ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 10, с. 1660–1673

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.633

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ[1)]

© 2023 г. Л. Ван[1,3,*], И. С. Меньшов[1,2,3,], А. А. Серёжкин[2,3,***]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

[2] 127030 Москва, Сущевская ул., 22,
Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова (ВНИИА), Россия

[3] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

**e-mail: wanglujie@mail.ru*

***e-mail: imen57@mail.ru*

****e-mail: aaserezhkin@gmail.com*

Поступила в редакцию 16.06.2023 г.
Переработанный вариант 16.06.2023 г.
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассматривается модель Уилкинса для упругопластической среды. Проводится теоретический анализ разрывных решений в предположении одномерной одноосной деформации. В этом приближении материальные уравнения для девиатора тензора напряжений интегрируются точно, и остается только консервативная система законов сохранения, что позволяет найти класс точных автомодельных решений модели. Для решения расширенной неконсервативной системы уравнений разрабатывается численный метод годуновского типа с использованием приближенного римановского солвера, построенного на основе интегрирования уравнений по фазовому пути. Предлагается специальный выбор пути, который сводит двухволновое HLL решение задачи Римана к линейным уравнениям. Приводится сравнение численных и точных аналитических решений на ряде задач с различными режимами ударно-волновых процессов. Библ. 19. Фиг. 6. Табл. 4.

Ключевые слова: упруго-пластическая среда, модель Уилкинса, консервативная по пути схема Годунова.

DOI: 10.31857/S0044466923100162, **EDN:** FOZVKE

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существуют два основных подхода к описанию упругопластических свойств твердых тел при конечных деформациях (Finite strain elastoplasticity). Первый подход приводит к так называемым в литературе гипоупругим моделям, которые являются обобщением стандартных упругих моделей малых деформаций на область конечных деформаций. Наиболее известной из этих моделей считается модель Уилкинса (см. [1]) с критерием пластичности по Мизесу. В качестве параметров среды рассматриваются параметры плотности, скорости, энергии и компонент девиатора тензора напряжений. Упругое и пластическое состояние материала разделяется в фазовом пространстве компонент тензора напряжений поверхностью текучести, определяемой модулем девиатора тензора напряжений. При достижении в процессе деформации поверхности текучести, в материале происходят необратимые пластические деформации. Тензор напряжения в режиме пластического течения эволюционирует таким образом, что его модуль находится на поверхности текучести.

Второе направление связано с развитием гиперупругих моделей упругопластических деформаций. Основы этих моделей были заложены в работах Годунова, Роменского и Пешкова (см. [2, 3]). Эти модели (далее ГРП) строятся на общих принципах рациональной механики и термоди-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 23-11-00218).

намики и являются физически более обоснованными, чем гипоупругие модели. В частности, гиперупругая модель ГРП является термодинамически согласованной, в то время как модель Уилкинса удовлетворяет второму закону термодинамики только при определенных предположениях (см. [4]). Кроме того, гиперупругие модели описываются системой уравнений в форме законов сохранения, в то время как уравнения гипоупругой модели являются неконсервативными из-за дополнительных материальных соотношений на компоненты девиатора тензора напряжений.

Тем не менее, несмотря на указанные недостатки, гипоупругие модели достаточно широко используются в численных исследованиях упругопластических процессов в твердых материалах при интенсивных нагрузках (см. [5, 6]). Это обусловливается простотой модели, понятной природой определяющих параметров и, в конечном итоге, способностью воспроизводить необходимые лабораторные данные и данные инженерных приложений, которые в основном имеют форму соотношений изменения напряжения в зависимости от изменения деформации (см. [7]). Модель ГРП более сложна в реализации и требует специальной калибровки ряда модельных параметров и постановки адекватных граничных условий при решении практических задач (см. [8]).

Из-за неконсервативного вида определяющей системы уравнений модели Уилкинса решение задач с сильными разрывами неоднозначно, поскольку классические соотношения Ренкина–Гюгонио для законов сохранения неприменимы к неконсервативным системам. В настоящее время эта проблема решается с помощью численных методов, основанных на консервативных вдоль пути в фазовом пространстве схемах (path-conservative schemes) (см. [9–11]). При разработке этих схем используется теория Dal Maso, LeFloch, and Murat (DLM) (см. [12]) слабых решений неконсервативных гиперболических систем уравнений. Разрывные решения в этой теории описываются с помощью интегрирования определяющих уравнений вдоль специально выбранной непрерывной параметризуемой кривой (пути) в фазовом пространстве. В практических приложениях используют, как правило, простейший выбор – прямолинейный отрезок, соединяющий две точки фазового пространства (см. [13, 14]). При реализации такого подхода это приводит к нелинейной системе уравнений и, как следствие, проблемам, связанным с выбором начальных данных и сходимостью итерационного процесса. Нетривиальный выбор пути в фазовом пространстве на основе физических принципов, позволяющий получить полную волновую структуру решения, точно соответствующего аналитическому решению в случае консервативной системы (physics informed path choice), предложен в [15].

