

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

ДИНАМИКА ЦЕПОЧЕК ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ОДНОСТОРОННЕЙ И ДВУСТОРОННЕЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ¹⁾

© 2023 г. С. А. Кащенко^{1,*}¹ 150003 Ярославль, ул. Советская, 14, Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова, Россия

*e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 22.04.2023 г.
Переработанный вариант 18.05.2023 г.
Принята к публикации 29.05.2023 г.

Рассматриваются цепочки уравнений Ван дер Поля с большим запаздыванием в связях. Предполагается, что количество элементов цепочек тоже является достаточно большим. Естественным образом удается перейти к уравнению Ван дер Поля с интегральным по пространственной переменной слагаемым и периодическими краевыми условиями. Основное внимание уделено изучению локальной динамике цепочек с односторонними и с двусторонними типами связей. Условие достаточно больших значений параметра запаздывания позволило в явном виде определить параметры для реализации критических в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия случаев. Показано, что в рассматриваемых задачах имеет место бесконечномерный критический случай. Хорошо известные методы инвариантных интегральных многообразий и методы нормальных форм в этих задачах оказываются неприменимыми. На основе предложенного автором метода бесконечной нормализации – метода квазинормальных форм – показано, что главные члены асимптотики исходной системы определяются с помощью решений (нелокальных) квазинормальных форм – специальных нелинейных краевых задач параболического типа. В качестве основных результатов для рассматриваемых цепочек построены соответствующие квазинормальные формы. Библиография: 44.

Ключевые слова: цепочки с односторонними и двусторонними связями, бифуркации, устойчивость, квазинормальные формы, запаздывание, динамика.

DOI: 10.31857/S0044466923090107, EDN: MMEENN

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим цепочку связанных между собой осцилляторов. В качестве базовой модели осцилляторов используем уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + a\dot{u} + u + f(u, \dot{u}) = 0, \quad (1)$$

где $f(u, \dot{u})$ – кубическая нелинейность

$$f(u, \dot{u}) = b_1 u^3 + b_2 u^2 \dot{u} + b_3 u \dot{u}^2 + b_4 \dot{u}^3. \quad (2)$$

Пусть цепочку из N связанных одинаковых осцилляторов вида (1) описывает система уравнений

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u_j = \sum_{k=1}^N a_{kj} u_k(t-T) \quad (j = 1, \dots, N), \quad (3)$$

где a_{kj} – коэффициенты связей, $T > 0$ – время запаздывания. Будем предполагать, что коэффициенты связей каждого элемента одинаковы для всех j , т.е. $a_{kj} = a_{k-j}$ и цепочка является кольцевой: элемент с номером $j \pm N$ отождествляется с элементом с номером j . Систему (3) удобно интерпретировать как цепочку осцилляторов, расположенных на некоторой окружности в точках с угловыми координатами x_k ($k = 1, \dots, N$; $x_{N+1} = x_1$; $x_0 = x_N$; $x_k = 2\pi N^{-1}k$) и $u_k(t) = u(t, x_k)$.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 21-71-30011), <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

Цепочки вида (3) являются важными объектами для исследований. Им уделяется особое внимание. Такие цепочки возникают при моделировании многих прикладных задач в радиофизике [1–8], лазерной физике [9–13], математической экологии [14, 15], теории нейронных сетей [16–21], оптике [3, 8, 22, 23], биофизике [24] и др. Релаксационные колебания в связанных цепочках с финитной нелинейностью и запаздыванием для небольшого количества элементов изучались в [25, 26].

Аналитическими методами изучались, в основном, динамические свойства цепочек с небольшим количеством элементов. Здесь будем предполагать, что значение N достаточно велико. Отсюда следует, что параметр $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ является достаточно малым

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4)$$

Тогда представляется естественным от дискретной зависимости от x_k перейти к изучению $u(t, x)$ с непрерывным аргументом $x \in (-\infty, \infty)$ и условием 2π -периодичности по x .

В этом случае система (3) трансформируется в краевую задачу вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = d \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - T, x + s) ds, \quad (5)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (6)$$

Функция $\Phi(s)$ описывает связи между элементами. Сведение цепочки с большим количеством элементов в краевой задаче вида (5), (6) использовалось в [17, 27].

Подробно остановимся на описании основных объектов настоящей работы – цепочках с односторонними и двусторонними связями. В дискретной форме записи они имеют соответственно представления

$$\ddot{u}_n(t) + a\dot{u}_n(t) + u_n(t) + f(u_n(t), \dot{u}_n(t)) = \alpha u_{n+1}(t - T) \quad (7)$$

и

$$\ddot{u}_n(t) + a\dot{u}_n(t) + u_n(t) + f(u_n(t), \dot{u}_n(t)) = \frac{1}{2} \alpha (u_{n+1}(t - T) + u_{n-1}(t - T)). \quad (8)$$

Рассмотрим задачи с непрерывной по x переменной $u(t, x)$, обобщающие уравнения (7), (8). Остановимся на определении функции $\Phi(s)$ для каждого из двух видов цепочек.

Введем в рассмотрение гауссовы функции $F_{\pm}(s, \varepsilon)$:

$$F_{\pm}(s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(s \mp \varepsilon)^2}{2\varepsilon^2 \sigma^2}\right) \quad (\sigma > 0). \quad (9)$$

Отметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s, \varepsilon) ds = 1.$$

Значения $F_{\pm}(s, \varepsilon)$ сосредоточены в окрестностях точек $\mp \varepsilon$ соответственно.

Интегральное выражение в правой части (5) удобно в каждой из рассматриваемых двух задач представить в виде:

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - T, x + s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_+(s, \varepsilon) u(t - T, x + s) ds, \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - T, x + s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (F_+(s, \varepsilon) + F_-(s, \varepsilon)) u(t - T, x + s) ds. \quad (11)$$

Такого типа функции $F_{\pm}(s, \varepsilon)$ использовались в [28]. Похожие, но несколько менее удобные в техническом плане выражения для $F_{\pm}(s, \varepsilon)$, в которых $F_{\pm}(s) = \text{const} \times \exp(-\sigma^2 |s|)$, приведены в работе [29].

Формы записей (10) и (11) предпочтительнее по трем причинам. Во-первых, для каждой фиксированной непрерывной и 2π -периодической функции $u(x)$ имеют место предельные равенства

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s, \varepsilon) u(x+s) ds = u(x \pm \varepsilon), \quad (12)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (F_{+}(s, \varepsilon) + F_{-}(s, \varepsilon)) u(x+s) ds = \frac{1}{2} (u(x+\varepsilon) + u(x-\varepsilon)), \quad (13)$$

которые оправдывают названия “односторонняя” и “двусторонняя” связи.

Во-вторых, параметр σ в формулах для $F_{\pm}(s, \varepsilon)$ имеет четкий смысл. Он определяет множество элементов цепочки, которые существенным образом влияют на каждый конкретный элемент. Это влияние тем слабее, чем дальше элементы находятся друг от друга.

В-третьих, формы записи (10) и (11) удобны с чисто технической точки зрения, поскольку имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s, \varepsilon) \exp(iks) ds = \exp(\pm i k \varepsilon) \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varepsilon^2 k^2}{2}\right),$$

которое ниже будет часто использоваться.

Еще одно важное предположение касается параметра запаздывания T . Будем предполагать, что этот параметр является достаточно большим: для некоторого $c > 0$ выполнено условие

$$T = c\varepsilon^{-1}. \quad (14)$$

Это открывает путь к использованию специальных асимптотических методов [13–15, 30, 31].

В (5) удобно произвести нормировку времени $t \rightarrow Tt$. В результате приходим к сингулярно возмущенному уравнению

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u + f\left(u, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}\right) = d \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t-c, x+s) ds \quad (15)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \quad (16)$$

Отметим, что получающееся при $\varepsilon = 0$ уравнение не дает информации о поведении решений краевой задачи (15), (16).

При изучении решений из малой окрестности нулевого состояния равновесия важную роль играет линеаризованное уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u = d \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t-c, x+s) ds. \quad (17)$$

Его характеристическое уравнение получаем путем подстановки в (17) решений Эйлера $\exp(ikx + \lambda t)$:

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon a \lambda + 1 = dg(z) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 z^2 - c\lambda\right), \quad z = \varepsilon k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (18)$$

а для функции $g(z)$ имеем равенства:

$$g(z) = \exp(iz), \quad \text{в случае (10),} \quad (19)$$

$$g(z) = \cos z, \quad \text{в случае (11).} \quad (20)$$

В том случае, когда все корни (18) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$, нулевое решение (17), (16), а значит, и в (15), (16) асимптотически устойчиво и все решения с достаточно малыми (не зависимо от ε) начальными условиями стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же найдется корень в (18) с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, то нулевое решение в (17), (16) и в (15), (16) неустойчиво и задача о динамике становится нелокальной. Здесь будем рассматривать критические случаи для каждой

из функций (10), (11), когда у (18) нет корней с положительной и отделенной от нуля вещественной частью, но есть корни, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Будет показано, что во всех рассмотренных ниже ситуациях критические случаи имеют бесконечную размерность, т.е. бесконечно много корней (18) стремится к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Известные методы исследования локальной динамики в критических случаях, основанные на использовании инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм [32–34], здесь оказываются неприменимы. Будут использованы специальные методы, разработанные в [14, 30, 31, 35–38]. В качестве основных результатов будут построены нелинейные краевые задачи – аналоги нормальных форм – квазинормальные формы (КНФ). Их нелокальная динамика описывает поведение всех решений из окрестности состояния равновесия исходной краевой задачи (15), (16). Будут выявлены сходства и отличия динамических свойств для каждого типа связей.

