

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА¹⁾

© 2023 г. Н. В. Трусов^{1,2,3,*}, А. А. Шананин^{1,2,3,4,5,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 119991 Москва, Ленинские горы, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

³ 105043 Москва, ул. Парковая, 29, ФГБУ “ВНИИ труда” Минтруда России, Россия

⁴ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

⁵ 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: trunick.10.96@gmail.com

**e-mail: alexshan@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.

Переработанный вариант 13.03.2023 г.

Принята к публикации 26.06.2023 г.

В работе исследуется математическое описание экономического поведения домашних хозяйств. С одной стороны, домашние хозяйства являются потребителями, которые стремятся максимизировать дисконтированную функцию полезности на несовершенном рынке сбережений и потребительского кредита. С другой стороны, домашнее хозяйство является работником на рынке труда, получает доходы от трудовой деятельности и стремится повысить свою квалификацию для получения более высокой заработной платы. Повышение квалификации работника осуществляется путем вложений в человеческий капитал. В данной работе математическая модель поведения работника на рынке труда представлена в виде задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте. Доказана теорема о существовании решения, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Модель идентифицирована по данным российской статистики в различных социальных слоях населения. Библ. 11. Фиг. 9.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимальное управление, задачи на бесконечном горизонте планирования, принцип максимума, задача идентификации.

DOI: 10.31857/S0044466923100150, **EDN:** ZWMBCX

1. ВВЕДЕНИЕ

Рациональное экономическое поведение домашних хозяйств можно разделить на процессы в соответствии с двумя ролями, выполняемыми в экономике. С одной стороны, домашнее хозяйство является потребителем товаров и услуг, оперирующим в соответствии со своими предпочтениями на рынке сбережений и кредитов. С другой стороны, оно является субъектом на рынке труда, изменяющим свои профессионально квалификационные характеристики с целью увеличения заработной платы.

Моделирование экономического поведения домашних хозяйств восходит к работе Ф. Рамсея [1], в которой представлено поведение репрезентативного домашнего хозяйства на совершенном рынке сбережений и потребительского кредита. В работах [2, 3] представлена модель экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства на несовершенном рынке сбережений и потребительского кредита, который возникает из-за разницы между процентной ставкой по потребительскому кредиту и процентной ставкой по депозитам. Так, на протяжении последнего десятилетия в России, отношение процентных ставок по потребительскому кредиту к депозитам менялось в диапазоне от 2.5 до 3.5. Разрыв в процентных ставках по кредитам и де-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 23-21-00281).

позитам влечет к негладкости правой части дифференциального уравнения на фазовую переменную (см. [2]). Репрезентативное домашнее хозяйство максимизирует дисконтированное потребление и может находиться в одном из трех режимов экономического поведения: заимствования, не взаимодействия с банковской системой и сбережения в форме депозитов в зависимости от текущего финансового состояния и параметров экономической конъюнктуры (см. [2]). В модели выделяется ограничение кредитоспособности на финансовое состояние домашнего хозяйства, выполнение которого необходимо для возможности выполнить обязательство по ранее взятым кредитам. Это приводит к фазовому ограничению на финансовое состояние домашнего хозяйства (см. [2]). В случае нарушения данного ограничения, образуется финансовая пирамида: чтобы расплатиться с ранее взятыми кредитами, домашнее хозяйство вынуждено брать новый. Такая ситуация наблюдается у малоимущих заемщиков в России (см. [4]). В модели экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства можно построить синтез практически в аналитическом виде [2]. Синтез позволяет определить оптимальное управление в зависимости от текущего значения фазовой переменной и параметров конъюнктуры. Он состоит из 7 различных типов поведения домашнего хозяйства, которые определяют социальный слой (подробнее см. [2]). Данная модель идентифицирована по данным российской статистики [5] и использовалась для анализа состояния потребительского кредита в России как механизм социальной адаптации в условиях пандемии 2020 г. [2, 3] и в условиях сложившейся экономической ситуации [4].

В данной работе представлена математическая модель поведения домашнего хозяйства как работника на рынке труда. Работник получает заработную плату, которую он может расходовать на потребление и на вложение в человеческий капитал. Работник максимизирует дисконтированное потребление и увеличивает свои компетенции для получения более высокой заработной платы. Компетенции работника описываются его человеческим капиталом. В моделях экономического роста выделяют роль динамики человеческого капитала в повышении производительности труда и росте реальной заработной платы см., например, модель Р. Лукаса [7]. В нашей модели мы изучаем микроописание и экономические стимулы, которые влияют на рост человеческого капитала.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РАБОТНИКА С ПОМОЩЬЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Будем моделировать поведение репрезентативного, рационального работника, который получает заработную плату S , тратит ее на осуществление потребительских расходов C и на развитие своего человеческого капитала X , т.е.

$$S = C + X.$$

Накопление человеческого капитала $P(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dP}{dt} = X + \mu P, \quad (1)$$

с начальным условием

$$P(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mu < 0$ — параметр, описывающий устаревание накопленных компетенций работника.

