbf{T}_i(x_i) = (T_0(x_i) T_1(x_i) \dots T_{n_i-1}(x_i) T_{n_i}(x_i)),$$

\mathbf{A} – матрица размера $n_1' n_2' n_3' \times 1$:

$$\mathbf{A} = (a_{000} a_{001} \dots a_{n_1 n_2 n_3 - 1} a_{n_1 n_2 n_3})^T,$$

через $\mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2)$ обозначено произведение Кронекера двух матриц [21].

Подставляя (2.1) в (1.8)–(1.10) и учитывая (1.7), получаем

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{A} = -\frac{1}{2}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{T}_1(\pm 1) \otimes (\mathbf{T}_2(x_2) - (1 - \alpha) \mathbf{T}_2(-x_2)) \otimes \mathbf{T}_3(x_3) \mathbf{A} = 0, \quad \pm x_2 < 0, \tag{2.3}$$

где

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{1 - R_1} \left(\frac{dT_1(x_1)}{dx_1} \otimes T_2(x_2)x_2 + T_1(x_1) \otimes \frac{dT_2(x_2)}{dx_2} \frac{(1 - x_2^2)}{x_1 + (1 + R_1)/(1 - R_1)} \right) \otimes \otimes T_3(x_3) \frac{1 + x_3}{1 - x_3} + \delta T_1(x_1) \otimes (T_2(x_2) \otimes T_3(x_3) - P_2 \otimes P_3),$$

$$P_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_2(x_2)}{\sqrt{1 - x_2^2}} dx_2 = (20 \dots 00),$$

$$P_3 = 2 \int_{-1}^1 \frac{1 + x_3}{(1 - x_3)^3} T_3(x_3) \exp\left(-\frac{(1 + x_3)^2}{(1 - x_3)^2}\right) dx_3.$$

В качестве точек коллокации в (2.2) для x_1 выберем точки экстремумов многочлена $T_{n_1}(x_1)$ на отрезке $[-1; 1]$, для x_2 и для x_3 – нули $T_{n_2}(x_2)$ и $T_{n_3}(x_3)$ на этом отрезке [19]:

$$x_{1,k_1} = \cos\left(\frac{\pi(n_1 - k_1)}{n_1}\right), \quad k_1 = \overline{0, n_1}, \tag{2.4}$$

$$x_{i,k_i} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 2, 3. \tag{2.5}$$

Для нахождения значений полиномов Чебышёва в точках (2.4) и (2.5) воспользуемся геометрическим определением $T_j(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i)$, где $x_i \in [-1, 1]$ [19]. Тогда

$$T_{j_1}(x_{1,k_1}) = \cos\left(\frac{\pi j_1(n_1 - k_1)}{n_1}\right), \quad j_1, k_1 = \overline{0, n_1},$$

$$T_{j_i}(x_{i,k_i}) = \cos\left(\frac{\pi j_i(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 2, 3.$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в (2.2), приходим к системе линейных $n_1'n_2'n_3'$ -уравнений, в которой заменяем уравнения с $x_{1,0}, x_{2,k_2}$ ($k_2 = n_2'/2, n_2'$) на уравнения, вытекающие из граничного условия (2.3) для $x_2 > 0$:

$$\overline{T_1(-1) \otimes (T_2(x_{2,k_2}) - (1 - \alpha)T_2(x_{2,n_2-k_2})) \otimes T_3(x_{3,k_3})} \mathbf{A} = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3},$$

с x_{1,n_1}, x_{2,k_2} ($k_2 = 0, n_2'/2 - 1$) на уравнения (2.3) для $x_2 < 0$:

$$T_1(1) \otimes (T_2(x_{2,k_2}) - (1 - \alpha)T_2(x_{2,n_2-k_2})) \otimes T_3(x_{3,k_3}) \mathbf{A} = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}.$$

Здесь и ниже считаем, что n_2 – нечетное число. Для минимизации влияние ошибок округления при вычислении значений искомой функции, удовлетворяющей решению линеаризованного кинетического уравнения и граничного условия в точках коллокации в качестве неизвестных в системе линейных $n_1'n_2'n_3'$ -уравнений будем использовать значения функции $Z(\rho, \zeta, C_{\perp})$ в точках (2.4) и (2.5). Пусть

$$\mathbf{Z} = (Z_{000}, Z_{001} \dots Z_{n_1 n_2 n_3 - 1} Z_{n_1 n_2 n_3})^T, \quad Z_{k_1 k_2 k_3} = Z(\rho_{k_1}, \zeta_{k_2}, C_{\perp, k_3}),$$