В настоящей работе предлагается эффективный численный метод для решения системы определяющих уравнений гипоупругой модели Уилкинса. Метод относится к классу проекционных методов годуновского типа. С этой целью используется приближенное двухволновое решение задачи Римана типа HLL. Слабая форма решения на разрыве строится по консервативной вдоль фазового пути схеме в соответствии с теорией DLM. Предлагается специальная форма пути в фазовом пространстве для уравнений модели Уилкинса, которая сводит двухволновое HLL решение задачи Римана к линейным уравнениям.

Статья структурирована следующим образом. В разд. 2 мы кратко описываем математическую модель Уилкинса упругопластической деформации, критерий текучести и уравнения состояния. В разд. 3 представлены точные аналитические решения с сильными и слабыми разрывами для приближения одномерной одноосной деформации, которые используются для верификации предложенных дискретных моделей. В разд. 4 с использованием схемы консервативного пути обобщается классический метод HLL для неконсервативных систем уравнений. Здесь предлагается применять не прямой путь, а специальный путь в фазовом пространстве, обоснованный свойствами математической модели. При этом для определения параметров возмущенной области в задаче Римана требуется решать только линейную систему уравнений, а не нелинейную систему уравнений, которая получается при стандартном выборе прямолинейного пути. В разд. 5 мы сравниваем численные и аналитические решения для оценки точности предложенной дискретной модели упругопластики.

2. ГИПОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ УИЛКИНСА

Гипоупругая модель Уилкинса описывает нестационарные упругопластические течения изотропной сплошной среды. В трехмерной эйлеровой постановке система уравнений записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{T}) = \mathbf{0},$$
$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} - \mathbf{T}\mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} + \mathbf{S}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{S} - 2\mu\left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}\right) = \lambda \mathbf{S}.$$

Здесь ρ – плотность, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, $\mathbf{T}$ – тензор напряжений, E – полная энергия, $\boldsymbol{\Omega} = 0.5\left(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)$ – тензор вращения, $\mathbf{D} = 0.5\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)$ – тензор скоростей деформации, $\mathbf{S}$ – девиатор тензора напряжений. $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$, $p = -1/3\mathbf{T}_{\mathbf{kk}}$ – давление, μ – модуль сдвига, параметр λ служит для введения критерия пластичности и будет определен ниже.

Первые три уравнения для модели Уилкинса – уравнения законов сохранения массы, импульса и энергии. Последнее уравнение – уравнение эволюции компонент девиатора тензора напряжения. Для описания перехода от упругого к пластическому режиму течения используется критерий Мизеса. Значения компонентов тензора напряжений не могут выходить за пределы так называемой поверхности текучести Мизеса $S_{ij}S_{ij} = 2/3Y^2$. Критерий Мизеса автоматически удовлетворяется, если λ имеет следующий вид:

$$\lambda = -\frac{3\mu \mathbf{S} : \mathbf{D}}{Y^2} H\left(\frac{\mathbf{S} : \mathbf{S}}{2} - \frac{Y^2}{3}\right), \tag{2}$$

где Y – предел текучести материала, $H(x)$ – функция Хевисайда.

Умножив последнее уравнение в (1) на $\mathbf{S}$ справа и слева и суммируя два полученных уравнения, получим

$$\mathbf{S} : \frac{D\mathbf{S}}{Dt} + \frac{D\mathbf{S}}{Dt} : \mathbf{S} - 2\mu(\mathbf{S} : \mathbf{D} + \mathbf{D} : \mathbf{S}) = 2\lambda \mathbf{S} : \mathbf{S}, \tag{3}$$

где $D\mathbf{S}/Dt = \partial\mathbf{S}/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{S} + \mathbf{S}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}$ означает производную тензора по времени с включением коррекции по Яуману. Следовательно, если $\mathbf{S} : \mathbf{S} \geq 2/3Y^2$, то

$$\frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{dt} = 2(\mathbf{S} : \mathbf{D})\left(2\mu - \frac{3\mu}{Y^2}(\mathbf{S} : \mathbf{S}) H\left(\frac{\mathbf{S} : \mathbf{S}}{2} - \frac{Y^2}{3}\right)\right) = 0. \tag{4}$$

Отсюда следует, что компоненты тензора напряжений всегда соответствуют области в фазовом пространстве, ограниченной поверхностью текучести, и не выходят за пределы этой поверхности.