В следующих разделах будут последовательно изучены задачи с обоими типами функции $\Phi(s)$ (10), (11). Особо выделим роль параметра σ , фигурирующего в (9). При достаточно малых его значениях существенно усложняются критические случаи и КНФ, а значит, и динамика исходной задачи. В силу равенств (12) и (13) этот случай имеет особое значение.

Отметим, что в цепочках без запаздывания подобного типа задачи исследовались в [39]. При наличии большого запаздывания, с одной стороны, позволяет в явном виде получить явные выражения для критических случаев [21, 27, 40–42] и выявить тенденции изменения динамических свойств при увеличении T . С другой стороны, возрастает размерность критических случаев и еще более усложняются соответствующие КНФ.

Центральное место при исследовании краевой задачи (15), (16) для каждой из приведенных функций $g(z)$ занимает линейный анализ. Этому посвящен следующий раздел.

1. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим вопрос о корнях характеристического уравнения (18) с функциями $g(z)$ (19) и (20). Напомним, что критические случаи в задачах об устойчивости в (17), (16) реализуются, когда в уравнении (18) при некотором k есть корень с нулевой или достаточно близкой к нулю вещественной частью. В связи с этим для некоторого вещественного значения ω положим в (18) $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$. В результате получим уравнение

$$1 - \omega^2 + ia\omega = dg(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 - i\omega\varepsilon^{-1}\right), \quad z = \varepsilon k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

Через $p(\omega)$ обозначим модуль левой части (21)

$$p(\omega) = [(1 - \omega^2)^2 + a^2\omega^2]^{1/2}$$

и пусть

$$p_0 = \min_{-\infty < \omega < \infty} p(\omega) = p(\omega_0).$$

Здесь

$$\omega_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } a^2 \geq 2, \\ \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2, \end{cases} \quad p_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } a^2 \geq 2, \\ \frac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2. \end{cases}$$

Отметим, что $p_0 = 0$ при $a = 0$. Положим $P(\omega) = 1 - \omega^2 + ia\omega$ и пусть $P(\omega) = p(\omega) \exp(i\Omega(\omega))$. При $\omega = 0$ имеем $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = a$, $p'(0) = 0$.

Существенную роль при исследовании корней (18) играет параметр σ . Отдельно рассмотрим два принципиально различных случая. Первый из них реализуется, когда

$$\sigma > 0 \quad (22)$$

и σ не зависит от малых параметров.

Второй случай существенно сложнее. Он выделяется условием достаточной малости этого параметра, т.е. предполагаем, что для некоторого фиксированного $\sigma_1 > 0$ выполнено условие

$$\sigma = \varepsilon\sigma_1. \quad (23)$$

Еще раз отметим, что в силу предельных равенств (12) и (13) этот случай особо интересен.

1.1. Результаты линейного анализа в случае фиксированного значения σ

Пусть выполнено условие (22). При фиксированном z и при условии

$$\left| dg(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right) \right| < p_0$$

уравнение (21) вещественных корней не имеет. Положим

$$\gamma(z) = \left| g(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right) \right|$$

и пусть

$$\gamma_0 = \max_{-\infty < z < \infty} \gamma(z) = \gamma(z_0). \quad (24)$$

Из условия (22) вытекает, что $z_0 = 0$ и $\gamma_0 = 1$. При условии $|d|\gamma_0 < p_0$ и при достаточно малых ε все корни уравнения (18) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественные части. При $|d|\gamma_0 > p_0$ найдется такое z_0 , что уравнение (18) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью.

Значение параметра d_0 , который выделяет критический в задаче об устойчивости (17), (16) случай, определяется равенством

$$d_0 = p_0 \quad \text{при} \quad d_0 > 0 \quad \text{и} \quad d_0 = -p_0 \quad \text{при} \quad d_0 < 0.$$

В связи с этим ниже предполагаем, что для произвольного фиксированного значения d_1 параметр d определяем равенством

$$d = d_0 + \varepsilon^2 d_1. \quad (25)$$

При этом условии рассмотрим вопрос об асимптотике всех тех корней характеристического уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сразу отметим, что таких корней оказывается бесконечно много, поэтому критический случай имеет бесконечную размерность.

Введем обозначения. Через $\theta_\omega = \theta_\omega(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ будем обозначать такое выражение, которое дополняет до целого кратного $2\pi c^{-1}$ величину $\omega_0 \varepsilon^{-1}$. При $\omega_0 = 0$ считаем, что $\theta_\omega = 0$. Через $\theta_z = \theta_z(\varepsilon) \in [0, 1)$ подобным образом ниже будем обозначать такое выражение, которое дополняет до целого значение $z_0 \varepsilon^{-1}$. При $z_0 = 0$ считаем, что $\theta_z = 0$.

Сформулируем утверждения об асимптотике корней (18) в случаях (19), (20).

Лемма 1.1. Пусть

$$a^2 > 2, \quad d_0 = p_0. \quad (26)$$

Тогда $\omega_0 = 0$ и для корней $\lambda_{kn}(\varepsilon) (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = 2\pi i c^{-1} n + \varepsilon \lambda_{1kn} + \varepsilon^2 \lambda_{2kn} + \dots, \quad (27)$$

где в случае (19)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-1} i (k - a c^{-1} 2\pi n), \\ \lambda_{2kn} &= c^{-3} \left(1 - \frac{1}{2} a^2 \right) (2\pi n)^2 + i c^{-2} a (k - c^{-1} a 2\pi n) + c^{-1} d_1 - c^{-1} \sigma^2 k^2, \end{aligned}$$

а в случае (20)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-2} i a 2\pi n, \\ \lambda_{2kn} &= c^{-3} \left(1 - \frac{1}{2} a^2 \right) (2\pi n)^2 + i c^{-3} a 2\pi n + c^{-1} d_1 - c^{-1} \left(\frac{1}{2} + \sigma^2 \right) k^2. \end{aligned}$$

В случае, когда $a^2 > 2$ и $d_0 = -p_0 = -1$ в предыдущих формулах выражение $2\pi n$ меняется на $i\pi(2n+1)$. В этом случае удобно все предыдущие формулы переписать, акцентируя внимание на то, что, в отличие от приведенных в лемме 1.1 равенств, присутствует уже нечетно кратная π величина $\pi(2n+1)$:

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = \pi i c^{-1}(2n+1) + \varepsilon \lambda_{1kn} + \varepsilon^2 \lambda_{2kn} + \dots,$$

где в случае (19)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-1}i(k - ac^{-1}\pi(2n+1)), \\ \lambda_{2kn} &= c^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(\pi(2n+1))^2 + ic^{-2}a(k - c^{-1}a\pi(2n+1)) + c^{-1}d_1 - c^{-1}\sigma^2 k^2, \end{aligned}$$

а в случае (20)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-2}ia\pi(2n+1), \\ \lambda_{2kn} &= c^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(\pi(2n+1))^2 + ic^{-3}a\pi(2n+1) + c^{-1}d_1 - c^{-1}\left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)k^2. \end{aligned}$$

Лемма 1.2. Пусть

$$0 < a^2 < 2. \quad (28)$$

Тогда $\omega_0 > 0$ и для корней $\lambda_{kn}(\varepsilon)(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = i \frac{\omega_0}{\varepsilon} + \lambda_{0n} + \varepsilon \lambda_{1kn} + \varepsilon^2 \lambda_{2kn} + \dots, \quad (29)$$

где

$$\lambda_{0n} = ic^{-1}[2\pi n + \theta_\omega - \Omega_0], \quad \kappa = p_0 \exp(i\Omega_0),$$

в случае (19)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-1}(k + \kappa^{-1}(2\omega_0 - ia))\lambda_{0n}, \\ \lambda_{2kn} &= c^{-1}\left[\left(\kappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2 \kappa^{-2}\right)\lambda_{0n}^2 + d_1 p_0^{-1} - \sigma^2 k^2 - \right. \\ &\quad \left. - (c\kappa)^{-1}2i\omega_0(ik + \kappa^{-1}(2\omega_0 - ia))\lambda_{0n} - i\kappa^{-1}a\lambda_{0n}\right]. \end{aligned} \quad (30)$$

В случае (20)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= ic^{-1}\kappa^{-1}(2\omega_0 - ia)\lambda_{0n}, \\ \lambda_{2kn} &= c^{-1}\left[\left(\kappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2 \kappa^{-2}\right)\lambda_{0n}^2 + d_1 p_0^{-1} - \right. \\ &\quad \left. - \sigma^2 + \frac{1}{2}k^2 - (c\kappa)^{-1}2i\omega_0 \kappa^{-1}(2\omega_0 - ia)\lambda_{0n} - i\kappa^{-1}a\lambda_{0n}\right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Отметим, что выполняются условия

$$\operatorname{Re}\left(\kappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2 \kappa^{-2}\right) < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{1kn} = 0. \quad (32)$$

Выполнение первого из условий (32) очевидно. Подробнее остановимся на обосновании второго равенства в (32). Достаточно доказать, что чисто мнимым является выражение

$$(2\omega_0 - ia)\kappa^{-1}.$$

В этом случае $P(\omega) = p(\omega) \exp(i\Omega(\omega))$ и $P'(\omega) = (p'(\omega) + i\Omega'(\omega)p(\omega)) \exp(i\Omega(\omega))$, а значит,

$$P'(\omega) = i\Omega'(\omega_0)p_0 \exp(i\Omega_0) = -2\omega_0 + ia.$$

Отсюда заключаем, что $(-2\omega_0 + ia)\kappa^{-1} = i\Omega'(\omega_0) = 2ia^{-1}$.