В случайный момент времени появляется вакансия, позволяющая работнику увеличить заработную плату в соответствии с накопленным человеческим капиталом до величины $S + \zeta_1 P$, $\zeta_1 > 0$. Будем предполагать, что вероятность появления вакансии не позднее времени t равна

$$F(t) = 1 - e^{-\zeta_1 \int_0^t P(\tau) d\tau}, \quad (3)$$

где $\zeta_1 > 0$. Будем предполагать, что работник оценивает текущее потребление с помощью функции полезности с постоянным отвращением к риску $u(C) = C^\alpha$, где $1 - \alpha$ коэффициент отвращения к риску, $\alpha \in (0, 1)$. Будем считать, что он распределяет свой доход между потреблением

$C(t) \geq 0$ и вложением в развитие человеческого капитала $X(t) \geq 0$ и что при этом он максимизирует математическое ожидание дисконтированного с коэффициентом $\delta > 0$ потребления

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^t e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + e^{-\delta T} \frac{(S + \zeta_1 P(T))^\alpha}{\delta} \right\}. \quad (4)$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Справедливо следующее представление функционала (4):*

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^t e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + e^{-\delta T} \frac{(S + \zeta_1 P(T))^\alpha}{\delta} \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t (\delta + \xi_1 P(\tau)) d\tau} \left(C^\alpha(t) + \xi_1 P(t) \frac{(S + \zeta_1 P(t))^\alpha}{\delta} \right) dt. \quad (5)$$

Доказательство. По определению, математическое ожидание можно записать в виде

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^t e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + e^{-\delta T} \frac{(S + \zeta_1 P(T))^\alpha}{\delta} \right\} = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\tau e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + \frac{e^{-\delta \tau}}{\delta} (S + \zeta_1 P(\tau))^\alpha \right\} dF(\tau).$$

Последнее слагаемое, в соответствии с (3) может быть записано как

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\tau e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + \frac{e^{-\delta \tau}}{\delta} (S + \zeta_1 P(\tau))^\alpha \right\} dF(\tau) = \\ & = \int_0^{+\infty} \int_0^\tau e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt dF(\tau) + \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^\tau (\delta + \xi_1 P(s)) ds} \xi_1 P(\tau) \frac{(1 + \zeta_1 P(\tau))^\alpha}{\delta} d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям $\int_0^{+\infty} \int_0^\tau e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt dF(\tau)$, мы получаем выражение (5). Лемма доказана.

Пусть $\Lambda(t) = \int_0^t (\delta + \xi_1 P(\tau)) d\tau$. Перейдем к безразмерным величинам, представив следующие замены $\hat{P} = \frac{P}{S\theta}$, $\tau = \frac{t}{\theta}$, $\hat{\mu} = \mu\theta$, $\hat{\xi}_1 = \frac{\xi_1 S\theta}{\delta}$, $\hat{\zeta}_1 = \zeta_1 S\theta$, где $S\theta$ – годовой доход работника. Тогда, в соответствии с доказанной леммой, мы получаем задачу оптимального управления

$$\int_0^{+\infty} e^{-\Lambda(\tau)} \left(u^\alpha + \hat{\xi}_1 \hat{P} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}}{S} \right)^\alpha \right) d\tau \rightarrow \max_{0 \leq u \leq 1}, \quad (6)$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = (1 - u) + \hat{\mu} \hat{P}, \quad (7)$$

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}), \quad (8)$$

$$\hat{P}(0) = 0, \quad (9)$$

$$\Lambda(0) = 0. \quad (10)$$

Обратим внимание, что управление u в задаче оптимального управления (6)–(10) характеризует долю от заработной платы, которую работник тратит на потребительские расходы.

Теорема 1. 1. Задача оптимального управления (6)–(10) имеет решение. 2. Пусть $\hat{P}(\tau)$, $\Lambda(\tau)$ – оптимальное решение задачи (6)–(10) и являются абсолютно непрерывными при $\tau \geq 0$, пусть также $u^*(\tau)$ является измеримой функцией при $\tau \geq 0$, тогда существуют абсолютно непрерывные функции $\varphi_1(\tau) > 0$, $\varphi_2(\tau) < 0$, $\tau \geq 0$:

$$\varphi_1(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} \left\{ e^{-\hat{\mu}(\tau-s)} \left[-\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) \varphi_1(s) + \hat{\xi}_1 (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s))^\alpha + \frac{\alpha \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_1}{S} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)}{S} \right)^{\alpha-1} \right] - \right. \\ \left. - \delta\theta \frac{\hat{\xi}_1}{\hat{\mu}} (e^{-\hat{\mu}(\tau-s)} - 1) \left[\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) \varphi_2(s) + \min \left\{ 1, \left(\frac{\varphi_1}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s) \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)}{S} \right)^\alpha \right] \right\} ds, \quad (11)$$

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} \left[\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) \varphi_2(s) + \min \left\{ 1, \left(\frac{\varphi_1}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s) \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)}{S} \right)^\alpha \right] ds, \quad (12)$$

$$u^*(\tau) = \min \left\{ 1, \left(\frac{\varphi_1(\tau)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right\}. \quad (13)$$

Более того,

$$\hat{P}(\tau) = \int_0^{\tau} \left(1 - \left(\frac{\varphi_1(s)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)_+ e^{\hat{\mu}(\tau-s)} ds, \quad (14)$$

$$\Lambda(\tau) = \delta\theta \int_0^{\tau} (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) ds. \quad (15)$$

Доказательство. 1. Условия задачи оптимального управления (6)–(10) удовлетворяют предположениям П1–П7 о существовании решения задачи оптимального управления на бесконечном горизонте планирования в [8]. 2. Доказательство второй части теоремы основано на необходимых условиях оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в [9, 10]. Для начала покажем, что оптимальное управление $u^*(\tau)$ удовлетворяет (13). Для этого выпишем функцию Гамильтона–Понтрягина

$$\mathcal{H}(\tau, \hat{P}, \Lambda, \varphi_1, \varphi_2) = \sup_{0 \leq u \leq 1} \left\{ e^{-\Lambda} \left(u^\alpha + \hat{\xi}_1 \hat{P} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}}{S} \right)^\alpha \right) + \varphi_1 e^{-\Lambda} ((1-u) + \hat{\mu} \hat{P}) + \varphi_2 e^{-\Lambda} \delta\theta (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}) \right\},$$

откуда легко можно получить (13).

