МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.633.6

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

УТОЧНЕННЫЕ СХЕМЫ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД[1)]

© 2023 г. В. И. Голубев[1,2,*], И. С. Никитин[2]

[1] 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

[2] 123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19\18,
ИАП РАН Институт автоматизации проектирования РАН, Россия

**e-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru*

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.
Переработанный вариант 16.03.2023 г.
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Для устойчивого численного решения определяющей системы упруговязкопластической модели сплошной среды предложена явно-неявная схема 2-го порядка с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр времени релаксации в знаменателе нелинейных свободных членов. Для согласования порядков аппроксимации явного упругого и неявного корректировочного шагов построена неявная аппроксимация второго порядка для изотропной и анизотропной моделей упруговязкопластической модели сплошной среды. Получены уточненные корректировочные формулы для девиаторов напряжений после “упругого” шага расчета при различных представлениях функции вязкости. Полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений упруговязкопластической системы уравнений допускают предельный переход при стремлении времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений упругопластических систем. Библ. 28. Фиг. 5.

Ключевые слова: математическое моделирование, упруговязкопластические среды, полулинейные гиперболические системы, явно-неявные схемы повышенного порядка.

DOI: 10.31857/S0044466923100046, **EDN:** MHBRTI

1. ВВЕДЕНИЕ

Деформируемую среду, которая в нестационарных процессах нагружения проявляет вязкие свойства за пределом упругости, т.е. обладает динамическим пределом текучести, зависящим от скорости деформаций, называют упруговязкопластической. Одномерная модель такой среды была предложена в работах [1, 2] (модель Соколовского–Малверна). Ее обобщение на многомерный случай выполнено в работах [3, 4].

Определяющие уравнения модели выводятся из аддитивного представления девиатора тензора скоростей деформации в виде суммы упругой и вязкопластической составляющих. Объемная вязкопластическая составляющая при этом равна нулю. Поэтому дифференциальная часть нестационарных систем уравнений упруговязкопластических сред [4–7] совпадает с системой уравнений динамической теории упругости. Однако выражения для девиаторов скоростей вязкопластических деформаций за пределом упругости (пределом текучести) вносят в уравнения для девиаторных компонент напряжений сильно нелинейные свободные члены с характерным временем релаксации τ в знаменателе.

В нестационарных процессах с характерным временем, много большим, чем τ, тем более в квазистатических процессах, упруговязкопластические (УВП) среды ведут себя как упругопластические (УП) [8–10]. То есть при $\tau \to 0$ УВП системы уравнений переходят в системы типа

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 19-71-10060), https://rscf.ru/project/19-71-10060/.

Прандтля—Рейса [9, 10]. С использованием формулировок моделей на основе вариационных неравенств этот факт доказан в монографиях [11, 12].

Однако для существенно нестационарных процессов с характерными временами, меньшими или порядка τ эффекты скоростного упрочнения, резкого роста динамического предела текучести проявляют себя в полной мере [7, 10]. Для их описания требуется использовать полную УВП систему уравнений.

Как уже отмечено, УВП системы уравнений в своей дифференциальной части совпадают с уравнениями динамической упругости, поэтому заведомо являются гиперболическими и приводятся к дивергентному виду, что обеспечивает консервативность сеточно-характеристических и конечнообъемных численных методов решения начально-краевых задач.

В то же время УП системы уравнений, к которым сводятся теории пластического течения, не являются дивергентными. Для построения теории сильных разрывов приходится применять модифицированные формулировки [12, 13], в частности, использовать предельные переходы от УВП к УП обобщенному решению. При этом результат может зависеть от выбора "переходной" УВП модели [13, 14].

Поэтому формулировка существенно нестационарных задач неупругого деформирования в виде УВП системы уравнений, с одной стороны, отражает физику динамических процессов, а с другой стороны, обеспечивает регуляризацию недивергентных УП систем уравнений.

Устойчивое интегрирование определяющих соотношений связи напряжений и деформаций в УВП системах уравнений по явной схеме для малых времен релаксации τ требует более сильного ограничения величины временного шага, нежели обычное курантовское ограничение. Устранить это дополнительное ограничение можно с помощью неявных схем расчета определяющих соотношений ("жесткой" части общей УВП системы уравнений). Важно, что описываемые ниже неявные схемы расчета определяющих уравнений для УВП сред не требуют решения систем алгебраических уравнений, и расчет каждого шага по времени проводится явно с обычным курантовским шагом по времени.

2. ИЗОТРОПНЫЕ И АНИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

2.1. Система уравнений изотропной упруговязкопластической среды

В декартовой прямоугольной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) система уравнений изотропной упруговязкопластической (УВП) среды при малых деформациях имеет вид [4, 7]:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = 2\mu e'_{ij} - 2\mu\frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}\left\langle F\left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s} - 1\right)\right\rangle/\tau, \tag{1}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad e'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij},$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{kk}/3, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где v_i — компоненты вектора скорости, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, s_{ij} — компоненты девиатора напряжений, σ — среднее напряжение, e_{ij} — компоненты тензора скорости деформации, e'_{ij} — компоненты девиатора скорости деформации, $\sqrt{s_{kl}s_{kl}}$ — второй инвариант девиатора напряжений, σ_s — предел текучести, $F(x)$ — нелинейная функция вязкости, описывающая скоростное упрочнение, $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F\rangle = FH(f)$, $H(x)$ — функция Хэвисайда, τ — характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести, ρ — плотность среды, λ и μ — модули упругости Ламе. По повторяющимся индексам происходит суммирование.

2.2. Система уравнений анизотропной упруговязкопластической среды

Системы уравнений анизотропных упруговязкопластических сред возникают при построении континуальных моделей деформируемых сред с дискретным набором плоскостей скольжения (слоистые, блочные среды) и с нелинейными (вязкопластическими) условиями проскальзывания на контактных границах. Такие системы могут быть получены методом асимптотического осреднения [15] или с помощью дискретного варианта теории скольжения [5]. Кратко опишем схему построения континуальной модели с использованием теории скольжения.