Корни $\lambda_{kn}(\varepsilon)$ характеристического уравнения (18) позволяют определить решения линейной краевой задачи (17), (16)

$$u_{kn}(t, x, \varepsilon) = \exp(ikx + \lambda_{kn}(\varepsilon)t),$$

а значит, и формальную совокупность решений

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} (\xi_{kn} u_{kn}(t, x, \varepsilon) + \bar{\xi}_{kn} \bar{u}_{kn}(t, x, \varepsilon)), \quad (33)$$

где ξ_{kn} – произвольные комплексные постоянные. В каждом из рассмотренных ниже случаев соответствующие выражения вида (33) будут преобразованы так, чтобы в удобной форме можно было исследовать асимптотику решений нелинейной краевой задачи (15), (16).

1.2. Случай малых значений σ

Ниже будут рассмотрены важные вопросы о динамических свойствах краевой задачи (15), (16) при малых значениях σ . Будем предполагать, что для некоторого фиксированного значения σ_1 выполнено равенство

$$\sigma = \varepsilon \sigma_1.$$

Интерес к этому случаю обусловлен тем, что, во-первых, как было показано выше при малых σ соответствующие интегральные выражения в краевой задаче (15), (16) близки к записи в виде конечной разности по пространственной переменной.

Во-вторых, из (18) следует, что величина $\exp(-\sigma^2 z^2/2)$ в правой части (18) является малой, а значит, критические случаи определяются периодической функцией $g(z)$. Тем самым критические значения z_0 в (24) находятся заведомо не единственным образом. Таких значений, очевидно, бесконечно много. Это говорит о том, что квазинормальная форма становится существенно сложнее, а динамические свойства интереснее и разнообразнее.

2. ЦЕПОЧКИ С ОДНОСТОРОННЕЙ СВЯЗЬЮ

Отдельно рассмотрим случаи, когда $a^2 > 2$, $a^2 < 2$, $d_0 > 0$ и $d_0 < 0$.

2.1. Случай $a^2 > 2$ и $d_0 > 0$

Рассмотрим краевую задачу (15), (16) в предположении, что выполнено условие (22) и равенство

$$g(z) = \exp(iz). \quad (34)$$

Пусть сначала верны неравенства $a^2 > 2$ и $d_0 > 0$. Тогда получаем, что для фигурирующих в (26), (27) величин выполнены равенства

$$\gamma_0 = p_0 = d_0 = 1, \quad d = 1 + \varepsilon^2 d_1, \quad z_0 = 0 \quad (\theta_z = 0). \quad (35)$$

Рассмотрим формальное выражение (33), которое имеет вид

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn} \exp[ikx + i(2\pi n c^{-1} + \varepsilon k - \varepsilon a)t + (\lambda_{2kn} + O(\varepsilon))\varepsilon^2 t].$$

Положим в нем

$$x_1 = (1 - \varepsilon c^{-3} a)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-2} t, \quad \tau = \varepsilon^2 t$$

и $\xi_{kn}(\tau) = \xi_{kn} \exp[(\lambda_{2kn} + O(\varepsilon))\tau]$. В результате получаем, что

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau) \exp(ikx_2 + 2\pi i c^{-1} n x_1) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2),$$

т.е. $\xi_{kn}(\tau)$ – коэффициенты Фурье c -периодической по x_1 и 2π -периодической по x_2 функции $\xi(\tau, x_1, x_2)$.

Решение нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде формального ряда

$$u(t, x) = \varepsilon \xi(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x_1, x_2) + \dots, \quad (36)$$

где $\xi(\tau, x_1, x_2)$ – неизвестные функции, зависимость от x_1 – c -периодическая, а от x_2 – 2π -периодическая. Подставим (36) в (15) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε .

При первой степени ε получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при ε^3 , приходим к уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} c^{-1} (a^2 - 2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \sigma^2 c^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} - a^2 c^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} - ac^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + c^{-1} d_1 - c^{-1} b_1 \xi^3, \quad (37)$$

для которого выполнены краевые условия

$$\xi(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi). \quad (38)$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 2.1. Пусть выполнены равенства (34), $d_0 = 1$, неравенства (22) и $a^2 > 2$. Пусть $\xi(\tau, x_1, x_2)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x_1 \in [0, c]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ решение краевой задачи (37), (38). Тогда функция $u(t, x) = \varepsilon \xi(\tau, x_1, x_2)$ удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

2.2. Случай $a^2 > 2$ и $d_0 < 0$

В данном разделе $d_0 = -1$, а все остальные величины те же, что и в предыдущем разделе. Повторяя приведенные выше построения, получаем формулу для тех решений линейной краевой задачи (17), (16), которые базируются на “критических” решениях Эйлера:

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau) \exp[ikx + i(\pi(2n+1)c^{-1} + \varepsilon k - \varepsilon a\pi(2n+1)c^{-1})t] \equiv \xi(\tau, x_1, x_2),$$

где $\xi_{kn}(\tau)$ – коэффициенты Фурье c -антипериодической по x_1 и 2π -периодической по x_2 функции $\xi(\tau, x_1, x_2)$.

Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) опять ищем в виде (36). В итоге для $\xi(\tau, x_1, x_2)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} c^{-1} (a^2 - 2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \sigma^2 c^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} - a^2 c^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} - ac^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + c^{-1} d_1 - c^{-1} b_1 \xi^3 \quad (39)$$

с краевыми условиями

$$\xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv -\xi(\tau, x_1 + c, x_2). \quad (40)$$

Сформулируем результат.

Теорема 2.2. Пусть выполнены равенства (34), $d_0 = -1$ и неравенства (22) и $a^2 > 2$. Пусть $\xi(\tau, x_1, x_2)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x_1 \in [0, c]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ решение краевой задачи (39), (40). Тогда функция $u(t, x) = \varepsilon \xi(\tau, x_1, x_2)$ удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

Таким образом, показано, что при сформулированных в теоремах 1 и 2 условиях краевые задачи (37), (38) и (39), (40) являются квазинормальными формами для краевой задачи (15), (16). Их нелокальные решения определяют поведение решений (15), (16) в малой окрестности состояния равновесия. Отметим, что динамика краевой задачи (37), (38) тривиальна: все ее решения при $t \rightarrow \infty$ стремятся к одному из трех стационаров – либо к нулю, либо к значениям $\pm(-d_1 b_1^{-1})^{1/2}$. Решения краевой задачи (39), (40) менее тривиальны. В ней могут быть, например, устойчивые неоднородные состояния равновесия.

2.3. Асимптотика быстро осциллирующих решений

При условии $0 < a^2 < 2$ динамические свойства сложнее. Главная часть корней характеристического уравнения (18) близка к $i\omega_0\varepsilon^{-1}$, т.е. является достаточно большой. В связи с этим колебания с такими частотами естественно назвать быстро осциллирующими.

Из результатов разд. 1 получаем соотношения:

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, \quad z_0 = 0, \quad \theta_z = 0, \quad \gamma_0 = 1.$$

Достаточно ограничиться случаем, когда коэффициент d положителен. Поэтому $d_0 = p_0$.