Сопряженная система задачи оптимального управления (6)–(10) определяется матричным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}(\tau)}{d\tau} = -A^T \boldsymbol{\Psi}(\tau) + \mathbf{b}(\tau), \quad (16)$$

где $\boldsymbol{\Psi}(\tau) = (\psi_1(\tau), \psi_2(\tau))^T$, $\mathbf{b}(\tau) = (b_1(\tau), b_2(\tau))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} \hat{\mu} & 0 \\ \delta\theta \hat{\xi}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}(\tau) = \begin{pmatrix} -e^{-\Lambda(\tau)} \left(\hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau) \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau)}{S} \right)^\alpha + \frac{\alpha \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_1}{S} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau)}{S} \right)^{\alpha-1} \right) \\ e^{-\Lambda(\tau)} \left(u^\alpha + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau) \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau)}{S} \right)^\alpha \right) \end{pmatrix}.$$

Введем следующую замену: $\Phi = \Psi e^{\Lambda}$. Тогда сопряженная система (16) преобразуется в

$$\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} = -A^T \Phi(\tau) + \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau)) \Phi(\tau) + \mathbf{b}(\tau) e^{\Lambda(\tau)}. \quad (17)$$

Решение дифференциального уравнения (17), согласно [10] (см. с. 12, теорема 8), может быть записано в виде

$$\Phi(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} Z(\tau) Z^{-1}(s) \left[\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) \Phi(s) + \mathbf{b}(s) e^{\Lambda(s)} \right] ds, \quad (18)$$

где $Z(\tau)$ — матрица 2×2 , является решением матричного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{d\tau} = -A^T Z, \quad (19)$$

$$Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Решением матричного дифференциального уравнения (19), (20) является матрица

$$Z(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-\hat{\mu}\tau} \frac{\hat{\xi}_1}{\hat{\mu}} (e^{-\hat{\mu}\tau} - 1) \delta\theta & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица $Z^{-1}(s)$ имеет следующий вид:

$$Z^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{\hat{\mu}s} \frac{\hat{\xi}_1}{\hat{\mu}} (e^{\hat{\mu}s} - 1) \delta\theta & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обращаясь к формуле (18), мы получаем, что функции $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ удовлетворяют (11), (12) при оптимальном управлении (13).

Применяя метод вариации постоянной для решения обыкновенного дифференциального уравнения (7), при условии оптимальности (13), получаем выражение (14). Откуда, после записи (8) в интегральном виде, получаем (15).

Теорема доказана.

Следствие 1. Предположим, что существует момент времени $\hat{\tau} \geq 0$ такой, что $\hat{P}(\tau)$ является монотонно возрастающей для любого $\tau \geq \hat{\tau}$, $\hat{P} < -\frac{1}{\hat{\mu}}$. Тогда существуют пределы $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{P}(\tau) = \hat{P}^*$,

$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_1(\tau) = \varphi_1^*$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = \varphi_2^*$, где

$$\varphi_1^* = \alpha(1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha-1}, \quad (21)$$

$$\varphi_2^* = -\frac{1}{\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*)} \left[(1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha} + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*}{S} \right)^{\alpha} \right], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\hat{\xi}_1}{S} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*}{S} \right)^{\alpha-1} (\alpha \hat{\xi}_1 \hat{P}^* + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* + 1) + \alpha(1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha-1} (\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*) - \hat{\mu}) + \\ & + \frac{\hat{\xi}_1}{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*} \left[(1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha} + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*}{S} \right)^{\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство. Так как функция $\hat{P}(\tau)$ монотонно возрастает при $\tau \geq \hat{\tau}$ и является ограниченной, то существует предел $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{P}(\tau) = \hat{P}^*$. Откуда, $\frac{d\hat{P}}{d\tau} \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow +\infty$. Учитывая, что

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = 1 - \min \left\{ 1, \left(\frac{\varphi_1(\tau)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right\} + \hat{\mu} \hat{P},$$

а для того, чтобы удовлетворить условию $\frac{d\hat{P}}{d\tau} \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow +\infty$, функция $\varphi_1(\tau)$ должна иметь предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_1(\tau) = \alpha (1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha-1}. \quad (24)$$

Докажем (22). Пусть

$$h_1(s) = \delta \theta (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)), \quad (25)$$

$$h_2(s) = \min \left\{ 1, \left(\frac{\varphi_1(s)}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s) \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)}{S} \right)^{\alpha}. \quad (26)$$

Тогда функцию $\varphi_2(\tau)$, в соответствии с (12), можно записать в виде

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} [h_1(s)\varphi_2(s) + h_2(s)] ds. \quad (27)$$

Продифференцируем (27) и получим

$$\frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} = h_1(\tau)\varphi_2(\tau) + h_2(\tau). \quad (28)$$

Применяя метод вариации постоянной, получаем решение дифференциального уравнения (28)

$$\varphi_2(\tau) = \left(C_0 + \int_0^{\tau} h_2(\eta) e^{-\int_0^{\eta} h_1(\xi) d\xi} d\eta \right) e^{\int_0^{\tau} h_1(\eta) d\eta}, \quad (29)$$

где $C_0 \in \mathbb{R}$. Так как $h_1(\tau) > 0 \forall \tau \geq 0$, для того, чтобы интеграл (29) сходиллся, нужно положить

$$C_0 = - \int_0^{+\infty} h_2(\eta) e^{-\int_0^{\eta} h_1(\xi) d\xi} d\eta,$$

откуда получаем

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} h_2(\eta) e^{\int_{\eta}^{\tau} h_1(\xi) d\xi} d\eta. \quad (30)$$

Интеграл в (30) сходится, так как $\eta > \tau$, а значит, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = \varphi_2^*$.