В декартовой прямоугольной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) рассмотрим безграничную упругую среду с ориентированной системой периодически повторяющихся параллельных плоскостей скольжения. Ориентацию этой системы зададим единичной нормалью $\mathbf{n}$. Расстояние между плоскостями скольжения постоянно и равно ε. Плотность материала ρ, а также модули упругости Ламе λ и μ считаются заданными константами. Напряженное состояние описывается тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Вектор касательного напряжения на плоскости скольжения равен $\boldsymbol{\sigma_\tau} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$, нормальное напряжение равно $\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$. Введем вектор скоростей сдвига $\boldsymbol{\gamma}$, определяемый скачками касательной $[\mathbf{V}_\tau]$ скоростей на контактных границах: $\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{V}_t]/\varepsilon$.

Вязкопластические условия контактного взаимодействия имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\sigma_\tau}}{|\boldsymbol{\sigma_\tau}|}\left\langle F\left(\frac{|\boldsymbol{\sigma_\tau}|}{\sigma_s} - 1\right)\right\rangle/\tau,$$

где τ – время релаксации, $F(x)$ – нелинейная функция вязкости, отличная от нуля за пределом условия скольжения $|\boldsymbol{\sigma_\tau}| = \sigma_s$.

Для того чтобы перейти к континуальной модели среды, содержащей систему таких плоскостей скольжения, будем рассматривать $\boldsymbol{\gamma}$ как непрерывные функции координат и времени, имеющие смысл распределенных скоростей скольжений. Воспользуемся соотношениями теории скольжения, которая применялась многими авторами для построения моделей неупругих сред с непрерывным распределением плоскостей скольжения (см. обзор [5]). Эти соотношения позволяют учитывать вклад скоростей скольжений $\boldsymbol{\gamma}$ в тензор скоростей неупругой деформации $\mathbf{e}^\gamma$:

$$\mathbf{e}^\gamma = (\mathbf{n}\otimes\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\otimes\mathbf{n})/2.$$

Полный тензор скоростей деформации $\mathbf{e}$ получается сложением упругих и неупругих составляющих и равен:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^\gamma, \quad \mathbf{e} = (\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)/2.$$

Здесь $\mathbf{v}$ – "макроскопическая" скорость частиц среды, $\mathbf{e}^e$ – тензор скоростей упругой деформации, который связан с тензором напряжений законом Гука: $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\mathbf{e}^e : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}^e$.

Сквозные условия для $\boldsymbol{\gamma}$ соответствуют локальным контактным условиям:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\sigma_\tau}}{|\boldsymbol{\sigma_\tau}|}\left\langle F\left(\frac{|\boldsymbol{\sigma_\tau}|}{\sigma_s} - 1\right)\right\rangle/\tau.$$

Система замыкается уравнениями движения: $\rho\dot{\mathbf{v}} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$.

Отметим, что принятое нелинейное условие вязкопластического скольжения справедливо в случае поджатых слоев (при $\sigma_n < 0$). Соответственно, континуальная система уравнений слоистой среды применима при выполнении данного неравенства. В случае возникновения растягивающих напряжений на межслойных границах необходимо вводить дополнительные переменные – распределенные отслоения и уточнять построенную систему уравнений [5].

Если направление нормали к плоскости скольжения (межслойной границе) совпадает с направлением оси x_3 принятой системы координат, то для нормали будет справедливо соотношение $n_j = \delta_j^3$, где δ_j^i – символ Кронекера.

В этой системе координат тензор скоростей неупругих деформаций равен:

$$e_{3j}^\gamma = \frac{\sigma_{3j}}{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}\left\langle F\left(\frac{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}{\sigma_s} - 1\right)\right\rangle/\tau.$$

Тогда система уравнений анизотропной упруговязкопластической среды, описывающая динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, перпендикулярных оси x_3, примет вид [5, 6]:

$$
\begin{gathered}
\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i \neq 3, \quad j \neq 3, \\
\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial t} = 2\mu e_{3j} - 2\mu \frac{\sigma_{3j}}{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}} \left\langle F\left(\frac{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}{\sigma_s} - 1\right)\right\rangle / \tau, \quad j \neq 3, \quad k = 1, 2.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Отметим, что классическая система уравнений изотропной УВП среды также может быть обоснована с помощью теории скольжения [16] с использованием локального условия скольжения на произвольно ориентированной плоскости и интегрирования по всевозможным плоскостям, где превышено предельное условие $|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\tau}}| = \sigma_s$.

Обе УВП системы уравнений (1) и (2) являются полулинейными гиперболическими системами первого порядка дивергентного вида. Вся характерного вида нелинейность сосредоточена в свободных, недифференциальных членах уравнений для компонент девиаторов или касательных напряжений.

3. НЕЯВНАЯ СХЕМА 2-ГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОБОДНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Поскольку системы (1) и (2) по существу аналогичны друг другу, будем вести построение численной схемы на примере изотропной УВП системы (1). Особый интерес представляет схема расчета части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе. Что касается остальных уравнений системы (1) – линейных уравнений движения для компонент скорости и уравнения для среднего напряжения, то их численная аппроксимация по какой-либо явной схеме требуемого (2-го) порядка не вызывает затруднений [17]. Будем считать, что такая аппроксимация проведена, значения скоростей и среднего напряжения на верхнем временном слое определены с учетом необходимых по постановке начальных и граничных условий.