получим

$$\mathbf{LZ} = \mathbf{F},$$

$$\mathbf{L} = \frac{2}{1 - R_1} \mathbf{B}_1 + \delta(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2),$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_{\text{JH}} \circ \left(\frac{2}{n_1} \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{I}_{d_2} + \frac{2}{n_2'} \mathbf{I}_{d_1} \otimes (\mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1) \right) \otimes \mathbf{I}_{d_3}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{4}{n_2' n_3'} \mathbf{E}_{\text{JH}} \circ \mathbf{I}_b \otimes \mathbf{E}_G.$$

Здесь \mathbf{F} – матрица-столбец размером $n_1'n_2'n_3' \times 1$, элементы которой равны $-1/2$ за исключением нулевых элементов с индексами l из промежутков $n_2'n_3'/2 - 1, n_2'n_3' - 1$ и $(n_1'n_2' - n_2'/2 - 2)n_3' - 1, n_1'n_2'n_3' - 1$; \mathbf{I} – матрица размера $n_1'n_2'n_3' \times n_1'n_2'n_3'$, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные ненулевые ее элементы принимают следующие значения:

$$I_{(n_2-i_2)n_3+i_3, i_3 n_3+i_3} = \alpha - 1, \quad I_{n_1 n_2 n_3+i_2 n_3+i_3, n_1 n_2 n_3+(n_2-i_2)n_3+i_3} = \alpha - 1,$$

где $i_2 = \overline{0, n_2/2 - 1}$ и $i_3 = \overline{0, n_3}$; $\mathbf{E}_{\text{ЖН}}$ – матрица размером $n_1' n_2' \times n_1' n_2'$ с нулевыми строками l ($l = n_2'/2, n_2$ или $l = n_1' n_2' + 1, n_1' n_2' + (n_2 - 1)/2$), а все остальные строки содержат единицы; через \circ обозначено произведение Адамара двух матриц [21]; матрицы \mathbf{J}_2 \mathbf{H}_2 имеют размеры $n_k' \times n_k'$ ($k = 1, 2$) соответственно и элементы

$$J_{2, i_1, j_1} = \frac{dT_{1, j_1}(x_{1, i_1})}{dx_1} \quad (i_1, j_1 = \overline{0, n_1}),$$

$$H_{2, i_2, j_2} = \frac{dT_{2, j_2}(x_{2, i_2})}{dx_2} (1 - x_{2, i_2}^2) \quad (i_2, j_2 = \overline{0, n_2});$$

матрицы \mathbf{J}_1 , \mathbf{H}_1 и \mathbf{G}_1 имеют соответственно размеры $n_k' \times n_k'$ ($k = \overline{1, 3}$) и содержат элементы $J_{1, i_1, j_1} = \gamma_1 \gamma_2 T_{i_1}(x_{1, j_1})$, $H_{1, i_2, j_2} = \gamma_1 T_{i_2}(x_{2, j_2})$ и $G_{1, i_3, j_3} = \gamma_1 T_{i_3}(x_{3, j_3})$ ($i_k, j_k = \overline{0, n_k}$), где коэффициент γ_1 равен 1 для всех элементов матриц \mathbf{J}_1 , \mathbf{H}_1 и \mathbf{G}_1 за исключением элементов первых их строк, для которых $\gamma_1 = 1/2$, а коэффициент γ_2 равен 1/4 для первого и последнего элемента последней строки матрицы \mathbf{J}_1 , для всех других элементов этой строки, как и элементов первого и последнего столбца γ_2 равен 1/2, для остальных элементов $\gamma_2 = 1$; \mathbf{I}_b – блочно-диагональная матрица ($n_1' n_2' \times n_1' n_2'$), состоящая из одинаковых блоков размера $n_2' \times n_2'$ с единичными элементами; \mathbf{I}_{d_k} – диагональная $n_k' \times n_k'$ -матрица ($k = \overline{1, 3}$):

$$I_{d_1, i_1, i_1} = \frac{1}{x_{1, i_1} + (1 + R_1)/(1 - R_1)}, \quad I_{d_2, i_2, i_2} = x_{2, i_2}, \quad I_{d_3, i_3, i_3} = \frac{1 + x_{3, i_3}}{1 - x_{3, i_3}}, \quad i_k = \overline{0, n_k};$$

матрица \mathbf{E}_G размера $n_3' \times n_3'$ имеет равные строки $\mathbf{P}_3 \mathbf{G}_1$.

Решение уравнения (2.6) находим LU -методом. На основе полученных элементов матрицы \mathbf{Z} восстанавливаем $U_z(\rho)$:

$$U_z(\rho) = \varrho \mathbf{T}_1 \left(\frac{2\rho - 1 - R_1}{1 - R_1} \right) \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{E}_{\text{НГ,г}} \mathbf{Z}, \quad \varrho = \frac{8}{n_1 n_2 n_3'}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{E}_{\text{НГ,г}}$ – блочная $1 \times n_2' n_3'$ -матрица, состоящая из одинаковых блоков $\mathbf{E}_{\text{Г,г}}$ размера $1 \times n_3'$, представляющих собой первую строку матрицы \mathbf{E}_G .