Покажем, что φ_2^* удовлетворяет (22). Из (25), (26) следует, что

$$h_1(\eta) = \hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta), \quad (31)$$

$$h_2(\eta) = \hat{h}_2 + \varepsilon_2(\eta), \quad (32)$$

где $\hat{h}_1 > 0$, $\hat{h}_2 > 0$, $\varepsilon_1(\eta) \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow +\infty$. Мы получаем, что

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} \hat{h}_2 e^{\int_{\eta}^{\tau} (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi} d\eta - \int_{\tau}^{+\infty} \varepsilon_2(\eta) e^{\int_{\eta}^{\tau} (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi} d\eta. \quad (33)$$

Легко видеть, что второе слагаемое в выражении (33) стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$ в силу того, что $h_1(\xi) > 0$, $\eta > \tau$. Пусть

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{\int_{\eta}^{\tau} (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi} d\eta. \quad (34)$$

Выражение (34) может быть записано в следующем виде:

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{\hat{h}_1(\tau-\eta)} e^{\int_{\eta}^{\tau} \varepsilon_1(\eta) d\xi} d\eta. \quad (35)$$

Интегрируя по частям (35), получаем

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = -\frac{1}{\hat{h}_1} e^{\hat{h}_1(\tau-\eta)} e^{\int_{\eta}^{\tau} \varepsilon_1(\xi) d\xi} \Big|_{\tau}^{+\infty} - \frac{1}{\hat{h}_1} \int_{\tau}^{+\infty} \varepsilon_1(\eta) e^{\hat{h}_1(\tau-\eta) + \int_{\eta}^{\tau} \varepsilon_1(\xi) d\xi} d\eta. \quad (36)$$

Первое слагаемое в выражении (36) в точности равно $\frac{1}{\hat{h}_1}$, а второе стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$.

Отсюда, в соответствии с (33), получаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = -\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}.$$

В силу (31), (32), (24) получаем, что предел φ_2^* удовлетворяет (22). Следствие доказано.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Для исследования оптимальной траектории, найдем положение равновесия системы дифференциальных уравнений (37)–(39), полученной при дифференцировании (11), (12), (14). Будем рассматривать управление $u < 1$, так как в противном случае человеческий капитал работника не увеличивается:

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = -\hat{\xi}_1 \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}}{S} \right)^{\alpha} - \frac{\alpha \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_1 \hat{P}}{S} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}}{S} \right)^{\alpha-1} + (\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}) - \hat{\mu}) \varphi_1 - \delta\theta \hat{\xi}_1 \varphi_2, \quad (37)$$

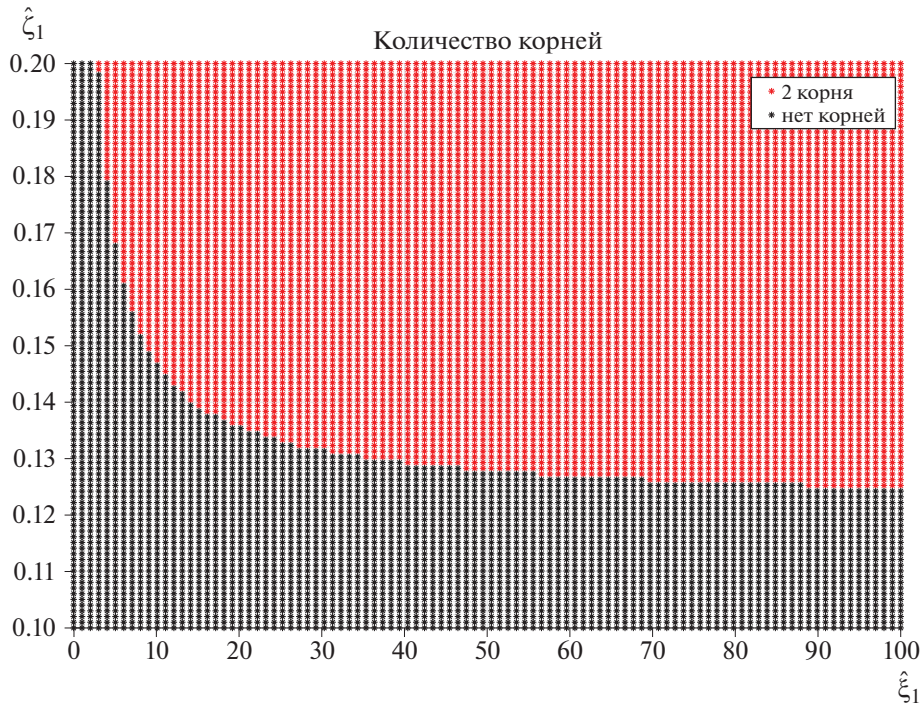
$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = \left(\frac{\varphi_1}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \hat{\xi}_1 \hat{P} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}}{S} \right)^{\alpha} + (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}) \varphi_2, \quad (38)$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = 1 - \left(\frac{\varphi_1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + \hat{\mu} \hat{P}. \quad (39)$$

Положение равновесия системы (37)–(39) представлено выражениями (21)–(23). Исследуем вопрос о количестве точек покоя системы (37)–(39). Обозначим через $f(\hat{P}^*)$ левую часть выражения (23), т.е.

$$\begin{aligned} f(\hat{P}^*) = & -\frac{\hat{\xi}_1}{S} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*}{S} \right)^{\alpha-1} (\alpha \hat{\xi}_1 \hat{P}^* + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* + 1) + \alpha (1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha-1} (\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*) - \hat{\mu}) + \\ & + \frac{\hat{\xi}_1}{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*} \left[(1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha} + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* \frac{(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*)^{\alpha}}{S} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Отметим, что $f(0) > 0$, при $S > 0$, $\hat{\mu} < 0$. Также, $\lim_{\hat{P}^* \rightarrow -1/\hat{\mu}} f(\hat{P}^*) = +\infty$. Значит, на множестве $[0, -1/\hat{\mu})$ уравнение $f(\hat{P}^*) = 0$ либо не имеет корней, либо имеет четное число корней в случае об-



Фиг. 1. Количество корней уравнения $f(\hat{P}^*) = 0$ при $\alpha = 0.8$, $\hat{\mu} = -0.5$, $S = 30$, $\delta = 0.01$.