Полная энергия, используемая в настоящей работе, определяется в форме $E = e + 0.5\mathbf{u}^2$, где $e = e(\rho, p)$ – внутренняя энергия. В рассматриваемой модели полная энергия не зависит от девиатора тензора напряжения. В некоторых работах, в частности в [5], полная энергия включает в себя третий член, описывающий энергию упругой деформации сдвига: $(\mathbf{S} : \mathbf{S})/(4\mu\rho)$. Включение обусловлено условием невозрастания энтропии при упругом нагружении среды. С другой стороны, изменения энтропии в данном случае мало, так что данной поправкой для простоты можно пренебречь.

Давление, плотность и энергия связаны уравнением состояния (УРС). В настоящей работе используются уравнения Ми–Грюнайзена:

$$p(\rho, e) = \rho_0 c_0^2 f(\eta) + \rho\Gamma e,$$
$$f(\eta) = \frac{(\eta - 1)\left(\eta - \frac{1}{2}\Gamma(\eta - 1)\right)}{(\eta - s(\eta - 1))^2}, \tag{5}$$
$$\eta = \frac{\rho}{\rho_0},$$

где ρ_0, c_0, s – константы, $\Gamma = (\partial p/\partial e)_\rho/\rho$ – параметр Грюнайзена.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ОДНООСНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Некоторый теоретический анализ структур сильных и слабых волн в упругопластическом материале представлен в [16, 17]. В настоящей работе мы используем методы из [17] и даем краткий вывод результатов. Детали этого анализа можно найти в [17].

В одномерном случае система уравнений (1) может быть упрощена при предположении об одноосной деформации. В этом случае последнее уравнение превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для одной компоненты девиатора тензора напряжений, интегрирование которого приводит к однозначной аналитической зависимости этой компоненты от плотности.

Для случая ударных волн с большой амплитудой примером одноосной деформации служит удар бесконечной плоской пластины по недеформируемой преграде с некоторой начальной скоростью. Используя условия Рэнкина–Гюгонио, на разрыве можно получить два известных соотношения – адиабату Гюгонио и линию Михельсона–Релея:

$$\begin{gathered} e - e_0 = \frac{1}{2}(\nu - \nu_0)(\sigma + \sigma_0), \\ \sigma - \sigma_0 = \dot{m}^2(\nu - \nu_0), \\ \dot{m} = \rho(u - D) = \rho_0(u_0 - D), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\nu = 1/\rho$, D – скорость ударной волны, индексом “0” обозначено начальное (невозмущенное) состояние.

Таким образом, состояния после прохождения ударных волн описываются точкой пересечения этих двух кривых. Анализ взаимного пересечения кривых показывает, что в зависимости от скорости удара возможны три типа ударно-волновой структуры в упругопластическом материале: одноволновой упругий режим, двухволновой режим с упругим предвестником и одноволновой пластический режим.

Рассмотрим отдельно двухволновой режим течения. Пусть критическое значение перехода от одноволнового упругого режима к двухволновому режиму определяется величиной массовой скорости $\dot{m}_Y$. При возникновении двухволнового режима первая ударная волна, называемая упругим предвестником, распространяется с интенсивностью $\dot{m} = \dot{m}_Y$. За этой волной параметры изменяются от начального значения до значения, определяемого пределом текучести. Скорости по обе стороны волны должны удовлетворять следующим условиям:

$$\dot{m}_Y = \rho_Y(u - D_1) = \rho_0(u_0 - D_1), \tag{7}$$

где $\dot{m}_Y$, ρ_Y, ρ_0 – значения, характеризующие поверхность текучести и начальное состояние соответственно. Вторая волна распространяется по состоянию, определяемому пределом текучести. Массовая скорость в этой волне меньше предельного значения $\dot{m}_Y$. С ростом интенсивности массовая скорость второй волны и ее скорость возрастают. При достижении значения $\dot{m}_Y$ скорости обеих волн сравниваются, и начинается переход к одноволновому пластическому режиму.

Кратко опишем свойства ударной волны в упругопластическом материале:

1. По мере увеличения скорости ударной волны структура проходит три фазы, а именно, одноволновый упругий режим, двухволновый режим с упругим предвестником и одноволновый пластический режим.