Подставляя (2.7) в (1.6), получаем

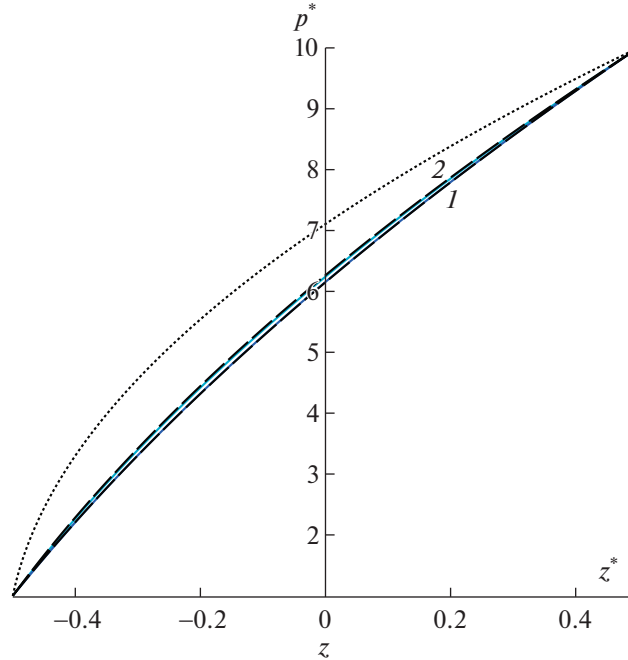
$$J_{M, p} = \frac{\varrho}{1 + R_1} \mathbf{P}_1 \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{E}_{\text{НГ,г}} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{P}_1 = \int_{-1}^1 \mathbf{T}_1(x_1) (x_1(1 - R_1) + 1 + R_1) dx_1. \quad (2.8)$$

Неизвестный параметр J_M^* в дифференциальном уравнении (1.2) с граничными условиями $p^*(-1/2) = 1$ и $p^*(1/2) = p_2^*$ находим, интегрируя левую и правую части уравнения (1.2). В уравнении (1.2) зависимость $J_{M, p}$ от $p^*(z^*)$ проявляется неявно через δ . Учитывая независимость J_M^* от z^* и равенство (1.5), из которого вытекает $\delta(z^*) = \delta_1 p^*(z^*)$, имеем

$$J_M^* = \int_1^{p_2^*} J_{M, p} dp^* = \frac{1}{\delta_1} \int_{\delta_1}^{\delta_2} J_{M, p} d\delta. \quad (2.9)$$

Используя полученное значение параметра J_M^* , распределение давления $p^*(z^*)$ по длине канала восстанавливаем путем решения уравнения (1.2) с граничным условием $p^*(-1/2) = 1$ методом Рунге–Кутты.

Распределение давления $p^*(z^*)$ в режиме течения со скольжением находим как и в случае гидродинамического режима. Ввиду громозкости полученного выражения для $p^*(z^*)$ явный вид его приводить не будем. Результаты вычислений $p^*(z^*)$ для $R_1 = 0.1$ и $p_2^* = 10$ представлены графически штриховыми линиями 1 и 2 на фиг. 1 и соответствуют значениям коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа $\alpha = 0.85$ и $\alpha = 1$ из промежутка изменения α для реальных газов [25]. Пунктирная кривая на фиг. 1 соответствует гидродинамическому пределу (3.8). Распределения давления $p^*(z^*)$, найденные с использованием кинетического подхода (1.2) и (2.6)–(2.9) при тех же.



Фиг. 1. Распределение $p^*(z^*)$ при $\delta_1 = 1$ и $p_2^* = 10$ для $R_1 = 0.1$.

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В свободномолекулярном режиме течения ($\delta = 0$) уравнение (1.8) с граничными условиями (1.9) и (1.10) переходит в уравнение Больцмана для бесстолкновительного газа и может быть получено аналитически [22]. В этом случае вид функции $Z(\rho, \zeta, C_\perp)$ определяется исходя из следующих условий:

для молекул, которые отразились от внешнего цилиндра и летят к нему

$$Z(\rho, \zeta, C_\perp) = -\frac{\alpha\rho\zeta + (2 - \alpha)\sqrt{1 - \rho^2(1 - \zeta^2)}}{2\alpha C_\perp}, \quad -\frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2}}{\rho} \leq \zeta \leq \frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2}}{\rho}, \quad (3.1)$$

для молекул, которые отразились от внешнего цилиндра и летят к внутреннему цилиндру

$$Z(\rho, \zeta, C_\perp) = -\frac{\alpha\rho\zeta + (1 - (1 - \alpha)R_1)\sqrt{1 - \rho^2(1 - \zeta^2)}}{2\alpha C_\perp}, \quad -1 \leq \zeta \leq -\frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2}}{\rho}, \quad (3.2)$$