Построим неявную аппроксимацию 2-го порядка уравнения для девиаторов тензора напряжений с нелинейным свободным членом из УВП системы (1) путем аппроксимации правой части полулинейных уравнений в виде полусуммы слагаемых на верхнем и нижнем слоях по времени:

$$
\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{n}}{\Delta t} = 2\mu \frac{\left(e_{ij}^{/n+1} + e_{ij}^{/n}\right)}{2} - \frac{2\mu}{\tau}\left(\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}}\left\langle F\left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_s} - 1\right)\right\rangle + \frac{s_{ij}^{n}}{\sqrt{s_{kl}^{n}s_{kl}^{n}}}\left\langle F\left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n}s_{kl}^{n}}}{\sigma_s} - 1\right)\right\rangle\right)/2.
$$

Индексами $n+1$ и n помечены значения искомых величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени, Δt – шаг по времени.

Эту нелинейную систему уравнений для s_{ij}^{n+1} можно записать в виде:

$$
\overline{s}_{ij}^{n+1} = \overline{s}_{ije}^{n+1} - \frac{1}{\delta}\left(\frac{\overline{s}_{ij}^{n+1}}{\sqrt{\overline{s}_{kl}^{n+1}\overline{s}_{kl}^{n+1}}}\left\langle F\left(\sqrt{\overline{s}_{kl}^{n+1}\overline{s}_{kl}^{n+1}} - 1\right)\right\rangle + \frac{\overline{s}_{ij}^{n}}{\sqrt{\overline{s}_{kl}^{n}\overline{s}_{kl}^{n}}}\left\langle F\left(\sqrt{\overline{s}_{kl}^{n}\overline{s}_{kl}^{n}} - 1\right)\right\rangle\right).
$$

Здесь введены безразмерные компоненты $\overline{s}_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{n+1}/\sigma_s$, $\overline{s}_{ij}^{n} = s_{ij}^{n}/\sigma_s$, $\overline{s}_{ije}^{n+1} = s_{ije}^{n+1}/\sigma_s$, где $s_{ije}^{n+1} = s_{ij}^{n} + \mu\left(e_{ij}^{/n+1} + e_{ij}^{/n}\right)\Delta t$ – компоненты девиатора после "упругого" шага по времени, $\delta = \frac{\tau}{\Delta t}\frac{\sigma_s}{\mu}$ – безразмерный малый параметр системы уравнений.

Отметим, что с учетом проведенного ранее расчета значений компонент скорости на верхнем временном слое, компоненты “упругого” девиатора $\overline{s}_{ije}^{n+1}$ также можно считать известными, как и значения $\overline{s}_{ij}^{n}$ на n-м слое.

Нелинейную систему, из которой необходимо найти неизвестные компоненты девиатора на верхнем слое $\overline{s}_{ij}^{n+1}$, можно записать следующим образом:

$$\overline{s}_{ij}^{n+1}\left(\delta + \frac{\left\langle F\left(\sqrt{\overline{s}_{kl}^{n+1}\overline{s}_{kl}^{n+1}} - 1\right)\right\rangle}{\sqrt{\overline{s}_{kl}^{n+1}\overline{s}_{kl}^{n+1}}}\right) + \overline{s}_{ij}^{n}\frac{\left\langle F\left(\sqrt{\overline{s}_{kl}^{n}\overline{s}_{kl}^{n}} - 1\right)\right\rangle}{\sqrt{\overline{s}_{kl}^{n}\overline{s}_{kl}^{n}}} = \delta\overline{s}_{ije}^{n+1}. \tag{3}$$

Свернем эти уравнения последовательно с $\overline{s}_{ij}^{n+1}$, $\overline{s}_{ij}^{n}$, $\overline{s}_{ije}^{n+1}$ и введем обозначения для возникающих сверток с неизвестными значениями

$$X = \sqrt{\overline{s}_{kl}^{n+1}\overline{s}_{kl}^{n+1}}, \quad Y = \sqrt{\overline{s}_{kl}^{n+1}\overline{s}_{kl}^{n}}, \quad Z = \sqrt{\overline{s}_{kl}^{n+1}\overline{s}_{kle}^{n+1}},$$

и уже вычисленными значениями

$$T = \sqrt{\overline{s}_{kl}^{n}\overline{s}_{kl}^{n}}, \quad S = \sqrt{\overline{s}_{kl}^{n}\overline{s}_{kle}^{n+1}}, \quad \Sigma = \sqrt{\overline{s}_{kle}^{n+1}\overline{s}_{kle}^{n+1}}.$$

Получим нелинейную систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$X^2\left(\delta + \frac{\langle F(X-1)\rangle}{X}\right) + Y^2\frac{\langle F(T-1)\rangle}{T} = \delta Z^2,$$

$$Y^2\left(\delta + \frac{\langle F(X-1)\rangle}{X}\right) + T^2\frac{\langle F(T-1)\rangle}{T} = \delta S^2,$$

$$Z^2\left(\delta + \frac{\langle F(X-1)\rangle}{X}\right) + S^2\frac{\langle F(T-1)\rangle}{T} = \delta \Sigma^2.$$

Исключая неизвестные Y и Z, получаем уравнение для X^2:

$$X^2\left(\delta + \frac{\langle F(X-1)\rangle}{X}\right)^2 = \Delta P^2,$$

где

$$\Delta P^2 = \delta^2\overline{s}_{ije}^{n+1}\overline{s}_{ije}^{n+1} - 2\delta\overline{s}_{ije}^{n+1}\overline{s}_{ij}^{n}\frac{\langle F(T-1)\rangle}{T} + \overline{s}_{ij}^{n}\overline{s}_{ij}^{n}\left(\frac{\langle F(T-1)\rangle}{T}\right)^2 = \delta^2\tilde{S}^2 \geq 0,$$

$$\tilde{S}^2 = \tilde{s}_{kl}^{n+1}\tilde{s}_{kl}^{n+1}, \quad \tilde{s}_{ij}^{n+1} = \overline{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\overline{s}_{ij}^{n}}{T}\frac{\langle F(T-1)\rangle}{\delta}, \quad T = \sqrt{\overline{s}_{kl}^{n}\overline{s}_{kl}^{n}}.$$

Нетрудно видеть, что промежуточный девиатор $\tilde{s}_{ij}^{n+1}$ и его свертка $\tilde{S}$ вычисляются по результатам “упругого” шага по времени.