2. В двухволновом режиме после первой волны параметры состояния изменяются от начальных значений до значений, соответствующих точке текучести. Величина изменения скорости за фронтом волны определяется параметрами текучести материала.

3. В двухволновом режиме по мере увеличения интенсивности (скорости удара, если ударно-волновой процесс возникает в результате удара о недеформируемую преграду) вторая волна распространяется со все большей скоростью относительно неподвижной лабораторной системы координат, пока ее скорость не сравняется со скоростью первой волны, и процесс перейдет из двухволнового режима в одноволновой.

Слабые волны возникают при растяжении упругопластического материала. Примером такого процесса является следующая постановка задачи. Пусть имеется бесконечная плоская пластина, жестко прикрепленная к неподвижной недеформируемой преграде, скорость которой направлена ортогонально плоскости пластины в сторону от преграды. В результате внутри пластины распространяется центрированная волна разрежения, которая может иметь разную структуру в зависимости от величины начальной скорости.

В вышеприведенной постановке все физические величины зависят только от одной автомодельной переменной $\lambda = x/t$, и задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными:

$$
\begin{gathered}
\frac{d\sigma}{d\nu} = f_1(\sigma,\nu), \\
\frac{du}{d\nu} = f_2(\sigma,\nu), \\
\sigma\big|_{\nu=\nu_0} = \sigma_0, \quad u_{\nu=\nu_0} = u_0,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

которая может быть проинтегрирована численно, например, с помощью метода Рунге–Кутты. Особенностью этой системы является слабый разрыв на решении $\sigma = \sigma(\nu)$ в точке, соответствующей параметрам текучести. Таким образом, при растяжении возможно формирование как одной центрированной волны растяжения, так и двух центрированных волн растяжения в зависимости от интенсивности (скорости) растяжения.

Основные свойства возникающих при растяжении центрированных волн разгрузки следующие.

1. Структура слабых волн разгрузки при увеличении скорости растяжения упругопластического материала меняется от одноволновой к двухволновой. Одноволновая структура (одна центрированная волна) возникает при небольших скоростях растяжения, когда изменения параметров в волне происходят в упругой области.

2. В двухволновом режиме (две центрированные волны) после первой волны параметры состояния изменяются от начальных значений до состояния, определяемого параметрами текучести. Дальнейшее изменение параметров происходит уже в пластической области во второй волне.

В разд. 5 численные результаты сравниваются с этими аналитическими выводами, сделанными на основе точного теоретического анализа.

4. КОНСЕРВАТИВНАЯ ВДОЛЬ ФАЗОВОГО ПУТИ СХЕМА HLL

Аппроксимация решения задачи о распаде разрыва типа HLL характеризуется тем, что учитываются только самые крайние волны со скоростями s_L и s_R, ограничивающие возмущенную область слева и справа соответственно. Скорости этих волн определяются максимальным и минимальным собственными значениями матрицы Якоби линеаризованной системы уравнений. Для рассматриваемой системы уравнений эти значения следующие: $\lambda_{\min} = u - \sqrt{c^2 + 4\mu/3\rho}$, $\lambda_{\max} = u + \sqrt{c^2 + 4\mu/3\rho}$, где $c^2 = p_\rho + \left(p/\rho^2\right) p_e$ – термодинамическая скорость звука.

Скорости ограничивающих возмущенную область характеристик рассчитываются по предложенной Энфилдом методике (см. [18]) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
s_L &= \min\left(0, \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_L), \lambda_{\min}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R)\right)\right), \\
s_R &= \max\left(0, \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_R), \lambda_{\max}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R)\right)\right),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $\mathbf{Q}$ обозначает вектор состояния.

Структура приближенного решения задачи о распаде разрыва имеет вид постоянного распределения параметров между левой и правой границами возмущенной зоны. Обозначим данное состояние как $\mathbf{Q}_*$. Состояние слева от начального разрыва обозначается как $\mathbf{Q}_L$, состояние справа как $\mathbf{Q}_R$. Состояния $\mathbf{Q}_L$ и $\mathbf{Q}_*$, а также $\mathbf{Q}_*$ и $\mathbf{Q}_R$ связаны обобщенными соотношениями Рэнкина–Гюгонио на соответствующих разрывах.