для молекул, которые отразились от внутреннего цилиндра и летят к внешнему цилиндру

$$Z(\rho, \zeta, C_\perp) = -\frac{\alpha\rho\zeta - (1 - (1 - \alpha)R_1^{-1})\sqrt{R_1^2 - \rho^2(1 - \zeta^2)}}{2\alpha C_\perp}, \quad \frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2}}{\rho} < \zeta \leq 1. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.1)–(3.3) в (1.7), приходим к следующему выражению для $U_z(\rho)$:

$$U_z(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1 - (1 - \alpha)R_1^{-1}}{\alpha} \int_{\frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2}}{\rho}}^1 \frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2(1 - \zeta^2)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta - \frac{1 - (1 - \alpha)R_1}{\alpha} \int_{-1}^{\frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2}}{\rho}} \frac{\sqrt{1 - \rho^2(1 - \zeta^2)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta - \frac{2 - \alpha}{\alpha} \int_{\frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2}}{\rho}}^{\frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2}}{\rho}} \frac{\sqrt{1 - \rho^2(1 - \zeta^2)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta \right). \quad (3.4)$$

В этом случае выражение (1.6) для приведенного потока массы $J_{M,p}$ не зависит от δ и распределение давления $p^*(z^*)$ вдоль канала является линейной функцией $p^*(z^*) = (1 + p_2^*)/2 + (p_2^* - 1)z^*$. При этом величина J_M^* равна $J_{M,p}(p_2^* - 1)$.

В гидродинамическом режиме течения ($\delta^{-1} \ll 1$) решение уравнения (1.8), соответствующее уравнению Навье–Стокса для одноатомного газа с граничным условием прилипания на цилиндрах [23]

$$U_z(\rho) = \frac{\delta(\rho^2 - 1)}{4} \left(1 - \frac{\ln \rho}{\ln R_1} \right), \tag{3.5}$$

не зависит от C_\perp и ζ и имеет вид

$$Z(\rho, \zeta, C_\perp) = \frac{\delta(\rho^2 - 1)}{4} \left(1 - \frac{\ln \rho}{\ln R_1} \right). \tag{3.6}$$

В этом случае, подставляя (3.5) в (1.6), получаем

$$J_{M,p} = \frac{\delta(R_1^2(1 - \ln R_1) - 1 - \ln R_1)}{4 \ln R_1}. \tag{3.7}$$

Тогда из уравнения (1.2) с граничными условиями $p^*(-1/2) = 1$ и $p^*(-1/2) = p_2^*$ находим J_M^* и $p^*(z^*)$:

$$p^*(z^*) = \sqrt{\frac{2J_M^* \delta z^*}{J_{M,p}} + \frac{p_2^{*2} + 1}{2}}, \quad J_M^* \delta = \frac{p_2^{*2} - 1}{2} J_{M,p}. \tag{3.8}$$

В режиме течения со скольжением тангенциальная массовая скорость газа пропорциональна ее нормальному градиенту вблизи стенок канала [13]. Следуя [6] и [24], запишем граничные условия скольжения в виде

$$U_z(R_i) = (-1)^{i+1} \frac{\sigma_p}{\delta} \frac{dU_z}{d\rho}(R_i), \quad i = 1, 2, \tag{3.9}$$

где σ_p – безразмерный коэффициент вязкого скольжения. Для диффузного рассеяния ($\alpha = 1$) в рамках модели БГК коэффициент σ_p равен 1.016 [24], для зеркально-диффузного отражения Максвелла коэффициент σ_p может быть получен по формуле (см. [6] и [13])

$$\sigma_p(\alpha) = \frac{2 - \alpha}{\alpha} (\sigma_p(1) - 0.1211(1 - \alpha)).$$

Решение уравнения Навье–Стокса

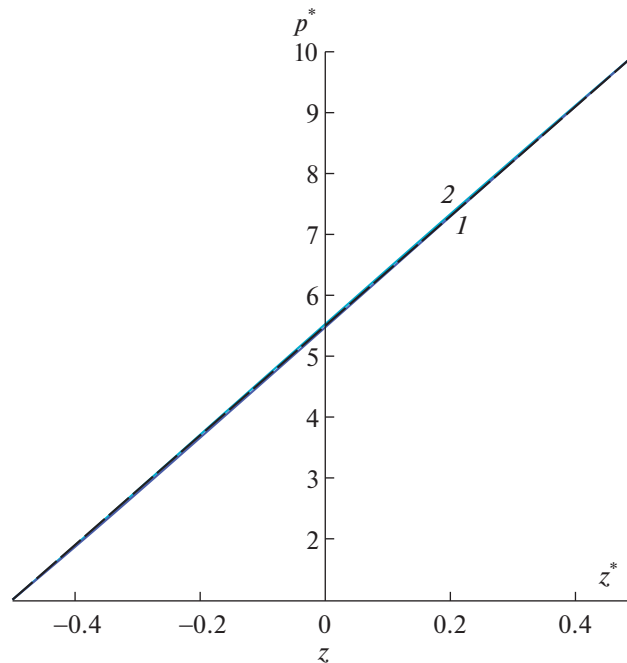
$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU_z(\rho)}{d\rho} \right) = \delta \tag{3.10}$$