Согласно лемме 2 в рассматриваемом случае (35) для корней $\lambda_{kn}(\varepsilon)$ выполнены равенства (29). Корням $\lambda_{kn}(\varepsilon)$ отвечают решения Эйлера линейной задачи (17), (16)

$$u_{kn}(t, x, \varepsilon) = \exp(ikx + \lambda_{kn}(\varepsilon)t).$$

Учитывая равенства (29), функцию $u_{kn}(t, x, \varepsilon)$ можно записать в виде

$$u_{kn}(t, x, \varepsilon) = E(t_1) \exp(2\pi inc^{-1}x_1 + ikx_2) \exp((\lambda_{2kn} + O(\varepsilon)\tau),$$

где $E(t_1) = \exp(it_1)$,

$$t_1 = [\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_\omega - \Omega_0c^{-1} - R_0c^{-1}(\theta_\omega - \Omega_0c^{-1})(2i\omega_0 + a)]t, \quad (41)$$

$$x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1}R_0)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-1}t, \quad \tau = \varepsilon^2t, \quad (42)$$

$$R_0 = p_0^{-1} \exp(i\Omega_0)(2i\omega_0 + a). \quad (43)$$

Выше было показано, что значение R_0 вещественно ($\text{Im}R_0 = 0$). Отсюда получаем, что

$$\sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn} u_{kn}(t, x, \varepsilon) = E(t_1) \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau) \exp(2\pi inc^{-1}x_1 + ikx_2) = E(t_1) \xi(\tau, x_1, x_2).$$

Здесь ξ_{kn} — произвольные комплексные постоянные, а $\xi_{kn}(\tau) = \xi_{kn} \exp((\lambda_{2kn} + O(\varepsilon)\tau)$. Функции $\xi_{kn}(\tau)$ являются коэффициентами Фурье c -периодической по x_1 и 2π -периодической по x_2 функции $\xi(\tau, x_1, x_2)$. Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде формального ряда

$$u(t, x) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x_2)E(t_1) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x_1, x_2) + \dots, \quad (44)$$

в котором зависимости от t_1, x_1, x_2 — периодические. Здесь и ниже через $\bar{c}c$ обозначаем величину, комплексно сопряженную к предыдущему слагаемому.

Введем обозначения. Положим

$$L_0(\xi) \equiv A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + B \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + C \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + D\xi + \sigma^2 c^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2},$$

где

$$A = c^{-1} \left[\frac{1}{2} (-2\omega_0 + ia)^2 \kappa^{-2} - \kappa^{-1} \right],$$

$$B = -[2c^{-1}A(\theta_\omega - \Omega_0) + (c\kappa)^{-1}2i\omega_0\kappa^{-1}(2\omega_0 - ia) + i\kappa^{-1}a],$$

$$C = -2i(c\kappa)^{-1}\omega_0,$$

$$D = -Ac^{-2}(\theta_\omega - \Omega_0)^2 + d_1(cp_0)^{-1} - i\kappa^{-1}(2c^{-1}\omega_0 + a),$$

$$L_1(u) \equiv \omega_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + a_0\omega \frac{\partial u}{\partial t_1} + u - p_0 u(t_1 - c(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_\omega - \Omega_0c^{-1}), \tau, x_1, x_2),$$

$$\beta_1 = b_1 + i\omega_0 b_2 - \omega_0^2 b_3 - i\omega_0^3 b_4,$$

$$\beta_2 = b_1 + 3i\omega_0 b_2 - 9\omega_0^2 b_3 - 27i\omega_0^3 b_4.$$

Просто проверяется, что $\text{Re}A > 0$. Подставим (44) в (15). Совершая затем стандартные действия, получаем соотношение

$$L_1(u_3) = E(t_1) \left[-\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + L_0(\xi) + 3c^{-1} \beta_1 \xi |\xi|^2 \right] + \bar{c}c + c^{-1} \beta_2 E^3(t_1) \xi^3 + \bar{c}c. \tag{45}$$

Для разрешимости (45) в указанном классе функций необходимо, чтобы первое (и второе – сопряженное к нему) слагаемое обратилось в нуль, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = L_0(\xi) + 3c^{-1} \beta_1 \xi |\xi|^2. \tag{46}$$

Напомним, что функция $\xi(\tau, x_1, x_2)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\xi(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi). \tag{47}$$

При выполнении равенства (46) получаем, что $u_3 = u_{30}$ и

$$u_{30} = \beta_2 [-3\omega_0^2 + i\omega_0 a + 1 - p_0 \exp(-3i\Omega_0)]^{-1} E^3(t_1) + \bar{c}c.$$

Введем еще одно обозначение. Через $\varepsilon_n(\theta_0)$ будем обозначать такую последовательность $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$, для которой выполнены условия

$$\varepsilon_n(\theta_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{и} \quad \theta(\varepsilon_n(\theta_0)) = \theta_0.$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 2.3. Пусть $0 < a^2 < 2$ и $d_0 = p_0$. Фиксируем произвольно $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ и пусть $\xi(\tau, x_1, x_2)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x_1 \in [0, c]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ решение краевой задачи (46), (47). Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_n(\theta_0)$ функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x_2)E(t_1) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 u_{30}(t_1, \tau, x_1, x_2)$$

удовлетворяет при условиях (41)–(43) и при $\theta = \theta_0$ краевой задаче (15), (16) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

На основании этой теоремы заключаем, что при сформулированных условиях краевая задача (46), (47) играет роль квазинормальной формы для исходной краевой задачи (15), (16). Отметим, что динамические свойства этой краевой задачи с комплексными коэффициентами существенно сложнее (см., например, [43]) чем у краевых задач (37), (38) и (39), (40) с вещественными коэффициентами. В частности, в (46), (47) могут наблюдаться такие структуры, как ведущие центры, спиральные волны и др.

2.4. Построение квазинормальной формы при малых значениях параметра σ

Здесь предполагаем, что для параметра σ выполнено условие (23). Функция $\gamma(z)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ имеет вид $\gamma(z) = |\exp(iz)| \equiv 1$, поэтому $\gamma_0 = 1$, а значение z_0 – произвольно. В этом состоит основное отличие от условий разделов 2.2 и 2.3.

Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая, когда $0 < a^2 < 2$. Для величин ω_0 и p_0 верны формулы из разд. 1.

Сформулируем результат об асимптотике корней характеристического уравнения (18) в случае (23), (28) и (35).

Фиксируем произвольно значение z и рассмотрим все те целые K , для которых $K = \{z\varepsilon^{-1} + \theta_z + k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Просто проверяется то, что для каждого z характеристическое уравнение (18) имеет корни $\lambda_{zkn}(\varepsilon) (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ с асимптотикой

$$\lambda_{zkn}(\varepsilon) = i\omega_0 \varepsilon^{-1} + ic^{-1} R_{zn} + \varepsilon \lambda_{1zkn} + \varepsilon^2 \lambda_{2zkn} + \dots, \tag{48}$$

где

$$\begin{aligned} R_{zn} &= z + 2\pi n + \theta_\omega - \Omega_0, \\ \lambda_{1zkn} &= (i(\theta_z + k) + iR_0 R_{zn})c^{-1}, \\ R_0 &= (2\omega_0 - ia)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1} = -2a^{-1}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\lambda_{2zkn} = \frac{1}{2}(c\lambda_{1zkn} - i(\theta_z + k))^2 + d_1 c^{-1} p_0^{-1} + c^{-1}(-c^{-2} R_{zn}^2 + (2i\omega_0 + a)\lambda_{1zkn})(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}.$$

Обратим внимание, что в формулах (48), (49) значение z – любое вещественное. Фиксируем произвольно $\Delta > 0$ и z^0 . Рассмотрим множество чисел

$$z_m = \left\{ z^0 + \frac{2\pi}{\Delta} m; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

В предыдущих разделах со значением z_0 была связана совокупность целых чисел $K_{z_0} = \{z_0 \varepsilon^{-1} + \theta_z + k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Здесь аналогично определим совокупности целых чисел K_{z_m} , которые связаны со значениями z_m следующими соотношениями:

$$K_{z_m} = \{z^0 \varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + z_m \varepsilon^{-1} + \theta_{z_m} + k; k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Заметим, что использование для разных z_m различных значений θ_{z_m} неудобно. Поэтому введем такое значение $\theta_\Delta = \theta_\Delta(\varepsilon) \in [0, 1)$, которое дополняет до целого величину $2\pi(\Delta\varepsilon^{-1})$. Тогда в качестве θ_{z_m} можно взять $m\theta_\Delta$. Здесь уже не требуем, чтобы эта величина лежала в полуинтервале $[0, 1)$.

В (48), (49) предполагаем, что значения z пробегает всю совокупность значений для всех m множества K_{z_m} .