Рассмотрим расширенную одномерную систему уравнений, являющуюся следствием пространственной системы уравнений (1), когда все переменные зависят только от одной пространственной переменной x и времени t. Она может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u^2+P-S_{xx}\right)}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv-S_{xy})}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw-S_{xz})}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uE+(P-S_{xx})u-S_{xy}v-S_{xz}w)}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial(\rho S_{xx})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uS_{xx})}{\partial x}-\frac{4}{3}\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho S_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\rho S_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial(\rho S_{yy})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uS_{yy})}{\partial x}+\frac{2}{3}\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-\rho S_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial(\rho S_{zz})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uS_{zz})}{\partial x}+\frac{2}{3}\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-\rho S_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial(\rho S_{xy})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uS_{xy})}{\partial x}-\mu\rho\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\rho\left((S_{yy}-S_{xx})\frac{\partial v}{\partial x}+S_{yz}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0,\\
\frac{\partial(\rho S_{xz})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uS_{xz})}{\partial x}-\mu\rho\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{2}\rho\left((S_{zz}-S_{xx})\frac{\partial w}{\partial x}+S_{yz}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,\\
\frac{\partial(\rho S_{yz})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uS_{yz})}{\partial x}+\frac{1}{2}\rho\left(-S_{xz}\frac{\partial v}{\partial x}-S_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0.
\end{gathered}\tag{10}$$

Первые пять уравнений в (10), т.е. консервативные уравнения для массы, импульса и энергии, решаются численно методом Годунова на основе приближенного HLL решения задачи Римана (см. [19]). Для построения обобщенных условий Рэнкина–Гюгонио для неконсервативной части в последних шести уравнениях используется метод интегрирования по пути в фазовом пространстве (path-conservative scheme, см. [14]). С этой целью рассмотрим нелинейную гиперболическую систему вида

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{B}(\mathbf{Q})\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial x}=0.\tag{11}$$

Запишем систему уравнений в автомодельной переменной $\lambda = x/t$:

$$\mathbf{Q}-\frac{\partial(\lambda\mathbf{Q})}{\partial\lambda}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}+\mathbf{B}(\mathbf{Q})\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\lambda}=0.\tag{12}$$

Интегрируя (12) по $\lambda\in[s_L,s_R]$, получаем

$$\begin{gathered}
\mathbf{Q}_*(s_R-s_L)-(\mathbf{Q}_Rs_R-\mathbf{Q}_Ls_L)+(\mathbf{f}_R-\mathbf{f}_L)+\int\limits_{\mathbf{Q}_L}^{\mathbf{Q}_*}\mathbf{B}(\mathbf{Q})\,d\mathbf{Q}+\int\limits_{\mathbf{Q}_*}^{\mathbf{Q}_R}\mathbf{B}(\mathbf{Q})\,d\mathbf{Q}=0,\\
\int\limits_{\mathbf{Q}_L}^{\mathbf{Q}_*}\mathbf{B}(\mathbf{Q})\,d\mathbf{Q}=\int\limits_0^1\mathbf{B}\left(\psi(\mathbf{Q}_L,\mathbf{Q}_*,s)\right)\frac{\partial\psi}{\partial s}ds,\\
\int\limits_{\mathbf{Q}_*}^{\mathbf{Q}_R}\mathbf{B}(\mathbf{Q})\,d\mathbf{Q}=\int\limits_0^1\mathbf{B}\left(\psi(\mathbf{Q}_*,\mathbf{Q}_R,s)\right)\frac{\partial\psi}{\partial s}ds,
\end{gathered}\tag{13}$$

где $\boldsymbol{\psi}(s)$ – непрерывная параметризуемая кривая в фазовом пространстве (путь), $0 \le s \le 1$ – параметр вдоль кривой. Следовательно, результат интегрирования неконсервативной части зависит от выбора пути. В большинстве схем в качестве пути выбирается прямолинейный отрезок, соединяющий состояния слева и справа от разрыва:

$$\begin{gathered}\psi\left(\mathbf{Q}_L,\mathbf{Q}_*,s\right)=\mathbf{Q}_L+\left(\mathbf{Q}_*-\mathbf{Q}_L\right)s,\\ \int_0^1\mathbf{B}\left(\psi\left(\mathbf{Q}_L,\mathbf{Q}_*,s\right)\right)\frac{\partial\psi}{\partial s}ds=\left(\mathbf{Q}_*-\mathbf{Q}_L\right)\int_0^1\mathbf{B}\left(\psi\left(\mathbf{Q}_L,\mathbf{Q}_*,s\right)\right)ds.\end{gathered} \tag{14}$$

Учитывая конкретную форму уравнений в (10), в настоящей работе выбран альтернативный путь, позволяющий упростить вычисление интегралов и избежать итерационного процесса определения параметров возмущенного состояния.