с граничными условиями скольжения (3.9) находим аналитически

$$U_z(\rho) = \frac{1}{4} \left(\delta \rho^2 - \frac{\delta R_1 (R_1 + 1) (\delta R_1 - \delta - 2\sigma) \ln \rho}{\delta R_1 \ln R_1 - \sigma(1 + R_1)} - 2\sigma - \frac{\delta (\delta R_1 \ln R_1 - \sigma(1 + R_1^3)) + 4R_1^2 \sigma^2}{\delta R_1 \ln R_1 - \sigma(1 + R_1)} \right). \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (1.6), получаем

$$J_{M,p} = \frac{1}{4(1 - R_1)(\delta R_1 \ln R_1 - \sigma(1 + R_1))} \left(((1 - R_1 + R_1^2 - R_1^3)(1 - \ln R_1) + 2(1 - R_1))R_1 \delta^2 + (1 - 4R_1 + 4R_1^3 - R_1^4 - 4R_1(1 - R_1 + R_1^2) \ln R_1) \delta \sigma + 4(1 - R_1 - R_1^2 + R_1^3) \sigma^2 \right). \tag{3.12}$$



Фиг. 2. Распределение $p^*(z^*)$ при $\delta_1 = 0.1$ и $p_2^* = 10$ для $R_1 = 0.1$.

Представляя в виде ряда по малому параметру δ^{-1} выражение для массовой скорости газа (3.9) и ограничиваясь в этом разложении линейными членами этого ряда относительно δ^{-1} , имеем

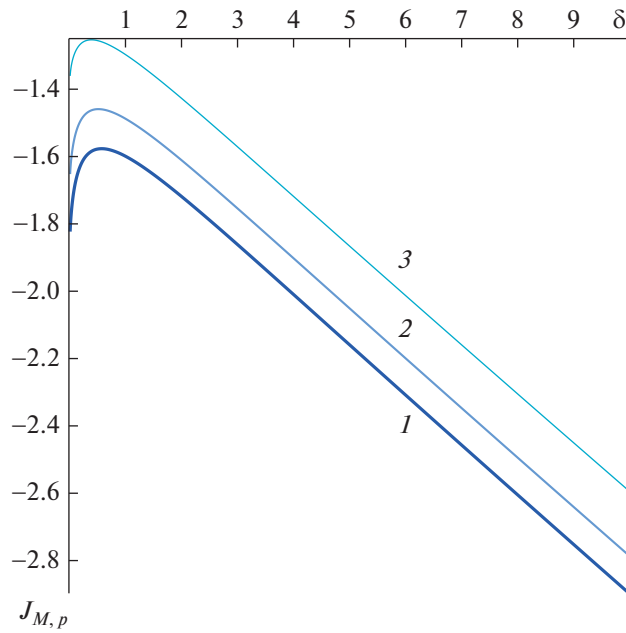
$$U_z(\rho) = U_{H,z}(\rho) + \sigma_p U_{s,z}(\rho), \tag{3.13}$$

$$U_{s,z}(\rho) = \frac{(1 + 2R_1^2 \ln R_1 - R_1^3 + 2R_1 \ln R_1 - R_1^2 + R_1) \ln \rho}{4R_1 \ln^2 R_1} + \frac{1}{4} \frac{R_1^2 - 2 \ln R_1 - 1}{\ln R_1}. \tag{3.14}$$

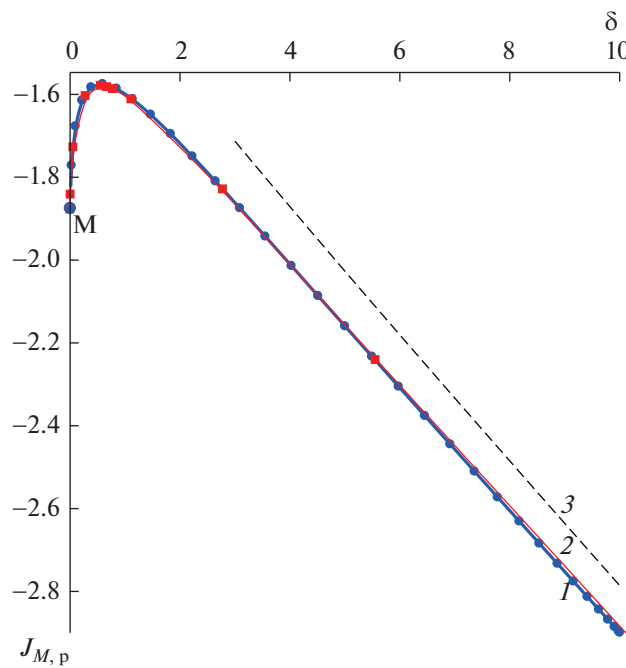
Здесь $U_{H,z}(\rho)$ – гидродинамическое решение с граничными условиями прилипания (3.5). Видим, что учет скольжения вносит поправки в (3.5) порядка, не превышающего δ^0 , что соответствует поиску решения краевой задачи (3.9) и (3.10) в виде (3.13). Подставляя (3.13) в (1.6), получаем