Подставим соответствующие значения z в (48), (49). Тогда получим асимптотическое представление для некоторой совокупности $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$ корней уравнения (18), зависящих от произвольного параметра Δ

$$\lambda_{mkn}(\varepsilon) = i\omega_0 \varepsilon^{-1} + ic^{-1} R_{mn} + \varepsilon \lambda_{1mkn} + \varepsilon^2 \lambda_{2mkn} + \dots, \quad (50)$$

где

$$R_{mn} = z^0 + 2\pi\Delta^{-1}m + 2\pi n + \theta_\omega - \Omega_0,$$

$$c\lambda_{1mkn} = i(\theta_{z^0} + m\theta_\Delta + k) + iR_0 R_{mn},$$

$$c\lambda_{2mkn} = \frac{1}{2}(c\lambda_{1mkn} - i(\theta_{z^0} + m\theta_\Delta + k))^2 + d_1 p_0^{-1} + ((2i\omega_0 + a)\lambda_{1mkn} - c^{-2} R_{mn}^2)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}.$$

Каждому корню (50) отвечает решение Эйлера краевой задачи (17), (16)

$$u_{mkn}(t, x, \varepsilon) = \exp[i(z^0 \varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + 2\pi m(\Delta\varepsilon)^{-1} + m\theta_\Delta + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t].$$

Формальное выражение для произвольной линейной комбинации таких решений

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mkn} \exp[i(z^0 \varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + 2\pi m(\Delta\varepsilon)^{-1} + m\theta_\Delta + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t]$$

можно записать в виде

$$u(t, x) = E(t, x) \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mkn}(\tau) \exp[i2\pi n x_1 + i k x_2 + i m x_3],$$

где

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad x_1 = (1 + \varepsilon c^{-1} R_0)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-1} t,$$

$$x_3 = (2\pi(\Delta\varepsilon)^{-1} + \theta_\Delta)(x + \varepsilon(1 + \varepsilon c^{-1} R_0)2\pi\Delta^{-1}t),$$

$$\xi_{mkn}(\tau) = \exp((\lambda_{2mkn} + O(\varepsilon))\tau),$$

$$E(t, x) = \exp[i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + (\theta_\omega - \Omega_0 c^{-1} + \theta_{z^0})(1 + \varepsilon c^{-1} R_0))t + i(z^0 \varepsilon^{-1} + \theta_{z^0})x].$$

Отсюда получаем, что

$$u(t, x) = E(t, x)\xi(\tau, x_1, x_2, x_3),$$

а $\xi_{mkn}(\tau)$ – коэффициенты Фурье функции $\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)$.

Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем тогда в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)E(t, x) + \bar{c}c) + \varepsilon^3(E^3(t, x)u_{31}(\tau, x_1, x_2, x_3) + \bar{c}c) + \dots, \tag{51}$$

где $\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)$ – неизвестные амплитуды, зависимость от t, x_1, x_2 и x_3 в (51) – периодическая. Подставим (51) в (15). Совершая стандартные действия, находим выражение для u_{31} и уравнение относительно $\xi(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$, $\tilde{x}_2 = x_2 - R_0\tau$:

$$\begin{aligned} u_{31} &= [1 - 9\omega_0^2 + 3ia\omega_0 - p_0 \exp(-3i(\Omega_0 + \theta_{z^0}))]^{-1}[-b_1 - 3i\omega_0 + 9\omega_0^2 + 27\omega_0^3]\xi^3, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= (A_0(a) + iA_1(a))\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + (A_0(a) + iA_1(a) + \sigma^2)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} + 2(A_0(a) + iA_1(a))\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_3} + \\ &+ 2i\left(A_0(a) + iA_1(a) + \frac{1}{2}R_0\right)\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + [2i(A_0(a) + iA_1(a)) - \sigma^2 z^0 - \Delta R_0 \theta_{\Delta} \pi^{-1} + R_0]\frac{\partial \xi}{\partial x_3} + \\ &+ [-(A_0(a) + iA_1(a))(z^0 + \theta_{\omega} - \Omega_0)^2 - \sigma^2 z_0^2 + iR_0(\theta_{\omega} - \Omega_0 + z^0) - iR_0 \theta_{z^0}]\xi + b_0 \xi |\xi|^2. \end{aligned} \tag{52}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_0(a) &= \left(2\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1} \left[\left(a^2\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1} - 1\right], \\ A_1(a) &= \left(a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

а через $\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$ обозначена функция

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) &= \xi(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) \exp(-iR_0 c^{-1} \theta_{z^0} \tau), \\ b_0 &= 3b_1 - ib_2 \omega_0 - b_3 \omega_0^2 + 3i\omega_0^3 b_4. \end{aligned}$$

Относительно аргументов x_1, \tilde{x}_2 и x_3 выполнены условия периодичности ($\tilde{x} = x - R_0\tau$)

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1 + c, \tilde{x}_2, x_3) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3), \tag{53}$$

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2 + 2\pi, x_3) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3), \tag{54}$$

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3 + \Delta) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3). \tag{55}$$

Отметим, что переход от аргумента x_2 к аргументу \tilde{x}_2 и от функции ξ к функции $\tilde{\xi}$ позволил исключить из (52) выражения $-R_0 \partial \xi / \partial x_2$ и $iR_0 \theta_{z^0} \xi$ соответственно.

Для того, чтобы сформулировать итоговый результат, введем обозначения. Фиксируем произвольно $\theta_0 \in [0, 2\pi c^{-1})$ и пусть последовательность $\varepsilon_s = \varepsilon_s(\theta_0)$ определяется из условия $\varepsilon_s(\theta_0) = \theta_0, s = 1, 2, \dots$. Обозначим через $\Gamma(\theta_0)$ все предельные точки из промежутка $[0, 1]$ последовательности $\theta_{\Delta}(\varepsilon_s(\theta_0))$. Через θ_{Δ}^0 обозначим произвольный элемент из $\Gamma(\theta_0)$ и пусть последовательность $\varepsilon_{s_{\Gamma}}$ такова, что

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \theta_{\Delta}(s_{\Gamma}) = \theta_{\Delta}^0.$$

Заметим, что возможна ситуация, когда множество Γ совпадает с отрезком $[0, 1]$, а возможен случай, когда это множество состоит из одного элемента.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия (23), (28), (34). Фиксируем произвольно значение Δ и $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, и $\theta_{\Delta}^0 \in \Gamma$. Пусть $\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, x_1 \in [0, 2\pi], \tilde{x}_2 \in [0, c], x_3 \in [0, \Delta]$ решение краевой задачи (52), (53)–(55). Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) \exp(-ic^{-1} R_0 \theta_{z^0} \tau) E(t, x) + \bar{c}c) + \varepsilon^3(u_{31}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) E^3(t, x) + \bar{c}c)$$

при $\tau = \varepsilon^2 t$, $x_1 = (1 + \varepsilon c^{-1} R_0)t$, $\tilde{x}_2 = x + \varepsilon c^{-1} t$, $x_3 = (2\pi(\Delta\varepsilon)^{-1} + \theta_\Delta)(x + \varepsilon(1 + \varepsilon c^{-1} R_0)2\pi\Delta^{-1}t)$, удовлетворяет на последовательности $\varepsilon = \varepsilon_{\sigma^r}$ краевой задаче (15), (16) с точностью до $o(\varepsilon_{\sigma^r}^3)$.

Таким образом, краевая задача (52), (53)–(55) является квазинормальной формой для исходной краевой задачи (15), (16). Отметим, что в явном виде зависимость от аргумента \tilde{x}_2 в (52) не присутствует. Относительно аргументов x_1 и x_3 выполнены условия параболичности, поскольку $A_0(a) > 0$ при $0 < a^2 < 2$ ($A_0(\sqrt{2}) = 0$). Решения краевой задачи в двумерной пространственной области могут быть существенно сложнее. Поэтому приходим к выводу о том, что уменьшение параметра σ в (9) влечет за собой усложнение динамики. Кроме этого, присутствие в (52) двух параметров $\theta_\omega(\varepsilon)$ и $\theta_\Delta(\varepsilon)$ говорит о повышенной чувствительности динамических свойств даже при малых изменениях параметра ε (см., например, [44]).

И еще одно важное наблюдение. В краевой задаче параметр Δ , определяющий период по аргументу x_3 , является произвольным. При всех его значениях квазинормальная форма (52), (53)–(55) определяет главные асимптотики решений исходной задачи (15), (16). Поэтому можно говорить о мультистабильности в рассматриваемой ситуации.

3. ЦЕПОЧКИ С ДВУСТОРОННЕЙ СВЯЗЬЮ

В этом разделе предполагаем, что основной вклад во взаимодействие элементов цепочки определяется, согласно (8), связью с ближайшими соседними элементами слева и справа. В терминах функции $F(s, \varepsilon)$ тогда имеем

$$F(s, \varepsilon) = \frac{1}{2}(F_+(s, \varepsilon) + F_-(s, \varepsilon)).$$

В характеристическом уравнении (18) имеем равенство

$$g(z) = \cos z. \quad (56)$$

Рассмотрим отдельно случай, когда параметр σ в (18) фиксирован и выполнено условие (22). Случай, когда параметр σ является асимптотически малым, исследуется в п. 3.3.

3.1. Случай $a^2 > 2$

Пусть выполнено неравенство $a^2 > 2$. В этой ситуации имеем $z_0 = 0$ и $\gamma(z_0) = \gamma_0 = 1$. Критический в задаче об устойчивости случай определяется соотношениями

$$d_0 = p_0 \quad \text{при} \quad d_0 > 0 \quad \text{и} \quad d_0 = -p_0 \quad \text{при} \quad d_0 < 0.$$

Достаточно ограничиться рассмотрением одного из этих случаев. Ниже считаем, что $d_0 > 0$, а значит,

$$d_0 = p_0 = 1.$$

Пусть, как и ранее, для параметра d в (18) выполнено равенство (25). Асимптотика корней (18) приведена в лемме 1.1.