Возьмем для примера шестое уравнение в (10) и, используя уравнение сохранения массы, получим

$$\frac{\partial\left(\rho S_{xx}+4/3\mu\rho\ln\rho\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho uS_{xx}+4/3\mu\rho u\ln\rho\right)}{\partial x}+\rho S_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\rho S_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}=0. \tag{15}$$

Используя (13) для первого уравнения в (10), получаем

$$\begin{gathered}\rho_*\left(s_L-u_*\right)=\rho_L\left(s_L-u_L\right),\\ \rho_*\left(s_R-u_*\right)=\rho_R\left(s_R-u_R\right).\end{gathered} \tag{16}$$

С помощью (16) и, используя (13) для (15), получаем

$$\begin{gathered}\rho_*\left(s_R-s_L\right)S_{xx}^*=\rho_*\left(s_R-u_*\right)S'_{xxR}-\rho_*\left(s_L-u_*\right)S'_{xxL}-B,\\ S'_{xxL}=S_{xxL}+\frac{4}{3}\mu\ln\left(\frac{\rho_L}{\rho_*}\right),\quad S'_{xxR}=S_{xxR}+\frac{4}{3}\mu\ln\left(\frac{\rho_R}{\rho_*}\right),\\ B=\int_0^1\left(\rho S_{xy}\frac{\partial v}{\partial s}+\rho S_{xz}\frac{\partial w}{\partial s}\right)ds\left(\mathbf{Q}_L\to\mathbf{Q}_*\right)+\int_0^1\left(\rho S_{xy}\frac{\partial v}{\partial s}+\rho S_{xz}\frac{\partial w}{\partial s}\right)ds\left(\mathbf{Q}_*\to\mathbf{Q}_R\right).\end{gathered} \tag{17}$$

Предположим, что путь, соединяющий $\mathbf{Q}_L$ и $\mathbf{Q}_*$ в фазовом пространстве, состоит из двух звеньев в виде прямолинейных отрезков. При этом вдоль первого звена компоненты скорости v и w не изменяются, ρ меняется от ρ_L до ρ_*, для $i = j$ компоненты S_{ij} меняются от S_{ijL} до S'_{ijL}, а остальные компоненты не меняются. Вдоль второго звена $\rho = \rho_*$, а компоненты скорости v, w и компоненты S_{ij} для $i \ne j$ изменяются линейно от S_{ijL} до S^*_{ijL}, а для $i = j$ – от S'_{ijL} до S^*_{ijL}. Путь в фазовом пространстве, соединяющий состояния $\mathbf{Q}_R$ и $\mathbf{Q}_*$, будет строиться аналогично.

При этих предположениях имеем

$$\begin{gathered}\int_0^1\left(\rho S_{xy}\frac{\partial v}{\partial s}+\rho S_{xz}\frac{\partial w}{\partial s}\right)ds\left(\mathbf{Q}_L\to\mathbf{Q}_*\right)=\frac{\rho_*}{2}\left(S_{xyL}+S_{xy}^*\right)\left(v_*-v_L\right)+\frac{\rho_*}{2}\left(S_{xzL}+S_{xz}^*\right)\left(w_*-w_L\right),\\ \int_0^1\left(\rho S_{xy}\frac{\partial v}{\partial s}+\rho S_{xz}\frac{\partial w}{\partial s}\right)ds\left(\mathbf{Q}_*\to\mathbf{Q}_R\right)=-\frac{\rho_*}{2}\left(S_{xyR}+S_{xy}^*\right)\left(v_*-v_R\right)-\frac{\rho_*}{2}\left(S_{xzR}+S_{xz}^*\right)\left(w_*-w_R\right).\end{gathered} \tag{18}$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены все уравнения в (10), имеющие неконсервативную форму записи. В результате получаем следующие выражения для параметров состояния в возмущенной зоне:

$$\rho_*=\frac{\rho_R\left(s_R-u_R\right)-\rho_L\left(s_L-u_L\right)}{s_R-s_L},$$

$$u_*=\frac{\rho_Ru_R\left(s_R-u_R\right)-\rho_Lu_L\left(s_L-u_L\right)-\left(P_R-S_{xxR}\right)+\left(P_L-S_{xxL}\right)}{\rho_*\left(s_R-s_L\right)},$$

$$v_* = \frac{\rho_R v_R (s_R - u_R) - \rho_L v_L (s_L - u_L) + S_{xyR} - S_{xyL}}{\rho_* (s_R - s_L)},$$

$$w_* = \frac{\rho_R w_R (s_R - u_R) - \rho_L w_L (s_L - u_L) + S_{xzR} - S_{xzL}}{\rho_* (s_R - s_L)},$$

$$E_* = \frac{\rho_R E_R (s_R - u_R) - (P_R - S_{xxR}) u_R + S_{xyR} v_R + S_{xzR} w_R}{\rho_* (s_R - s_L)} - \\ - \frac{\rho_L E_L (s_L - u_L) - (P_L - S_{xxL}) u_L + S_{xyL} v_L + S_{xzL} w_L}{\rho_* (s_R - s_L)}.$$