щего положения. На фиг. 1 продемонстрировано количество корней уравнения $f(\hat{P}^*) = 0$ на плоскости $O\hat{\xi}_1\hat{\xi}_1$. Как видно из фиг. 1, при рассматриваемых параметрах уравнение $f(\hat{P}^*) = 0$ либо не имеет корней, либо имеет два корня.

Для изучения типов точек положения равновесия, проведем линеаризацию системы (37)–(39) в окрестностях положений равновесия. Матрица Якоби линеаризованной системы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*) - \hat{\mu}, \\ a_{12} &= -\delta\theta\hat{\xi}_1, \\ a_{13} &= \delta\theta\alpha\hat{\xi}_1(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^{\alpha-1} - \alpha\hat{\xi}_1\hat{\xi}_1\left(\frac{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*}{S}\right)^{\alpha-2} \left[2(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*) + \hat{P}^* \frac{\hat{\xi}_1(\alpha-1)}{S^2} \right], \\ a_{21} &= -\frac{1}{1-\alpha}(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*), \\ a_{22} &= \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*), \\ a_{23} &= \frac{\hat{\xi}_1}{S} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*}{S} \right)^{\alpha-1} \left[1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^* + \alpha\hat{\xi}_1\hat{P}^* - \frac{\hat{\xi}_1(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*)}{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*} \hat{P}^* \right] - \frac{\hat{\xi}_1}{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*} (1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^\alpha, \\ a_{31} &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} (1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^{2-\alpha}, \\ a_{32} &= 0, \\ a_{33} &= \hat{\mu}. \end{aligned}$$

Выпишем характеристическое уравнение линеаризованной системы $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, где E — единичная матрица. Пусть

$$\begin{aligned} b &= a_{11} + a_{22} + \hat{\mu}, \\ c &= a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} - a_{22}\hat{\mu} - a_{11}\hat{\mu}, \\ d &= \hat{\mu}a_{11}a_{22} - \hat{\mu}a_{12}a_{21} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{31}a_{22}. \end{aligned}$$

Тогда характеристическую функцию можно записать в следующем виде:

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d. \quad (41)$$

Отметим, что линеаризованная система является неустойчивой, так как коэффициент при множителе λ^3 отрицателен, а

$$b = a_{11} + a_{22} + \hat{\mu} = 2\delta\theta(1 + \xi_1\hat{P}^*) > 0.$$

Предложение 1. Если коэффициент d характеристического уравнения

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$$

отрицателен, $b > 0$, то существует вещественный отрицательный корень характеристического уравнения, а два других корня имеют положительные вещественные части.

Доказательство. Поскольку система является неустойчивой, то все 3 корня характеристического уравнения $\chi_A(\lambda) = 0$ не могут быть отрицательными. Заметим, что $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \chi_A(\lambda) = +\infty$, а $\chi_A(0) = d < 0$. Значит, уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ имеет единственный вещественный отрицательный корень. Обозначим корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Пусть $\lambda_1 < 0$. Из формул Виета имеем, что

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = d.$$

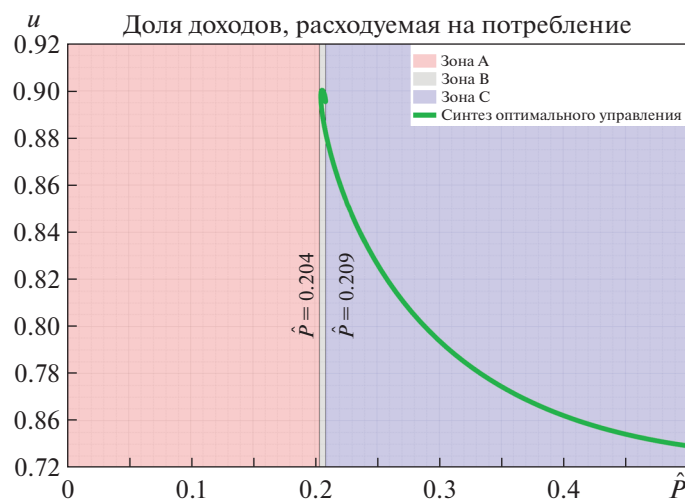
Отсюда получаем, что $\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0, \operatorname{Re}(\lambda_3) > 0$. Предложение доказано.

Замечание 1. При условиях предложения 1, собственный вектор, соответствующий отрицательному вещественному корню характеристического уравнения (41), формирует устойчивую сепаратрису.