Совокупность решений, отвечающих $\lambda_{kn}^+(\varepsilon)$ и $\lambda_{kn}^-(\varepsilon)$, можно представить в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^+ \exp(2\pi c^{-1} n i x_1 + i k x_2 + (\lambda_{2kn}^+ + O(\varepsilon))\tau) = \xi^+(\tau, x_1, x_2),$$

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^- \exp(\pi(2n+1)c^{-1} i x_1 + i k x_2 + (\lambda_{2kn}^- + O(\varepsilon))\tau) = \xi^-(\tau, x_1, x_2).$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, $x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1} a)t$, $x_2 = x$. Тогда решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi^+(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x_1, x_2) + \dots$$

или соответственно

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi^-(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x_1, x_2) + \dots$$

Подставляя это выражение в (15) и собирая коэффициенты при ε^3 , приходим к уравнению относительно ξ^+ или ξ^- :

$$c \frac{\partial \xi^+}{\partial \tau} = \left(\frac{a^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_1^2} + \left(\frac{1}{2} + \sigma^2 \right) \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_2^2} - c^{-2} a^2 \frac{\partial \xi^+}{\partial x_1} + d_1 \xi - b_1 (\xi^+)^3, \quad (57)$$

$$c \frac{\partial \xi^-}{\partial \tau} = \left(\frac{a^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_1^2} + \left(\frac{1}{2} + \sigma^2 \right) \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_2^2} - c^{-2} a^2 \frac{\partial \xi^-}{\partial x_1} + d_1 \xi - b_1 (\xi^-)^3 \quad (58)$$

с краевыми условиями

$$\xi^+(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x_2 + 2\pi), \quad (59)$$

$$-\xi^-(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x_2 + 2\pi). \quad (60)$$

В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $a^2 > 2$ и выполнено условие (22). Пусть $\xi^+(\tau, x_1, x_2)$ ($\xi^-(\tau, x_1, x_2)$) – ограниченные при $\tau \rightarrow \infty$, $x_1 \in [0, c]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ решения краевой задачи (57), (59) ((58), (60)). Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon (\xi^+(\tau, x_1, x_2) + \xi^-(\tau, x_1, x_2))$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

Таким образом, при условиях (22) и $a^2 > 2$ краевая задача (57)–(60) является квазинормальной формой для (15), (16).

3.2. Квазинормальная форма в случае $0 < a^2 < 2$

Пусть

$$0 < a^2 < 2. \quad (61)$$

Сначала отметим, что из условия (22) следует

$$z_0 = 0.$$

Напомним, что

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{a^2}{2} \right)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{a^2}{2} \left(4 - \frac{a^2}{2} \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad d_0 = p_0.$$

Важную роль в процессе применения алгоритма построения квазинормальной формы играет асимптотическое поведение корней характеристического уравнения (18), которое приведено в лемме 2.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (22), (56), (61) и $d_0 = p_0$ ($d_0 = -p_0$). Тогда для тех корней $\lambda_{kn}^+(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}_{kn}^+(\varepsilon)$ ($\lambda_{kn}^-(\varepsilon)$, $\bar{\lambda}_{kn}^-(\varepsilon)$) $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{kn}^+(\varepsilon) = i \frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0 + 2\pi n c^{-1} + \varepsilon \lambda_{1kn}^+ + \varepsilon^2 \lambda_{2kn}^+ + \dots,$$

$$\lambda_{kn}^-(\varepsilon) = i \frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1} + \varepsilon \lambda_{1kn}^- + \varepsilon^2 \lambda_{2kn}^- + \dots,$$

где

$$\lambda_{1kn}^+ = -i R_0 c^{-1} (2\pi n c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0), \quad \lambda_{1kn}^- = -i R_0 c^{-1} (\pi(2n+1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0),$$

$$R_0 = (p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}(2i\omega_0 + a) = \frac{2}{a},$$

$$\lambda_{2kn}^+ = -\Delta(2\pi n c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2 (2\pi n c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) - \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)c^{-1}k^2 + c^{-1}\frac{d_1}{p_0},$$

$$\lambda_{2kn}^- = -\Delta(\pi(2n+1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2 (\pi(2n+1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) - \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)c^{-1}k^2 + c^{-1}\frac{d_1}{p_0},$$

$$\Delta = 4[a^2(4 - a^2)]^{-1}(2 - a^2) + 4i[a(4 - a^2)]^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}.$$

Совокупность решений линейной краевой задачи (17), (16) в рассматриваемом случае, отвечающих корням $\lambda_{kn}^+(\epsilon)$ ($\lambda_{kn}^-(\epsilon)$), можно представить в виде

$$u(t, x, \epsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^+ \exp(ikx + \lambda_{kn}^+(\epsilon)t) = E(t) \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^+(\tau) \exp(ikx + 2\pi n i c^{-1} x_1) = E(t) \xi_{kn}^+(\tau, x_1, x),$$

$$(u(t, x, \epsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^- \exp(ikx + \lambda_{kn}^-(\epsilon)t) =$$

$$= E(t) \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^-(\tau) \exp(ikx + \pi(2n+1)c^{-1}ix_1) = E(t) \xi_{kn}^-(\tau, x_1, x)),$$

где

$$E(t) = \exp\left[i\left(\frac{\omega_0}{\epsilon} + (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)(1 - \epsilon c^{-1}R_0)\right)t\right], \quad x_1 = (1 - \epsilon c^{-1}R_0)t,$$

$$\xi_{kn}^\pm(\tau) = \xi_{kn}^\pm \exp((\lambda_{kn}^\pm + O(\epsilon))\tau), \quad \tau = \epsilon^2 t.$$

Тогда решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем соответственно в виде

$$u(t, x, \epsilon) = \epsilon[E(t)\xi^+(\tau, x_1, x) + \bar{c}c] + \epsilon^3[E(t)u_{31}^+(\tau, x_1, x) + \bar{c}c + E^3(t)u_{32}^+(\tau, x_1, x) + \bar{c}c] + \dots, \tag{62}$$

$$u(t, x, \epsilon) = \epsilon[E(t)\xi^-(\tau, x_1, x) + \bar{c}c] + \epsilon^3[E(t)u_{31}^-(\tau, x_1, x) + \bar{c}c + E^3(t)u_{32}^-(\tau, x_1, x) + \bar{c}c] + \dots \tag{63}$$

Здесь вещественные комплексные функции $\xi^\pm(\tau, x_1, x)$ являются 2π -периодическими по x , а по x_1 функция $\xi^+(\tau, x_1, x)$ c -периодическая, а функция $\xi^-(\tau, x_1, x)$ c -антипериодическая:

$$\xi^+(\tau, x_1 + c, x) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x + 2\pi),$$

$$-\xi^-(\tau, x_1 + c, x) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x + 2\pi).$$

Подставляя (62) в (15) и совершая стандартные действия, получаем уравнения для u_{31}^\pm и u_{32}^\pm . Функции u_{32}^\pm просто определяются:

$$u_{32}^\pm = -(1 - 9\omega_0^2 + 3i\omega_0 a)^{-1}(b_1 + 3i\omega_0 b_2 - 9\omega_0^2 b_3 - 27i\omega_0^3 b_4)(\xi^\pm)^3.$$

Условие разрешимости уравнения относительно u_{31}^\pm заключается в выполнении равенства

$$cp_0 \frac{\partial \xi^\pm}{\partial \tau} = \Delta \frac{\partial^2 \xi^\pm}{\partial x_1^2} + i \left[2(\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) + ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2 \right] \frac{\partial \xi^\pm}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right) \frac{\partial^2 \xi^\pm}{\partial x^2} + \left[\frac{d_1}{p_0} - (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - i\left(\frac{2}{a}\right)^2 (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) \right] \xi^\pm + 3\beta_1 \xi^\pm |\xi^\pm|^2, \tag{64}$$

$$\beta_1 = (b_1 + i\omega_0 b_2 - \omega_0^2 b_3 - i\omega_0^3 b_4)$$

и выполнено соответственно условие

$$\begin{aligned} \xi^+(\tau, x_1 + c, x) &\equiv \xi^+(\tau, x_1, x) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x + 2\pi), \\ -\xi^-(\tau, x_1 + c, x) &\equiv \xi^-(\tau, x_1, x) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x + 2\pi). \end{aligned} \tag{65}$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия (22), (56) и (61). Пусть $\theta_\omega^0 \in [0, 2\pi)$ – произвольно фиксировано и $\varepsilon_n(\theta_\omega^0)$ такая последовательность, что $\varepsilon_n(\theta_\omega^0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\theta_\omega(\varepsilon_n(\theta_\omega^0)) = \theta_\omega^0$. Пусть $\xi(\tau, x_1, x)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, x_1 \in [0, c], x \in [0, 2\pi]$ решение краевой задачи (64), (65) при $\theta_\omega = \theta_\omega^0$. Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_n(\theta_\omega^0), \tau = \varepsilon^2 t, x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1} R_0)t$ функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x)E(t) + \bar{c}c) + \varepsilon^3(u_{32}(\tau, x_1, x)E^3(t) + \bar{c}c)$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

3.3. Квазинормальная форма для малых значений параметра σ

Предположим, что параметр σ является достаточно малым, т.е. выполнено равенство (23)

$$\sigma = \varepsilon \sigma_1.$$

Для функции $g(z)$ в этом случае имеем равенство

$$g(z) = \cos z \exp(-\varepsilon^2 \sigma_1^2 z^2).$$

Наибольшее значение $|g(z)|$ равно 1, а все величины z_m , на которых это значение достигается с точностью до $O(\varepsilon^2)$, определяются неоднозначно:

$$z_m = \pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Через $\theta_\pi(\varepsilon) \in [0, 1)$ обозначим такое выражение, которое дополняет до целого величину $\pi\varepsilon^{-1}$.