После этого компоненты девиатора тензора напряжений определяются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\mathbf{MS} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,$$

где $\mathbf{S} = (S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz})^{\mathbf{T}}$ – вектор компонент девиатора тензора напряжений, а матрицы M, A_1 и A_2 имеют следующий вид:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} s_R - s_L & 0 & 0 & \frac{v_R - v_L}{2} & \frac{w_R - w_L}{2} & 0 \\ 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{v_L - v_R}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{w_L - w_R}{2} & 0 \\ \frac{v_L - v_R}{4} & \frac{v_R - v_L}{4} & 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{w_R - w_L}{4} \\ \frac{w_L - w_R}{4} & 0 & \frac{w_R - w_L}{4} & 0 & s_R - s_L & \frac{v_R - v_L}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w_L - w_R}{4} & \frac{v_L - v_R}{4} & s_R - s_L \end{vmatrix}, \tag{20}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} S'_{xxR}(s_R - u_*) - S'_{xxL}(s_L - u_*) \\ S'_{yyR}(s_R - u_*) - S'_{yyL}(s_L - u_*) \\ S'_{zzR}(s_R - u_*) - S'_{zzL}(s_L - u_*) \\ S_{xyR}(s_R - u_*) - S_{xyL}(s_L - u_*) + \mu(v_R - v_L) \\ S_{xzR}(s_R - u_*) - S_{xzL}(s_L - u_*) + \mu(w_R - w_L) \\ S_{yzR}(s_R - u_*) - S_{yzL}(s_L - u_*) \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} \frac{v_* - v_L}{2} S_{xyL} + \frac{w_* - w_L}{2} S_{xzL} + \frac{v_R - v_*}{2} S_{xyR} + \frac{w_R - w_*}{2} S_{xzR} \\ -\frac{v_* - v_L}{2} S_{xyL} - \frac{v_R - v_*}{2} S_{xyR} \\ -\frac{w_* - w_L}{2} S_{xzL} - \frac{w_R - w_*}{2} S_{xzR} \\ \frac{v_* - v_L}{4}\left(S'_{yyL} - S'_{xxL}\right) + \frac{w_* - w_L}{4} S_{yzL} + \frac{v_R - v_*}{4}\left(S'_{yyR} - S'_{xxR}\right) + \frac{w_R - w_*}{4} S_{yzR} \\ \frac{w_R - w_*}{4}\left(S'_{zzR} - S'_{xxR}\right) + \frac{v_R - v_*}{4} S_{yzR} + \frac{w_* - w_L}{4}\left(S'_{zzL} - S'_{xxL}\right) + \frac{w_* - w_L}{4} S_{yzL} \\ -\frac{v_* - v_L}{4} S_{xzL} - \frac{w_* - w_L}{4} S_{xyL} - \frac{v_R - v_*}{4} S_{xzR} - \frac{w_R - w_*}{4} S_{xyR} \end{vmatrix} \tag{21}$$

$$S'_{yyL} = S_{yyL} - \frac{2}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho_*}\right),$$

$$S'_{zzL} = S_{zzL} - \frac{2}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho_*}\right),$$

$$S'_{yyR} = S_{yyR} - \frac{2}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_R}{\rho_*}\right),$$

$$S'_{zzR} = S_{zzR} - \frac{2}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_R}{\rho_*}\right).$$

Имея приближенное решение задачи Римана в каждом узле сетки, решение на новом временном слое определяется по классической схеме Годунова:

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{\Delta x}\left(D^-_{i+1/2} - D^+_{i-1/2}\right),$$

$$D^+_{i-1/2} = \int\limits_0^{s_{i-1/2,R}} \left(\mathbf{Q}^{RP}_{i-1/2} - \mathbf{Q}_i^n\right) dx = \Delta t \cdot s_{i-1/2,R}\left(\mathbf{Q}^{RP}_{i-1/2} - \mathbf{Q}_i^n\right), \quad (22)$$

$$D^-_{i+1/2} = \int\limits_{s_{i+1/2,L}}^{0} \left(\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}^{RP}_{i+1/2}\right) dx = \Delta t \cdot \left|s_{i+1/2,L}\right|\left(\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}^{RP}_{i+1/2}\right),$$