$$J_{M,p} = J_{M,H} + \sigma_p J_{M,s} = \frac{\delta(R_1^2(1 - \ln R_1) - 1 - \ln R_1)}{4 \ln R_1} + \sigma_p \frac{4R_1^3 \ln^2 R_1 - 4R_1^2 \ln^2 R_1 - 4R_1^3 \ln R_1 + R_1^4 + 4R_1 \ln^2 R_1 + 4R_1 \ln R_1 - 2R_1^2 + 1}{4R_1(R_1 - 1) \ln^2 R_1}. \tag{3.15}$$

Значения α для случая $\delta_1 = 1$ показаны сплошными кривыми, которые визуально совпадают со штриховыми кривыми 1 и 2. Вычисленные при этом значения параметра J_M^* равны соответственно -20.1147 и -17.4534 и приближаются к значениям $J_M^* = -18.8847$ и $J_M^* = -16.0763$, полученным аналитически с использованием уравнений гидродинамики со скольжением. Гидродинамический предел J_M^* согласно (3.8) равен -7.1781 . Результаты вычислений $p^*(z^*)$ для $R_1 = 0.1$, $\delta_1 = 0.1$ и $p_2^* = 10$ представлены на фиг. 2. В этом случае распределения $p^*(z^*)$ при $\alpha = 0.85$ (кривая 1) и $\alpha = 1$ (кривая 2) приближаются к отрезку прямой $p^*(z^*) = (1 + p_2^*)/2 + (p_2^* - 1)z^*$ ($z^* \in [-1/2; 1/2]$), который определяет распределение давления в свободномолекулярном режиме течения газа в канале. Вычисленные при этом значения параметра J_M^* равны соответственно -14.3225 и -11.3970 и приближаются к значениям $J_M^* = -16.8732$ и $J_M^* = -12.5010$, полученным по формуле $J_M^* = (p_2^* - 1)J_{M,p}$, справедливой для



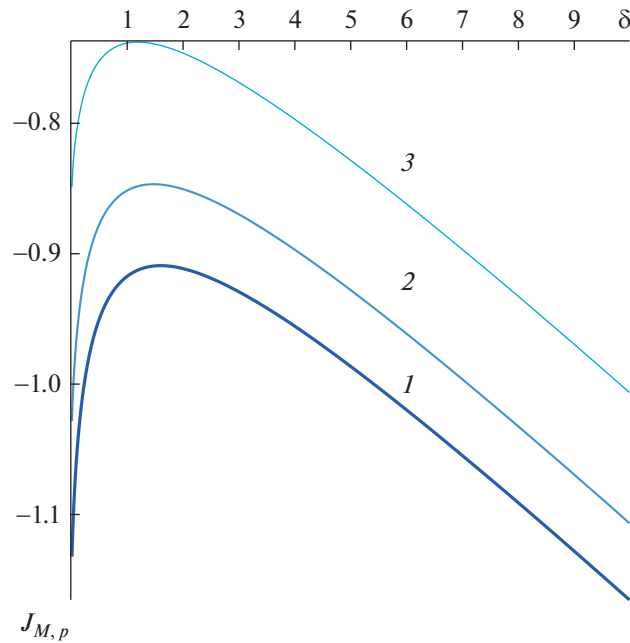
Фиг. 3. Зависимость приведенного массового потока газа $J_{M,p}$ от δ для $R_1 = 0.1$: 1, 2 и 3 – $\alpha = 0.85, 0.9, 1$.