Рассмотрим решения Эйлера $u_{mkn}(t, x, \varepsilon)$ линейной краевой задачи (17), (16), у которых моды принимают значения $(\pi\varepsilon^{-1} + \theta_\pi)m + k; m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$u_{mkn}(t, x, \varepsilon) = \exp[i((\pi\varepsilon^{-1} + \theta_\pi)m + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t].$$

Здесь $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$ – все те корни характеристического уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сформулируем результат об асимптотике корней $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда $d_0 > 0$ и выполнены неравенства $0 < a^2 < 2$. Напомним, что в этой ситуации

$$d_0 = p_0, \quad p_0 = \frac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, \quad \omega_0 = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}.$$

Лемма 3.2. Пусть выполнены условия (23), (56) и (61) и $d_0 = p_0$. Тогда уравнение (18) имеет совокупность корней $\lambda_{mkn}^\pm(\varepsilon), \bar{\lambda}_{mkn}^\pm(\varepsilon)$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ и выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{mkn}^\pm(\varepsilon) = i[\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0 + 2\pi n c^{-1}] + \varepsilon \lambda_{1mkn}^\pm + \varepsilon^2 \lambda_{2mkn}^\pm + \dots,$$

где

$$\lambda_{1mkn}^\pm = -\frac{2i}{a} c^{-1} K, \quad K = \theta_\omega - \Omega_0 c^{-1} + 2\pi n c^{-1},$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2mkn}^+ &= \frac{1}{2}(\lambda_{1mkn}^+)^2 - c^{-1}(2i\omega_0 + a)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1} \lambda_{1mkn}^+ + (p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1} c^{-1} K^2 + \\ &+ d_1 p_0^{-1} c^{-1} - \sigma_1^2 (2\pi m)^2 c^{-1} - \frac{1}{2}(2\pi m \theta_\pi + k)^2 c^{-1}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{2mkn}^- = \frac{1}{2}(\lambda_{1mkn}^-)^2 - c^{-1}(2i\omega_0 + a)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}\lambda_{1mkn}^- + (p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}c^{-1}K^2 + \\ + d_1 p_0^{-1} c^{-1} - \sigma_1^2 (\pi(2m-1))^2 c^{-1} - \frac{1}{2}(\pi(2m-1)\theta_\pi + k)^2 c^{-1}.$$

Совокупность решений $u_{mkn}(\varepsilon)$ линейной краевой задачи (17), (16), отвечающих корням $\lambda_{mkn}^\pm(\varepsilon)$, можно записать в виде

$$u_{mkn}(t, x, \varepsilon) = \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \left(\xi_{mkn}^+ \exp\left(i\left[2\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi\right)m + k\right]x + \left[i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + 4\pi n c^{-1} - \frac{2\varepsilon}{a}(\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + 4\pi n c^{-1}) + \varepsilon^2(\lambda_{2mkn}^+ + O(\varepsilon))\right)t\right]\right) + \xi_{mkn}^- \exp\left(i\left[\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi\right)(2m-1) + k\right]x + \left[i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1} - \frac{2\varepsilon}{a}(\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1}) + \varepsilon^2(\lambda_{2mkn}^- + O(\varepsilon))\right)t\right]\right) \right) = E(t, \varepsilon) \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \left(\xi_{mkn}^+(\tau) \exp(ikx + 2inc^{-1}x_1 + 2imx_2) + \xi_{mkn}^-(\tau) \exp(ikx + i(2n+1)c^{-1}x_1 + i(2m-1)x_2) \right) = E(t, \varepsilon)(\xi^+(\tau, x, x_1, x_2) + \xi^-(\tau, x, x_1, x_2)).$$

Здесь

$$E(t, \varepsilon) = \exp\left(i\left[\frac{\omega_0}{\varepsilon} + (\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2ac}\right)\right]t\right), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \\ x_1 = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{ac}\right)t, \quad x_2 = \left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi\right)x - \frac{2\varepsilon}{ac}t, \\ \xi_{mkn}^\pm(\tau, x, x_1, x_2) = \xi_{mkn}^\pm \exp(\lambda_{2mkn}^\pm + O(\varepsilon))\tau.$$

Обратим внимание, что для функций $\xi^\pm(\tau, x, x_1, x_2)$ выполнены условия

$$\xi^\pm(\tau, x + 2\pi, x_1, x_2) = \xi^\pm(\tau, x, x_1, x_2), \quad (66)$$

$$\xi^+(\tau, x, x_1 + 2\pi, x_2) \equiv \xi^+(\tau, x, x_1, x_2) \equiv \xi^+(\tau, x, x_1, x_2 + 2\pi), \quad (67)$$

$$-\xi^-(\tau, x, x_1 + \pi, x_2) \equiv \xi^-(\tau, x, x_1, x_2) \equiv -\xi^-(\tau, x, x_1, x_2 + \pi). \quad (68)$$

Решение нелинейной краевой задачи в рассматриваемом случае ищем в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(E(t, \varepsilon)(\xi^+(\tau, x, x_1, x_2) + \xi^-(\tau, x, x_1, x_2)) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 u_3(t, x, x_1, x_2, \tau) + \dots, \quad (69)$$

где зависимость от t, x, x_1 и x_2 – периодическая. Подставляя (8) в (15) и производя стандартные действия, получаем уравнение для определения u_3 . Условие разрешимости этого уравнения в указанном классе функций состоит в выполнении равенств

$$cp_0 \frac{\partial \xi^+}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x^2} + \frac{\Delta}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_1^2} + \left[\frac{\Delta}{4\pi^2} + \sigma_1^2 + \theta_\pi^2 \right] \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_2^2} + \\ + 2 \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x \partial x_2} + \frac{\Delta}{2\pi^2} \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_1 \partial x_2} + i \left[2(\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0) + i \left(\frac{2}{ac}\right)^2 \right] \frac{\partial \xi^+}{\partial x_1} + \\ + \left[\frac{d_0}{p_0} - (\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0)^2 - i \left(\frac{2}{ac}\right)^2 (\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0) \right] \xi^+ + 3\beta_1 \left[(\xi^+)^2 \bar{\xi}^+ + 2\xi^+ |\xi^-|^2 + \bar{\xi}^+ (\xi^-)^2 \right], \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
cp_0 \frac{\partial \xi^-}{\partial \tau} = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x^2} + \frac{\Delta}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_1^2} + \left[\frac{\Delta}{4\pi^2} + \sigma_1^2 + \theta_\pi^2 \right] \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x \partial x_2} + \frac{\Delta}{2\pi^2} \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_1 \partial x_2} + \\
& + i \left[2(\theta_\omega - c^{-1} \Omega_0) + i \left(\frac{2}{ac} \right)^2 \right] \frac{\partial \xi^-}{\partial x_1} + \left[\frac{d_0}{p_0} - (\theta_\omega - c^{-1} \Omega_0)^2 - i \left(\frac{2}{ac} \right)^2 (\theta_\omega - c^{-1} \Omega_0) \right] \xi^- + \\
& + 3\beta_1 \left[\bar{\xi}^- (\xi^-)^2 + 2\xi^- |\xi^+|^2 + \bar{\xi}^- (\xi^+)^2 \right].
\end{aligned} \tag{71}$$

При выполнении соотношений (66)–(71) функция u_3 просто находится в явном виде. Из-за громоздкости соответствующую формулу не приводим. Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия (23), (56), (61) и $d_0 = p_0$. Фиксируем произвольно значения θ_ω^0 и θ_π^0 . Пусть последовательность $\varepsilon_r \rightarrow 0$ такова, что $\theta_\omega(\varepsilon_r) \rightarrow \theta_\omega^0$ и $\theta_\pi(\varepsilon_r) \rightarrow \theta_\pi^0$. Пусть $\xi^\pm(\tau, x, x_1, x_2)$ – ограниченные при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $x_1 \in [0, 2\pi]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ решения краевой задачи (66)–(71) для $\theta_\omega = \theta_\omega^0$, $\theta_\pi = \theta_\pi^0$. Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_r$ функция

$$\begin{aligned}
u(t, x, \varepsilon) = & \varepsilon((\xi^+(\tau, x, x_1, x_2) + \xi^-(\tau, x, x_1, x_2))E(t, \varepsilon) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 u_3, \\
\tau = \varepsilon^2 t, \quad & x_1 = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{ac}\right)t, \quad x_2 = \left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi^0\right)x - \frac{2\varepsilon}{ac}t,
\end{aligned}$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

Это утверждение говорит о том, что краевая задача (66)–(71) является квазинормальной формой для исходной краевой задачи в рассматриваемом случае.