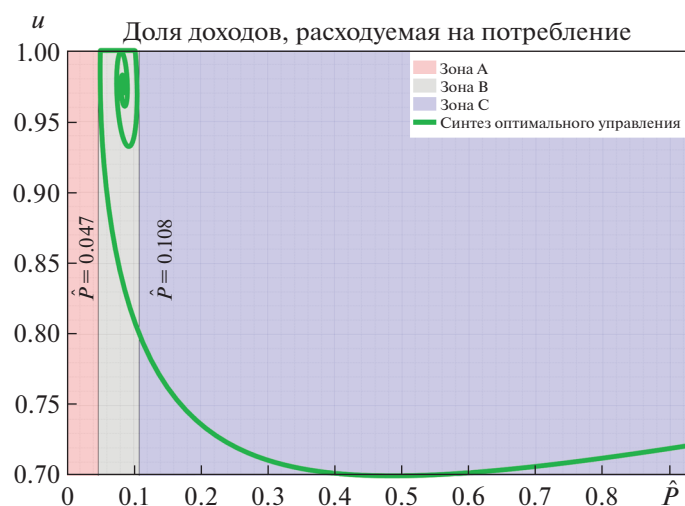
4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе мы представляем численные результаты моделирования поведения работника на рынке труда. Входными параметрами являются $\xi_1, \xi_1, \alpha, \hat{\mu}$. Чтобы ответить на вопросы, какая будет новая заработная плата работника при достижении определенной квалификации и сколько времени необходимо затратить работнику на развитие человеческого капитала, необходимо осуществить обратный переход к размерным величинам, где необходимо знать параметры коэффициента дисконтирования δ и текущей заработной платы S . Ранее в [4, 6] мы рассматривали статистические данные обследования бюджетов домашних хозяйств (ОБДХ), собираемые Росстатом [5] с 2015 по 2020 г. Статистические данные ОБДХ собираются ежеквартально и охватывают около 50 000 домашних хозяйств из 82 регионов России. На основе данных по уровню потребления на душу населения эти регионы были разбиты на 3 группы: бедную группу, среднюю группу и богатую группу. Обследования ОБДХ показали, что примерно половина домашних хозяйств из бедной группы проживают в населенном пункте городского типа, а оставшаяся половина в селе. Это мотивировало разбить бедную группу регионов еще на две, поскольку стиль жизни в городе отличается от стиля жизни в селе. С помощью программного комплекса [11] были выделены заемщики по потребительскому кредиту в каждой группе регионов. Заемщики делятся на два типа: низкодоходные и высокодоходные, которые формируют социальные слои.

В работе [4], с помощью программного комплекса [11], была проведена идентификация поведения репрезентативных низкодоходных и высокодоходных заемщиков в каждой группе регионов, откуда были установлены параметры отвращения к риску и коэффициент дисконтирования. Мы используем эти параметры для моделирования поведения работника на рынке труда для данных социальных слоев.

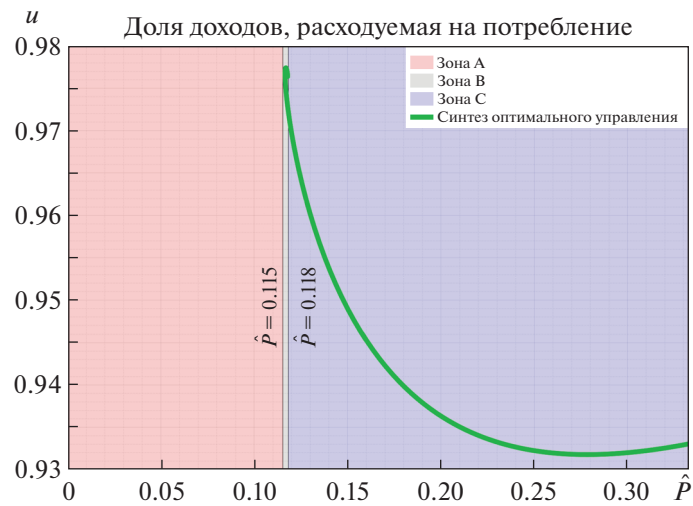


Фиг. 2. Бедная группа регионов. Город. Низкодоходные слои населения.

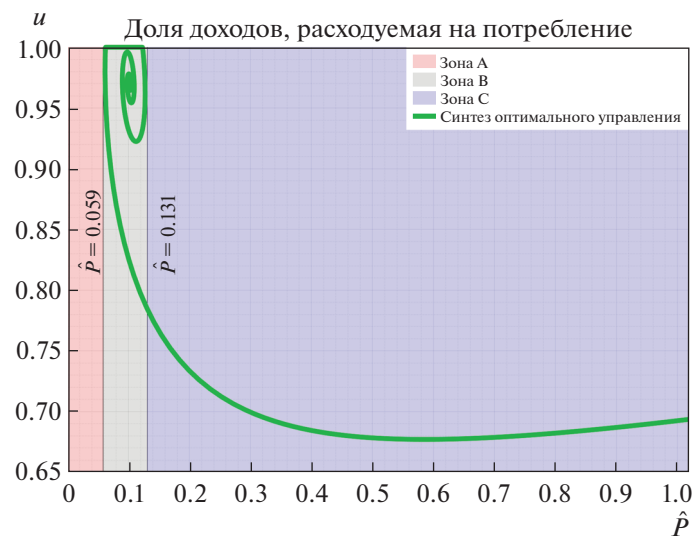


Фиг. 3. Бедная группа регионов. Город. Высокодоходные слои населения.