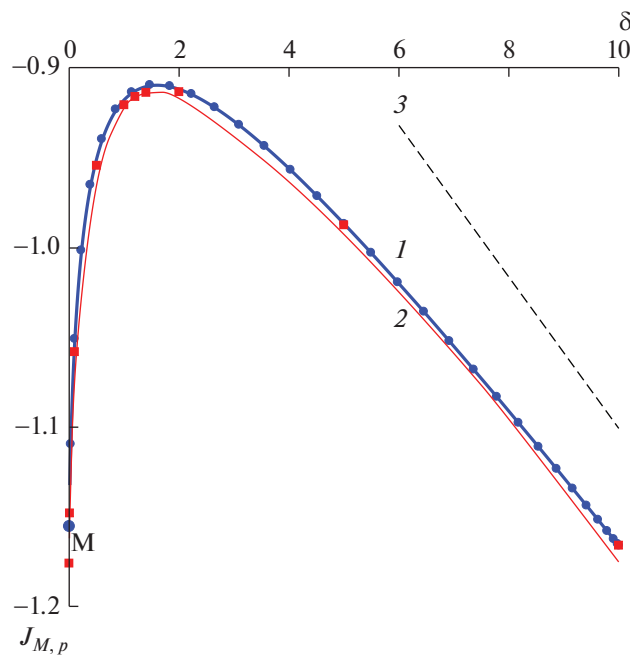
Фиг. 4. Результаты вычисления $J_{M,p}$ в сравнении с [6] для $R_1 = 0.1$ и $\alpha = 0.85$.

свободномолекулярного режима течения. Для $R_1 = 0.5$ в поведении функции $p^*(z^*)$ качественных изменений не выявлено.

Результаты вычислений приведенного массового потока $J_{M,p}$ по формуле (2.8) в зависимости от δ представлены на фиг. 3 и 4 для $R_1 = 0.1$ и фиг. 5 и 6 для $R_1 = 0.5$. Аппроксимация выполнена В-спайнами третьей степени. На фиг. 3 и 5 кривыми 1–3 показаны изменения величины $J_{M,p}$ при

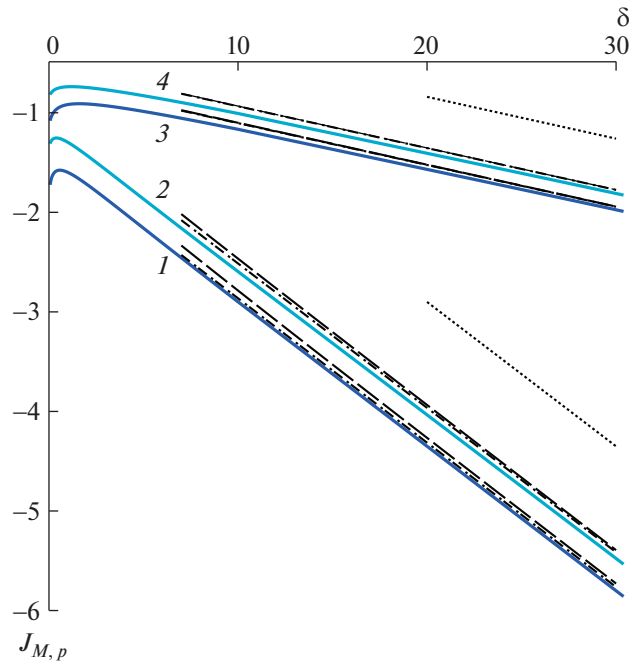


Фиг. 5. Зависимость приведенного массового потока газа $J_{M,p}$ от δ для $R_1 = 0.5$: 1, 2 и 3 – $\alpha = 0.85, 0.9, 1$.



Фиг. 6. Результаты вычисления $J_{M,p}$ в сравнении с [6] для $R_1 = 0.5$ и $\alpha = 0.85$.

значениях коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа $\alpha = 0.85, 0.9$ и 1 соответственно. Точками M на фиг. 4 и 6 показаны свободномолекулярные пределы, найденные согласно (1.6) с использованием (3.4). Из анализа фиг. 3 и 5 следует, что величина приведенного массового потока увеличивается с уменьшением значений α для $0 \leq \delta \leq 10$, при этом положение точки максимума $J_{M,p}$ определяется в большей степени отношением $R_1 = R'_1/R'_2$. Кривыми 2 на фиг. 4 и 6 показаны результаты вычислений $J_{M,p}$ из [6] с учетом умножения параметра разрежения на $1/2 + R_1/(2(1 - R_1))$ и величины приведенного потока – на $2(R_2 - R_1)$, что обусловлено



Фиг. 7. График функции $J_{M,p}(\delta)$ в зависимости от R_1 и α .