Отметим, что эта квазинормальная форма является системой параболического типа.

ВЫВОДЫ

Рассмотрен вопрос о локальной динамике интегродифференциального уравнения Ван дер Поля, возникающего в задаче о поведении решений цепочек с односторонними и двусторонними запаздывающими связями. Большое запаздывание позволило эффективно находить параметры для реализации критических случаев и исследовать эти случаи. Показано, что исходная задача при этом сводится к квазинормальной форме – нелинейной краевой задаче Гинзбурга–Ландау параболического типа. Более того, установлено, что квазинормальная форма содержит не одну, а две независимые пространственные переменные [43]. Это говорит о богатой динамике изучаемых процессов. Кроме этого показано, что полученные квазинормальные формы в наиболее интересной области параметров обладают большой чувствительностью к изменениям малого параметра задачи – к величине, обратной большому запаздыванию. Это следует из того, что в квазинормальной форме присутствуют быстро меняющиеся функции типа $\theta(\varepsilon)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ может происходить процесс прямых и обратных бифуркаций [44].

Важную роль играет параметр σ , фигурирующий в функциях $F_\pm(s, \varepsilon)$. При уменьшении этого параметра может наблюдаться существенное усложнение динамики, поскольку соответствующие квазинормальные формы содержат уже не две, а три пространственные переменные. В случае $a^2 > 2$ структура решений проще по сравнению со случаем $0 < a^2 < 2$. В последнем случае квазинормальные формы являются комплексными, а колебания их решений – быстро осциллирующими по пространственной и временной переменным.

Важно подчеркнуть, что по решениям (нелокальным) квазинормальные формы определяют главные члены асимптотики решений исходного уравнения.

Отличия квазинормальных форм для односторонних и двусторонних связей существенные. Различается не только формульная часть, но и динамические свойства решений. Особенно ярко это проявляется в случае $\sigma \ll 1$. При односторонних связях квазинормальные формы представляют собой однопараметрическое семейство параболических краевых задач с двумя пространственными переменными. В случае двусторонних связей показано, что квазинормальной формой являются система 1 или 2 параболических уравнений с тремя пространственными переменными. Во многих случаях решения содержат быстро осциллирующие не только по времени, но и по пространственной переменной составляющие.

Выбор уравнения с кубической нелинейностью в качестве базового не принципиален. Отсутствие квадратичных нелинейных слагаемых удобно, поскольку немного упрощается формульная часть. Отметим, что отношение двух больших параметров N и T определяется величиной c : $N/T = 2\pi/c$. Параметр c входит во все квазинормальные формы, поэтому во многом определяет их динамику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Physics Letters A*. 2013. V. 377. № 45–48. P. 3291–3295.
2. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Physical Review E*. 1997. V. 55. № 3. P. 2353–22361.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001. P. 411. (Cambridge Nonlinear Science Series; 12).
4. *Dodla R., Sen A., Johnston G.L.* Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators // *Physical Review E*. 2004/07/13. American Physical Society, 2004. V. 69. № 5. P. 12.
5. *Williams C.R.S., Sorrentino F., Murphy T.E., Roy R.* Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2013. V. 23. № 4. P. 43117.
6. *Rao R., Lin Z., Ai X., Wu J.* Synchronization of Epidemic Systems with Neumann Boundary Value under Delayed Impulse // *Mathematics*, 2022. V. 10. P. 2064.
<https://doi.org/10.3390/math10122064>
7. *Van Der Sande G. et al.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // *Physical Review E*. 2008/07/23. APS, 2008. V. 77. № 5. P. 55202.
8. *Клиньшов В.В., Некоркин В.И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // *Успехи физических наук*. 2013. Т. 183. № 12. С. 1323–1336.
9. *Heinrich G., Ludwig M., Qian J., Kubala B., Marquardt F.* Collective dynamics in optomechanical arrays // *Phys. Rev. Lett.*, 2011. V. 107. № 4, 043603, 4 pp.
10. *Zhang M., Wiederhecker G.S., Manipatruni S., Barnard A., McEuen P., Lipson M.* Synchronization of micromechanical oscillators using light // *Phys. Rev. Lett.*, 2012. V. 109. № 23, 233906, 5 pp.
11. *Lee T.E., Sadehpour H.R.* Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.*, 2013. V. 111. № 23, 234101, 5 pp.
12. *Yanchuk S., Wolfrum M.* Instabilities of stationary states in lasers with longdelay optical feedback // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2012. V. 9. № 2. P. 519–535.
13. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A.* Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Proceedings : 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98, Crans-Montana, Switzerland, Sept. 14–17, 1998)*. NOLTA Society. 1998. P. 495–498.
14. *Kashchenko S.A.* Quasinormal Forms for Chains of Coupled Logistic Equations with Delay // *Mathematics*. 2022. V. 10. № 15. P. 2648.
15. *Кащенко С.А.* Динамика цепочки логистических уравнений с запаздыванием и с антидиффузионной связью // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2022. Т. 502. № 1. С. 23–27.
16. *Thompson J.M.T., Stewart H.B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd ed. Wiley, 2002. P. 464.
17. *Kashchenko S.A.* Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. V. 31. № 3. P. 033147.
18. *Kanter I., Zigzag M., Englert A., Geissler F., Kinzel W.* Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor // *Europhysics Letters*. 2011. V. 93. № 6. P. 60003.
19. *Rosin D.P., Rontani D., Gauthier D.J., Schöll E.* Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 2013. V. 110. № 10. P. 104102.
20. *Yanchuk S., Perlikowski P., Popovych O.V., Tass P.A.* Variability of spatiotemporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. V. 21. № P. 47511.
21. *Klinshov V., Nekorkin V.* Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling // *Cybernetics and Physics*. 2012. V. 1. № 2. P. 106–112.
22. *Stankovski T., Pereira T., McClintock P.V.E., Stefanovska A.* Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms // *Rev. Mod. Phys.* 2017. V. 89. № P. 045001.
23. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S. et al.* Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // *Physical Review E*. 2017. V. 96. № P. 042217.

24. *Караваяев А.С., Ишбулатов Ю.М., Киселев А.Р., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Миронов С.А., Шварц В.А., Гриднев В.И., Безручко Б.П.* Модель сердечно-сосудистой системы человека с автономным контуром регуляции среднего артериального давления // Физиология человека. 2017. Т. 43. № 1. С. 70–80.
25. *Kashchenko A.A.* Dependence of the dynamics of a model of coupled oscillators on the number of oscillators // Doklady Mathematics. Moscow : Pleiades Publishing, 2021. V. 104. № 3. P. 355–359.
26. *Kashchenko A.A.* Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. V. 93. P. 105488.
27. *Kashchenko S.A.* Corporate Dynamics in Chains of Coupled Logistic Equations with Delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. V. 61. № 7. P. 1063–1074.
28. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. May. V. 34. P. 123–129.
29. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. V. 5. № P. 380–385.
30. *Kashchenko S.A.* Application of the normalization method to the study of the dynamics of a differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative // Differentsialnye Uravneniya. 1989. V. 25. № 8. P. 1448–1451.
31. *Kashchenko S.A.* Van der Pol Equation with a Large Feedback Delay // Mathematics. 2023. V. 11. № 6. P. 1301.
32. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations, 2nd ed.; New York: Springer, 1977.
33. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations; Wiley: New York, NY, USA, 1965.
34. *Marsden J.E., McCracken M.F.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York : Springer, 1976. 421 p. (Applied Mathematical Sciences; 19).
35. *Kashchenko S.A.* On quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion // Soviet Mathematics. Doklady. 1988. V. 37. № 2. P. 510–513.
36. *Kashchenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1996. V. 6. № 6. P. 1093–1109.
37. *Kashchenko S.A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. V. 38. № 3. P. 443–451.
38. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30. № 2. С. 189–207.
39. *Kashchenko S.A.* Infinite Turing Bifurcations in Chains of Van der Pol Systems // Mathematics. 2022. V. 10. № 20. P. 3769.
40. *Kashchenko S.A.* Bifurcations in spatially distributed chains of twodimensional systems of equations // Russian Mathematical Surveys. 2020. V. 76. № 6. P. 1153–1155.
41. *Kashchenko S.A.* Comparative dynamics of chains of coupled van der Pol equations and coupled systems of van der Pol equations // Theoretical and Mathematical Physics. 2021. V. 207. № 2. P. 640–654.
42. *Клиньшов В.В.* Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т. 28. № 5. С. 465–490.
43. *Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskii G.G., Samarskii A.A.* Nonstationary structures and diffusion chaos. Moscow : Nauka, 1992. 544 p.
44. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Infinite Process of Forward and Backward Bifurcations in the Logistic Equation with Two Delays // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2019. V. 22. № P. 407–412.