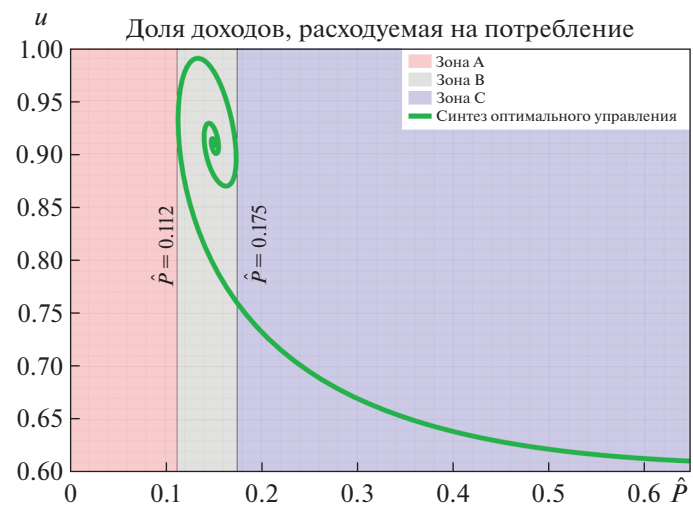
Будем рассматривать такие параметры модели, чтобы для одной из точек положения равновесия коэффициент d в характеристическом уравнении (41) был отрицателен. Это гарантирует наличие устойчивой сепаратрисы вдоль собственного вектора, соответствующего отрицательному вещественному собственному значению линеаризованной системы. В приложении представлены наборы параметров идентификации поведения работников в каждой группе регионов в разных социальных слоях. Отметим, что используемые данные о доходах и коэффициентах дисконтирования актуальны на конец 2021 г. Доходы представлены в тыс. руб. и формируются для трудоустроенной доли людей, проживающих в домашнем хозяйстве. Также в приложении представлены результаты вложений работников в человеческий капитал: во сколько раз вырастут заработная плата работника (величина $1 + \xi_1 P^*$) и характерное время повышения квалификации работника, до появления новой вакансии будем оценивать величиной $\frac{1}{\xi_1 P^*}$, где P^* — положение равновесия, к которому стремится устойчивая сепаратриса. На фиг. 2–9 представлен синтез оптимального управления, характеризующий затрачиваемую долю от доходов работника на вложения в человеческий капитал в зависимости от текущей квалификации в разных социальных слоях.



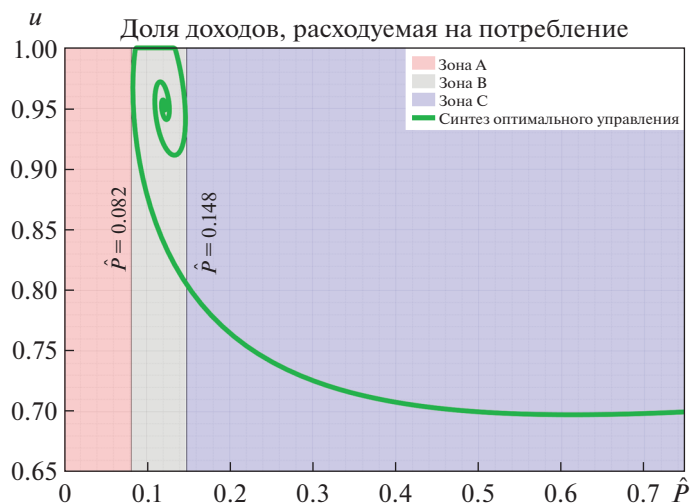
Фиг. 4. Бедная группа регионов. Село. Низкодоходные слои населения.



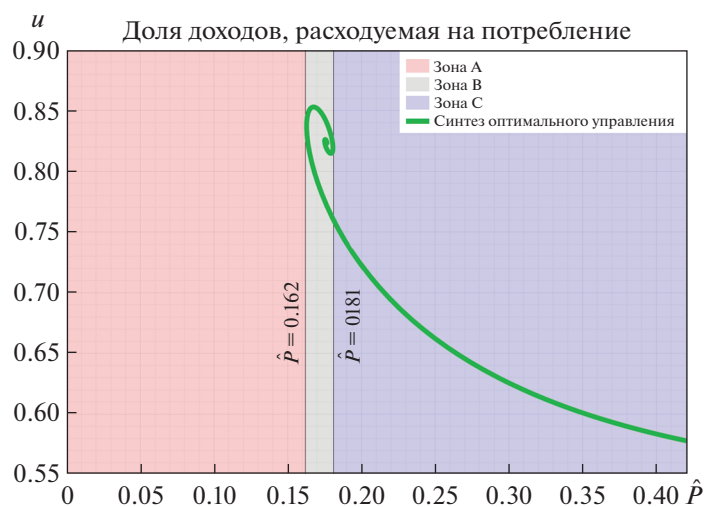
Фиг. 5. Бедная группа регионов. Село. Высокодоходные слои населения.



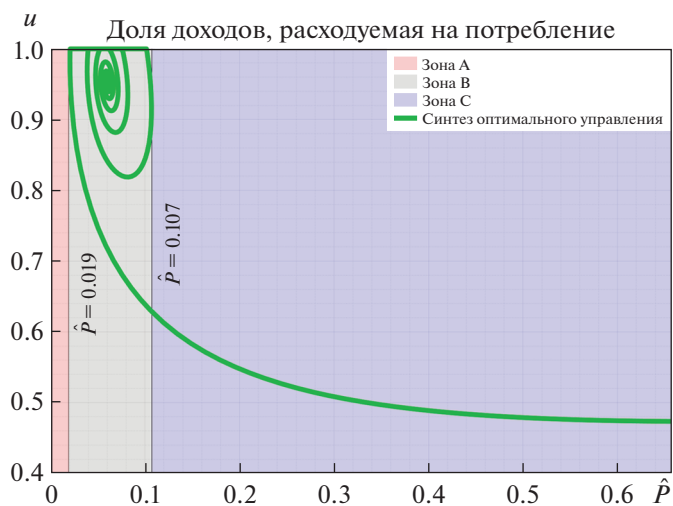
Фиг. 6. Средняя группа регионов. Низкодоходные слои населения.



Фиг. 7. Средняя группа регионов. Высокодоходные слои населения.