Поскольку для свертки $\tilde{S}^2$ всегда выполняется $\tilde{S}^2 \geq 0$, получаем окончательное уравнение для неизвестной свертки X:

$$\delta X + \langle F(X-1)\rangle = \delta\tilde{S}. \tag{4}$$

Отметим, что из (3) следует формула для искомых компонент девиатора на верхнем временном слое в следующем виде:

$$\overline{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\delta\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\left(\delta + \frac{\langle F(X-1)\rangle}{X}\right)} = \frac{\delta\tilde{s}_{ij}^{n+1}X}{(\delta X + \langle F(X-1)\rangle)} = \tilde{s}_{ij}^{n+1}\frac{X}{\tilde{S}}. \tag{5}$$

Таким образом, для полного определения величин $\overline{s}_{ij}^{n+1}$ следует решить уравнение (4) и подставить результат в (5).

Уточним диапазоны допустимых значений для X.

При $X < 1$ решение (4) тривиально: $X = \tilde{S}$.

Следовательно, $\overline{s}_{ij}^{n+1} = \tilde{s}_{ij}^{n+1}$ с критерием применимости $\tilde{S} < 1$ после “упругого” шага.

При $X \geq 1$ следует решить уравнение

$$\delta X + F(X - 1) = \delta \tilde{S}. \tag{6}$$

Для этого нужно конкретизировать функцию вязкости с учетом ее упомянутых выше свойств $F \geq 0,\ F(0) = 0,\ \langle F \rangle = FH(f)$.

4. КОРРЕКТИРОВОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ВЯЗКОСТИ

4.1. Изотропная УВП среда

Как правило, для функции вязкости используются степенные или полиномиальные аппроксимации, построенные по результатам экспериментальных исследований [7, 10]. Рассмотрим случай линейной функции вязкости $F(x) = x$, когда уравнение (6) имеет точное решение, независимо от величины параметра δ.

В этом случае решение уравнения (6), условие $X \geq 1$ и искомые компоненты девиатора имеют вид:

$$X = \frac{(1 + \delta\tilde{S})}{(1 + \delta)}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \overline{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \frac{(1 + \delta\tilde{S})}{(1 + \delta)}. \tag{7}$$

При малых δ имеем

$$\overline{s}_{ij}^{n+1} \sim \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \left(1 + \delta(\tilde{S} - 1)\right).$$

Рассмотрим случай степенной функции вязкости $F(x) = x^q$. Необходимо решить уравнение при $\delta \ll 1$:

$$\delta X + (X - 1)^q = \delta\tilde{S}, \quad X \geq 1, \quad q > 0.$$

Будем искать решение в виде асимптотического ряда по степеням $\delta^{1/q}$ с точностью до первого малого члена:

$$X = 1 + C_1\delta^{1/q} + \ldots .$$

Подставляя это разложение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ, получим значение неизвестного коэффициента разложения:

$$C_1 = (\tilde{S} - 1)^{1/q}, \quad X \sim 1 + (\tilde{S} - 1)^{1/q}\delta^{1/q}, \quad \tilde{S} \geq 1.$$

Отсюда следует решение для девиаторов при произвольном положительном q:

$$\overline{s}_{ij}^{n+1} \sim \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \left(1 + (\tilde{S} - 1)^{1/q}\delta^{1/q}\right). \tag{8}$$

Легко видеть, что частное точное решение (7) при малых δ совпадает с полученным приближенным решением.

Также обсудим вопрос предельного перехода $\delta \to 0$, поскольку формула для промежуточного девиатора $\tilde{s}_{ij}^{n+1}$ содержит малый параметр в знаменателе:

$$\tilde{s}_{ij}^{n+1} = \overline{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\overline{s}_{ij}^{n}}{T} \frac{\langle F(T - 1) \rangle}{\delta}.$$

Для этого уравнение (6), справедливое на $n + 1$- слое по времени, перепишем для n-го слоя:

$$\delta T + \langle F(T - 1) \rangle = \delta\sqrt{\tilde{s}_{kl}^{n}\tilde{s}_{kl}^{n}}.$$

Отсюда имеем

$$\left\langle F(T-1)\right\rangle = \delta\left\langle\sqrt{\tilde{s}^n_{kl}\tilde{s}^n_{kl}} - \sqrt{\overline{s}^n_{kl}\overline{s}^n_{kl}}\right\rangle,$$

и в формуле для промежуточного девиатора удается снять особенность при $\delta \to 0$:

$$\tilde{s}^{n+1}_{ij} = \overline{s}^{n+1}_{ije} - \frac{\overline{s}^n_{ij}}{\sqrt{\overline{s}^n_{kl}\overline{s}^n_{kl}}}\left\langle\sqrt{\tilde{s}^n_{kl}\tilde{s}^n_{kl}} - \sqrt{\overline{s}^n_{kl}\overline{s}^n_{kl}}\right\rangle, \quad \overline{s}^{n+1}_{ij} = \frac{\tilde{s}^{n+1}_{ij}}{\tilde{S}}. \tag{9}$$