введением в [6] в качестве характерного линейного размера гидродинамического диаметра канала $2(R_2' - R_1')$; штриховыми линиями (кривые 3) нанесены результаты вычислений $J_{M,p}$ по формуле (3.12). Как видно из фиг. 4 и 6, наблюдается хорошее согласие полученных результатов в настоящей работе с [6]. Фигура 7 иллюстрирует поведение кривых потоков массы газа в режиме течения со скольжением ($\delta > 10$). Кривые 1–4 соответствуют: 1 – $R_1 = 0.1, \alpha = 0.85$, 2 – $R_1 = 0.1, \alpha = 1$ и 3 – $R_1 = 0.5, \alpha = 0.85$, 4 – $R_1 = 0.5, \alpha = 1$. Штриховыми и штрихпунктирными линиями на фиг. 5 нанесены результаты вычислений $J_{M,p}$ по формулам (3.12) и (3.15) при тех же значениях R_1 и α , что и кривые 1–4. Пунктирные кривые соответствуют гидродинамическому пределу (3.7). На фиг. 7 видно, что при $\delta \geq 20$ величина $J_{M,p}$, полученная по формуле (2.8), приближается к линейной функции с углом наклона, который увеличивается с уменьшением отношения $R_1 = R_1'/R_2'$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом коллокации Чебышёва решена задача о вычислении потока массы и давления газа с использованием линеаризованного БГК уравнения при изотермическом течении разреженного газа в длинном концентрическом кольцевом канале. Реализация метода коллокации выполнена с использованием свойств сумм многочленов Чебышёва и матричных произведений Адамара и Кронекера с целью минимизации влияния ошибок округления при вычислении значений искомой функции, удовлетворяющей решению линеаризованного кинетического уравнения и граничного условия в точках коллокации. Вычислены значения массового потока газа для широкого диапазона изменения значений параметра разрежения. Показано, что применение многочленов Чебышёва при исследовании течений газа дает возможность эффективно находить интегральные характеристики этих течений с последующим их анализом. Предложенный метод построения численного решения линеаризованного кинетического уравнения может быть применен для исследования свойств процессов переноса в длинных осесимметричных каналах при наличии малого градиента давления и режимах изотермического течения газа от свободномолекулярного до гидродинамического.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sharipov F. Rarefied gas dynamics: Fundamentals for research and practice. Berlin: Wiley-VCH, 2016.

2. Рудяк В.Я., Лежнев Е.В. Вязкость газов в наноканалах // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46. № 20. С. 51.
3. Ambrus V., Sharipov F., Sofonea V. Comparison of the Shakhov and ellipsoidal models for the Boltzmann equation and DSMC for ab initio-based particle interactions // Computers and Fluids. 2020. V. 211. 104637.
4. Lin C., Luo K.H., Fei L., Succi S. A multi-component discrete Boltzmann model for nonequilibrium reactive flows // Scientific reports. 2017. V. 7. 14580.
5. Graur I., Ho M.T. Rarefied gas flow through a long rectangular channel of variable cross section // Vacuum. 2014. V. 101. P. 328.
6. Breyiannis G., Varoutis S., Valougeorgis D. Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2008. V. 27. P. 609.
7. Taheri P., Struchtrup H. Poiseuille flow of moderately rarefied gases in annular channels // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 1291.
8. Titarev V. Implicit high-order method for calculating rarefied gas flow in a planar microchannel // Journal of Computational Physics. 2012. V. 231. P. 109.
9. Гермидер О.В., Попов В.Н. Течение разреженного газа между двумя коаксиальными цилиндрами под действием градиента температуры в рамках зеркально-диффузной модели отражения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1401.
10. Гермидер О.В., Попов В.Н. Неизотермическое течение разреженного газа в длинном цилиндрическом канале при произвольных перепадах давления и температуры // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 3. С. 125.
11. Valougeorgis D., Vasileiadis N., Titarev V. Validity range of linear kinetic modeling in rarefied pressure driven single gas flows through circular capillaries // European Journal of Mechanics - B/Fluids. 2017. V. 64. P. 2.
12. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511.
13. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008.
14. Буляница А.Л. Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51.
15. Гермидер О.В., Попов В.Н. Применение полиномов Чебышёва для вычисления потоков разреженного газа в каналах с цилиндрической геометрией // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 1947.
16. Гермидер О.В., Попов В.Н. Метод коллокации и его применение для решения линеаризованного уравнения Холвея // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 9. С. 3.
17. Шильков А.В. Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. Т. 249.
18. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Applied Mathematics and Computation. 2018. V. 322. P. 55–65.
19. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press, 2003.
20. Шахов Е.М. Течение разреженного газа между коаксиальными цилиндрами под действием градиента давления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 7. С. 1107.
21. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and Other Matrix Products // International Journal of Information and Systems Sciences. 2008. V. 4. № 1. P. 160.
22. Germider O.V., Popov V.N., Yushkanov A.A. Calculation of gas flow between two coaxial cylinders in a free-molecular regime under specular-diffuse boundary conditions // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2019. V. 92. № 1. P. 280.
23. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. New York: Pergamon, 1989.
24. Graur I., Sharipov F. Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction // European Journal of Mechanics B/ Fluids. 2008. V. 27. P. 335.
25. Nacer M.H., Graur I., Perrier P., Meolans G., Wuest M. Gas flow through microtubes with different internal surface coatings // Journal of Vacuum Science and Technology A. 2014. V. 32. 21601.