Фиг. 8. Богатая группа регионов. Низкодоходные слои населения.



Фиг. 9. Богатая группа регионов. Высокодоходные слои населения.

На фиг. 2, 4 можно выделить две зоны оптимального управления, а на фиг. 3, 5–9 три зоны оптимального управления. Назовем зоной *A* — зону отсутствия вложения в человеческий капитал, зоной *B* — зону неопределенности, когда возможны колебания в поведении работника по управлению человеческим капиталом, зоной *C* — зону развития человеческого капитала. Из анализа структуры синтеза оптимального управления видно, что сами по себе домашние хозяйства не вкладывают в человеческий капитал, им необходим стимул для его развития. В качестве таких стимулов могут выступать программы дополнительного образования, бесплатные курсы по развитию компетенций. Лишь имея определенный запас человеческого капитала, домашние хозяйства начинают его развивать. Стоит отметить, что низкодоходные слои населения нуждаются в большем стимуле к развитию человеческого капитала, чем высокодоходные слои населения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлена модель поведения работника на рынке труда. Предполагается, что работник тратит свою заработную плату на потребительские расходы и на вложение в человеческий капитал. Работник максимизирует дисконтированное потребление и стремится увеличить свою квалификацию путем увеличения человеческого капитала для получения более высокой заработной платы. Переход на более высокую заработную плату осуществляется при достижении определенной квалификации в случайный момент времени. Задача сформулирована в виде задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте. В работе доказано существование решения задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, включая условия трансверсальности, численно построено решение в форме синтеза оптимального управления, на основе которого проанализировано поведение на рынке труда различных социальных слоев России. Результаты показывают, что домашним хозяйствам необходим стимул для развития человеческого капитала. В качестве таких стимулов могут выступать программы дополнительного образования, бесплатные курсы по развитию компетенций. Показано, что низкодоходные слои населения не стремятся развивать человеческий капитал по сравнению с высокодоходными слоями населения, а тратят практически все свои доходы на потребительские расходы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Идентификация поведения работников на рынке труда. Месячные данные

Бедная группа регионов. Город. Низкодоходные заемщики

$$\hat{\xi}_1 = 0.65, \hat{\zeta}_1 = 0.15, \hat{\mu} = -0.5, \alpha = 0.924, \delta = 0.012101.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.08 раза за 2.5 мес. и составит 26.98 тыс. руб.

Бедная группа регионов. Город. Высокодоходные заемщики

$$\hat{\xi}_1 = 72, \hat{\zeta}_1 = 0.1472, \hat{\mu} = -0.3, \alpha = 0.8515, \delta = 0.011451.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.14 раза за 1.3 мес. и составит 49.51 тыс. руб.

Бедная группа регионов. Село. Низкодоходные заемщики

$$\hat{\xi}_1 = 94, \hat{\zeta}_1 = 0.1349, \hat{\mu} = -0.2, \alpha = 0.7989, \delta = 0.01096.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.05 раза за 2.9 мес. и составит 23.49 тыс. руб.

Бедная группа регионов. Село. Высокодоходные заемщики

$$\hat{\xi}_1 = 60, \hat{\zeta}_1 = 0.135, \hat{\mu} = -0.3, \alpha = 0.8562, \delta = 0.010459.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.14 раза за 1.6 мес. и составит 46.21 тыс. руб.

Средняя группа регионов. Низкодоходные заемщики

$$\hat{\xi}_1 = 40, \hat{\zeta}_1 = 0.157, \hat{\mu} = -0.6, \alpha = 0.7988, \delta = 0.011446.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.1 раза за 3.4 мес. и составит 32.43 тыс. руб.

Средняя группа регионов. Высокодоходные заемщики

$$\hat{\xi}_1 = 46, \hat{\zeta}_1 = 0.145, \hat{\mu} = -0.4, \alpha = 0.7768, \delta = 0.010835.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.11 раза за 2.7 мес. и составит 60.4 тыс. руб.

Богатая группа регионов. Низкодоходные заемщики

$$\hat{\xi}_1 = 60, \hat{\zeta}_1 = 0.1633, \hat{\mu} = -1, \alpha = 0.8912, \delta = 0.012493.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.07 раза за 3.2 мес. и составит 46.46 тыс. руб.
Богатая группа регионов. Высокодоходные заемщики

$$\xi_1 = 78, \zeta_1 = 0.16, \mu = -0.8, \alpha = 0.7479, \delta = 0.010618.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.11 раза за 1.8 мес. и составит 96.5 тыс. руб.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramsey F.P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. V. 152. № 38. P. 543–559.
2. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
3. Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. Consumer Loan Demand Modeling // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. 2021. CCIS. V. 1476. P. 417–428.
4. Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование рынка потребительского кредита в России в условиях санкций // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. С. 71–80.
5. Обследование бюджетов домашних хозяйств [Электронный ресурс] / Федеральная служба государственной статистики. 2015–2020. <https://obdx.gks.ru/> (дата обращения: 11.03.2023)
6. Trusov N. Identification of the household behavior modeling based on modified Ramsey model // Lobachevskii J.Math. 2023. V. 44. № 1. P. 454–468.
7. Lucas R. On the Mechanics of Economic Development // J. of Monetary Economics. 1988. V. 22. P. 3–42.
8. Дмитрук А.В., Кузькина Н.В. Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени // Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 4. С. 503–518.
9. Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжмский А.В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67. № 2 (404). С. 3–64.
10. Асеев С.М., Вельвов В.М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 6. С. 3–54.
11. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2022619524. “Анализ спроса на потребительский кредит в РФ”. Правообладатель: Трусов Николай Всеволодович. Заявка № 2022618580. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2022 г.