4.2. Анизотропная (слоистая) УВП среда

Что касается системы уравнений (2) для анизотропной упруговязкопластической среды, описывающей динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, то для ее численного решения корректировка касательных напряжений, скажем, аналога формул (8) и (9), будет выглядеть следующим образом. Для степенного вязкопластического условия скольжения на межслойных границах корректировочные формулы имеют вид:

$$\overline{\sigma}^{n+1}_{3j} \sim \frac{\tilde{\sigma}^{n+1}_{3j}}{\sqrt{\tilde{\sigma}^{n+1}_{3k}\tilde{\sigma}^{n+1}_{3k}}}\left(1 + (\sqrt{\tilde{\sigma}^{n+1}_{3k}\tilde{\sigma}^{n+1}_{3k}} - 1)^{1/q}\delta^{1/q}\right),$$

$$\tilde{\sigma}^{n+1}_{3j} = \overline{\sigma}^{n+1}_{3je} - \frac{\overline{\sigma}^n_{3j}}{\sqrt{\overline{\sigma}^n_{3k}\overline{\sigma}^n_{3k}}}\frac{\left\langle F(\sqrt{\overline{\sigma}^n_{3k}\overline{\sigma}^n_{3k}} - 1)\right\rangle}{\delta}, \quad j \neq 3, \quad k = 1, 2.$$

Предельный переход к нулевому времени релаксации (нулевой вязкости) $\delta \to 0$ дает следующий результат:

$$\tilde{\sigma}^{n+1}_{3j} = \overline{\sigma}^{n+1}_{3je} - \frac{\overline{\sigma}^n_{3j}}{\sqrt{\overline{\sigma}^n_{3l}\overline{\sigma}^n_{3l}}}\left\langle\sqrt{\tilde{\sigma}^n_{3l}\tilde{\sigma}^n_{3l}} - \sqrt{\overline{\sigma}^n_{3l}\overline{\sigma}^n_{3l}}\right\rangle, \quad \tilde{\Sigma}^2 = \tilde{\sigma}^{n+1}_{3l}\tilde{\sigma}^{n+1}_{3l}, \quad \overline{\sigma}^{n+1}_{3j} = \frac{\tilde{\sigma}^{n+1}_{3j}}{\tilde{\Sigma}}.$$

Таким образом, показано, что полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений УВП системы уравнений допускают предельный переход при малом времени релаксации. Следовательно, формулы (7)–(9) для различных представлений функций вязкости при малых δ можно трактовать как регуляризаторы численных решений УП систем. Сами эти формулы представляют собой алгебраические корректировки компонент девиаторов напряжений, полученных в результате расчета “упругого” шага по времени.

Этот прием, предложенный в свое время в работах [18, 19], широко использовался в вычислительной практике, например, в [20–22] и в огромном количестве других работ, но трактовался как корректировка 1-го порядка в результате физического расщепления упругопластического процесса на упругий шаг и приведение девиаторов напряжений на круг текучести. Сама эта корректировка в принятых обозначениях выглядит следующим образом:

$$\overline{s}^{n+1}_{ij} = \frac{\overline{s}^{n+1}_{ije}}{\sqrt{\overline{s}^{n+1}_{kle}\overline{s}^{n+1}_{kle}}}.$$

В приведенном изложении специфические корректировки девиаторов напряжений за пределом текучести 2-го порядка возникают как обоснованный результат построения явно-неявной схемы 2-го порядка для УВП системы уравнений, а корректировка (9) – для УП системы уравнений.

5. РАСЧЕТ УПРУГОГО ШАГА

Система уравнений изотропной линейно упругой среды может быть получена из системы уравнений упруговязкопластической среды (1), если формальным положить нелинейную функцию вязкости $F(y)$ тождественно равной нулю. В полных напряжениях и скоростях она может быть записана в каноническом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} = \mathbf{f},$$

где матрицы A_1, A_2, A_3 являются функциями упругих параметров среды λ, μ, ρ, а вектор $\mathbf{u}$ включает в себя все шесть независимых компонент тензора напряжений и три компоненты вектора скорости среды. В правой части системы стоит вектор $\mathbf{f}$, описывающий действующую на рассматриваемый элементарный объем внешнюю силу. Для ее решения в настоящей работе применялся сеточно-характеристический метод на параллелепипедных сетках. На первом этапе производилось расщепление по пространственным направлениям, сводящее исходную трехмерную дифференциальную систему уравнений к набору из трех последовательно решаемых одномерных систем уравнений. Сравнение различных схем пространственного расщепления для задач акустики и упругости представлено, например, в работах [23, 24]. Для определенности рассматривается шаг расщепления по координате x_1. В дальнейшем, ввиду гиперболичности полученных одномерных систем, возможно введение новых неизвестных функций, сводящих задачу к набору одномерных линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \xi \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0,$$

где ξ – одно из собственных значений матрицы A_1. Для решения данного уравнения справедливо тождество

$$w(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) = w(x_1 - \xi \Delta t, x_2, x_3, t),$$

где Δt – используемый при расчетах шаг по времени. Фиксируя в пространстве некоторый набор узлов расчетной сетки (шаблон), в общем случае, получаем одномерную задачу интерполяции. В работе использовался интерполянт в виде полинома третьей степени, обеспечивающий третий порядок аппроксимации полученной одномерной схемы как по времени, так и по пространству [25]. Ее расчетная формула имеет вид

$$w_m^{n+1} = w_m^n + \frac{\sigma}{2}\left(w_{m-1}^n - w_{m+1}^n\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(w_{m-1}^n - 2w_m^n + w_{m+1}^n\right) - \frac{\sigma(1-\sigma^2)}{6}\left(w_{m-2}^n - 3w_{m-1}^n + 3w_m^n - w_{m+1}^n\right),$$

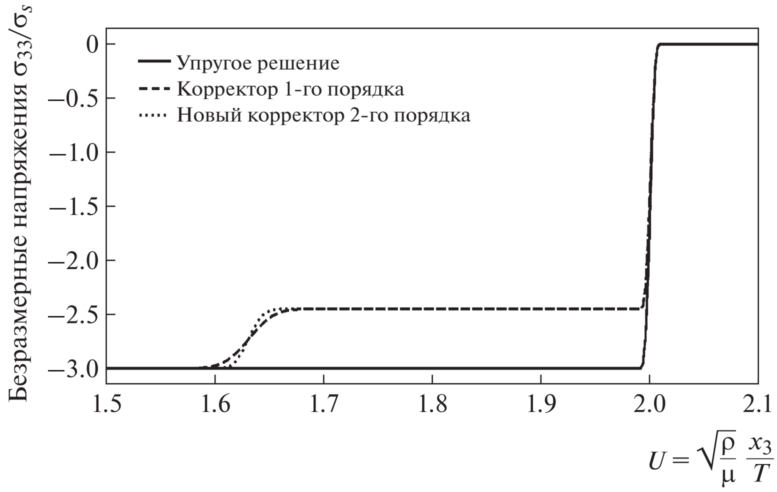
где верхний индекс относится к шагу по времени, а нижний – к пространственной координате x_1, $\sigma = \xi \Delta t / \Delta x_1 < 1$ – число Куранта. Отличительной особенностью данной схемы является практически полное отсутствие осцилляций даже на разрывных решениях, что объясняется ее близостью к области монотонных схем в пространстве неопределенных коэффициентов [26].

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

С использованием описанной явно-неявной схемы было проведено моделирование процесса распространения динамических возмущений в изотропной упруговязкопластической среде от мгновенно приложенной нагрузки при различных значениях времени релаксации (параметра δ), в том числе и при $\delta = 0$. Среда описывалась следующими параметрами: плотность $\rho = 2500$ кг/м^3, скорость распространения продольных волн $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 4500$ м/с, скорость распространения поперечных волн $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ варьировалась, предел текучести $\sigma_s = 112\,500$ Па. Расчетная область представляла собой параллелепипед размерами 50 × 50 × 10 000 м. Она покрывалась кубической расчетной сеткой с шагом 5 м. Для корректного расчета задачи о нагружении полупространства на боковых гранях расчетной области использовалось условие нулевой пространственной производной решения. Для устойчивости используемой на этапе решения упругой задачи явной сеточно-характеристической схемы использовался шаг по времени 0.001 с, удовлетворяющий условию Куранта. Рассчитывалось 2с физического эксперимента.

6.1. Нормальная нагрузка на упруговязкопластическое полупространство

В трехмерной постановке рассматривался случай мгновенного приложения к изотропному упруговязкопластическому полупространству $x_3 > 0$ сжимающей нагрузки $\sigma_n = -3\sigma_s = -337\,500$ Па вдоль оси x_3. Скорость поперечных волн в среде составляла 2250 м/с. В случае изотропной ли-



Фиг. 1. Распределение напряжения σ_{33} вдоль оси x_3 через 2 с от начала расчета, $\sigma_n = -3\sigma_s$, $\delta = 0$.

нейно-упругой среды известно аналитическое решение, заключающееся в распространении продольной волны, которое изображено на фиг. 1. Для случая упругопластической среды аналитическое решение представляет собой упругий предвестник – продольную волну, а также волну пластических деформаций, распространяющуюся с меньшей скоростью $c_f = \sqrt{(\lambda + 2\mu/3)/\rho}$. При этом между двумя разрывами решения устанавливается зона постоянных по пространству напряжений, величина которых σ_{33}^* также может быть вычислена аналитически. Используя условие текучести Мизеса при определенном соотношении между компонентами напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}\lambda/(\lambda + 2\mu)$, получаем

$$(\sigma_{11} - \sigma/3)^2 + (\sigma_{22} - \sigma/3)^2 + (\sigma_{33} - \sigma/3)^2 = \sigma_s^2, \quad \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}\sigma_{33}.$$

Отсюда имеем

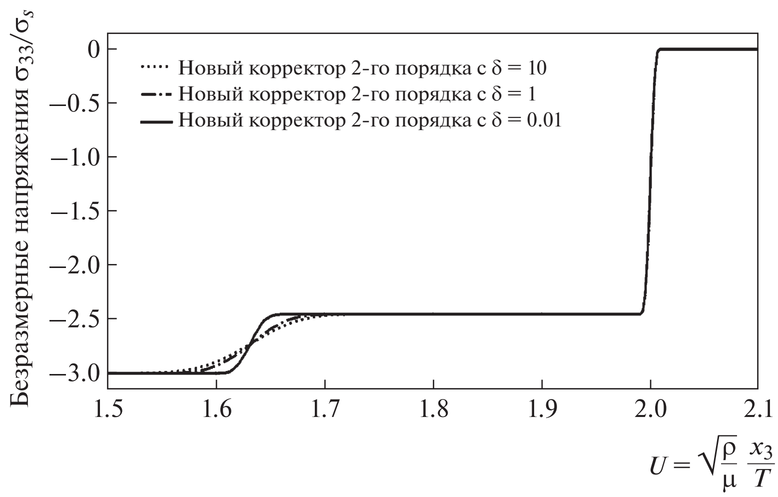
$$\sigma_{33}^* = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu}\frac{\sqrt{6}}{4}\sigma_s.$$

На фиг. 1 представлены численные решения, полученные по известным ранее расчетным формулам 1-го порядка аппроксимации, и по предложенным в настоящей работе формулам 2-го порядка аппроксимации. Видно, что при одинаковой точности разрешения разрыва на упругом предвестнике, точность разрешения разрыва на волне пластичности выше при использовании разработанного нами алгоритма. Отметим, что в обоих случаях корректно восстанавливаются скорости распространения обеих волн и значение напряжения σ_{33}^*.

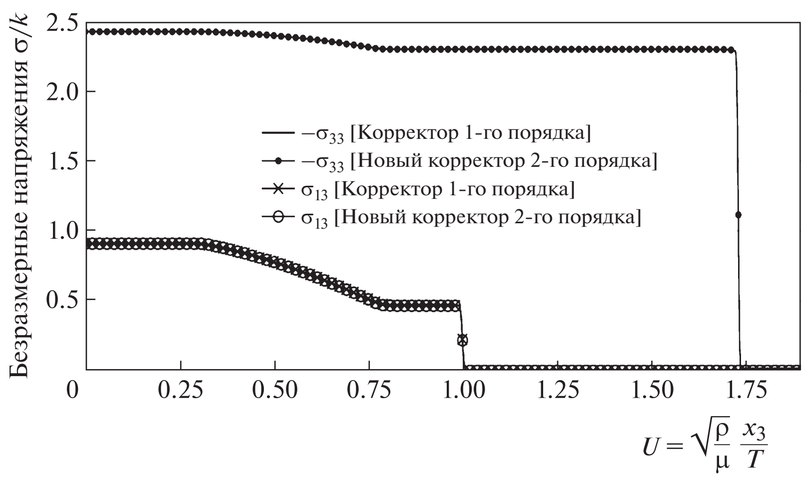
Кроме того, разработанный в настоящей работе вычислительный алгоритм может быть успешно использован в том случае, если время релаксации τ не мало. Были проведены расчеты по деформированию упруговязкопластической среды с линейным условием вязкости для ненулевых значений безразмерного параметра δ. Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Видно, что увеличение вязкости среды приводит к увеличению размывания фронта пластической волны и не влияет на фронт упругого предвестника.

6.2. Комбинированная нагрузка на УВП полупространство

В трехмерной постановке также было получено численное решение задачи о мгновенном приложении совместно сдвиговой и сжимающей нормальной нагрузок на изотропное упруговязкопластическое полупространство $x_3 > 0$. Для этой задачи существует аналитическое решение [27] в предельном случае идеальной упругопластической среды (исчезающей вязкости). Сравнение с аналитикой позволяет оценить точность численных решений различного порядка аппроксимации.



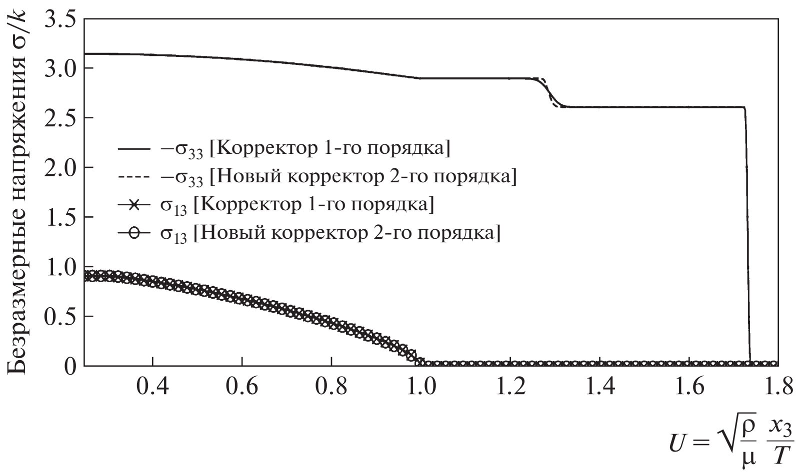
Фиг. 2. Распределение напряжения σ_{33} вдоль оси x_3 через 2 с от начала расчета для различных значений параметра δ, $\sigma_n = -3\sigma_s$.



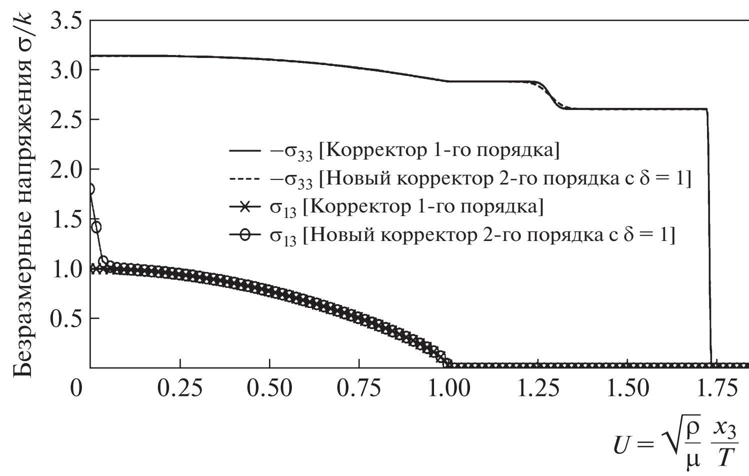
Фиг. 3. Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно-неявной схеме, $\sigma_n = -2.4k$, $\sigma_\tau = 0.9k$.

Скорость поперечных волн в среде была равна 2598 м/с. Для возможности сопоставления результатов проведенных расчетов с аналитическим решением, представленным в работе [27], в рассмотрение была введена величина $k = \sigma_s/\sqrt{2}$. Соответствующие рассматриваемой постановке граничные условия при $x_3 = 0$ на компоненты тензора напряжений имели вид: $\sigma_{33} = \sigma_n$, $\sigma_{13} = \sigma_\tau$. На фиг. 3 представлены результаты расчетов, полученные с использованием формулы из работы [18] и представленной в настоящей работе корректировки. Использованы значения: $\sigma_n = -2.4k$, $\sigma_\tau = 0.9k$. Видно, что фронты волн на обеих компонентах тензора напряжений разрешаются с одинаковой точностью обоими методами, граничные условия выполняются, скорости движения фронтов совпадают с приведенными в работе [27, рис. 5].

Далее, нами был проведен расчет с увеличением сжимающей нагрузки до значений, использованных в работе [27, рис. 6]. Результаты численных расчетов по обеим схемам представлены на фиг. 4. На компоненте σ_{33} тензора напряжений наблюдаются две волны: продольная волна — упругий предвестник, и пластическая волна, распространяющаяся с меньшей скоростью. Анализ расчетов показывает, что предложенная в работе схема 2-го порядка аппроксимации с той же



Фиг. 4. Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно-неявной схеме, $\sigma_n = -3.1k$, $\sigma_\tau = 0.9k$.



Фиг. 5. Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно-неявной схеме, $\sigma_n = -2.4k$, $\sigma_\tau = 1.8k$.

точностью разрешает разрыв на продольной волне и непрерывное решение на компоненте σ_{13}, однако, более точно воспроизводит пластическую волну.

Достоинством самой системы уравнений УВП модели и предложенного численного метода ее решения по сравнению с идеальной УП моделью является то, что она допускает касательные нагрузки, превышающие предел текучести. При ненулевом значении времени релаксации зоны такого превышения сосредоточены в окрестности границы деформируемой области, где приложены высокоамплитудные касательные нагрузки. При малых значениях времени релаксации эти зоны носят погранслойный характер, вне этих зон решение мало отличается от идеально упругопластического. Для иллюстрации этого эффекта приведены результаты численного решения с $\sigma_\tau = 1.8k$ на фиг. 5.

Еще раз отметим, что все построенные на графиках распределения напряжений получены в результате расчета по полноценному коду для трехмерных динамических систем уравнений, а не по аппроксимации одномерной нестационарной системы. Обычно в этом случае наблюдается значительное размывание волновых фронтов, в том числе и упругих, особенно для больших значений времени расчета. Предложенная явно-неявная схема дает хорошие результаты в широком диапазоне комбинированных нагрузок, при различных временах релаксации, в том числе допускает предельный переход к его нулевому значению (регуляризованное УП решение) и лучше держит волновые фронты в сравнении с широко используемой схемой [18]. Такой результат достигается за счет использования высокоточной сеточно-характеристической схемы для расчета явного упругого шага и предложенной неявной аппроксимации второго порядка для нелинейных свободных членов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано динамическое поведение изотропной и анизотропной упруговязкопластической среды с произвольной функцией вязкости под действием внешней нагрузки. Возникающая система уравнений является полулинейной гиперболической с малым параметром в знаменателе свободного члена, что не позволяет впрямую применять явные расчетные схемы. Предложен оригинальный подход, основанный на неявной аппроксимации части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе. Путем алгебраических преобразований показано, что это приводит к явному расчетному алгоритму, обладающему вторым порядком аппроксимации по времени.

Полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений упруговязкопластической системы уравнений допускают предельный переход при стремлении времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений упругопластических систем.

Для получения промежуточного численного решения линейной упругой задачи в работе использован сеточно-характеристический метод на параллелепипедных расчетных сетках. Он позволяет обеспечить повышенный порядок аппроксимации, совместно с отсутствием сильных осцилляций даже на разрывных решениях.

Получено численное решение трехмерной задачи о мгновенном приложении сжимающей и сдвиговой нагрузок к упруговязкопластическому полупространству. Продемонстрированы сохранение точности разрешения фронта упругой волны и повышение точности разрешения фронта пластической волны. Дальнейшие исследования могут быть направлены на применение рассмотренных в работе моделей и численных методов в обратных сейсмических задачах [28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malvern L.E.* The propagation of longitudinal waves of plastic deformations in a bar of material exhibiting a strain-rate effect // J. Appl. Mech. 1951. V. 18.
2. *Соколовский В.В.* Распространение упруго-вязкопластических волн в стержнях // Прикл. матем. и механ. 1948. Т. 12. № 8.
3. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
4. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2008. 320 с.
5. *Никитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2008. № 4. С. 154–165.
6. *Никитин И.С.* Теория неупругих слоистых и блочных сред. М.: Физматлит, 2019. 190 с.
7. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 310 с.
8. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
9. *Кукуджанов В.Н.* Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида // Механ. твердого тела. 2001. № 5. С. 96–111.
10. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
11. *Дюво Г., Лионс Н.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
12. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. 208 с.
13. *Dal Maso G., LeFloch P.G., Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // J. de Mathématiques Pures et Appliquées. 1995. V. 74. № 6. P. 483–548.
14. *Parés C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2006. V. 44. № 1.
15. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
16. *Nikitin I.S.* Constitutive equations of the elastoviscoplastic model and slip theory // Mechanics of Solids. 2007. V. 42. № 2. P. 260–270.

17. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 600 с.
18. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 163–212.
19. *Wilkins M.L.* Computer simulation of dynamic phenomena. Berlin-Heidelberg–New-York: Springer, 1999. 264 p.
20. *Кукуджанов В.Н.* Метод расщепления упругопластических уравнений // Механ. твердого тела. 2004. № 1. С. 98–108.
21. *Абузяров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В.* и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 940–953.
22. *Бураго Н.Г.* Моделирование разрушения упругопластических тел// Вычисл. механ. сплошных сред. 2008. Т. 1. №. 4. С. 5–20.
23. *Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B.* Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Computer Research and Modeling. 2022. V. 14(4). P. 899–910.
24. *Petrov I., Golubev V., Shevchenko A.* Higher-Order Grid-Characteristic Schemes for the Acoustic System // Proc. 2021 Ivannikov Memorial Workshop, IVMEM 2021. 2021. P. 61–65.
25. *Golubev V.I., Shevchenko A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B., Malovichko M.S.* Compact Grid- Characteristic Scheme for the Acoustic System with the Piece-Wise Constant Coefficients // Internat. Journal of Applied Mechanics. 2022. P. 2250002.
26. *Холодов А.С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 17. № 6. С. 1476–1492.
27. *Bleich H.H., I. Nelson I.* Plane Waves in an Elastic-Plastic Half-Space Due to Combined Surface Pressure and Shear// ASME. J. Appl. Mech. 1966. V. 33:1. P. 149–158.
28. *Golubev V.I., Nikitin I.S., Vasyukov A.V., Nikitin A.D.* Fractured inclusion localization and characterization based on deep convolutional neural networks // Procedia Structural Integrity. 2023. V. 43. P. 29–34.