где Δx – длина сетки, Δt – шаг времени, $\mathbf{Q}^{RP}_{i-1/2}$ соответствует значению $\mathbf{Q}_*$ аппроксимации решения соответствующей задачи о распаде разрыва между ячейками сетки $i-1$ и i, $\mathbf{Q}^{RP}_{i+1/2}$ соответствует значению $\mathbf{Q}_*$ соответствующей задачи о распаде разрыва между ячейками сетки i и $i+1$, $s_{i-1/2,R}$ и $s_{i+1/2,L}$ – границы соответствующих возмущенных зон.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже приводятся результаты численных экспериментов по ударно-волновым процессам в упругопластическом материале в приближении одномерной одноосной деформации. Представленные результаты соответствуют следующей постановке задачи:

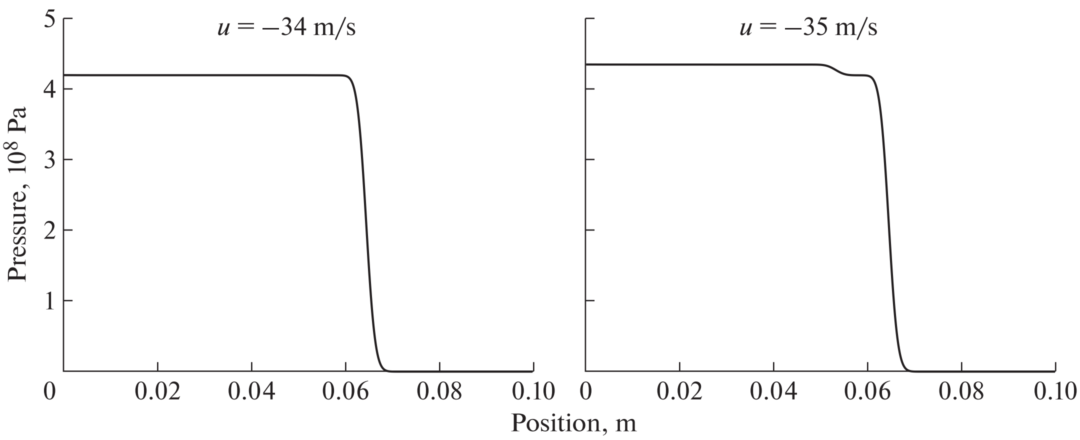
1. В качестве материала выбирается алюминий с УРС Ми–Грюнайзена. Соответствующие параметры УРС указаны в табл. 1.

2. Граничные условия – левая граница материала $x = 0$ соответствует граничному условию жесткой недеформируемой стенки $u = 0$, правая $x = 0.1$ – свободной лагранжевой границе с нулевым напряжением и давлением.

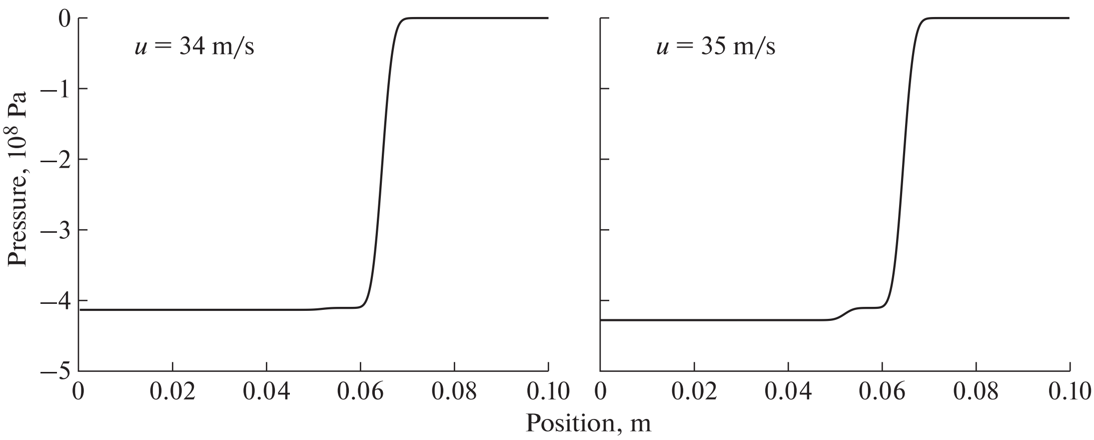
3. Начальные параметры – плотность ρ_0, скорость u_0, давление $p_0 = 0$, девиатор напряжений $S_0 = 0$. Графики на рисунках отвечают моменту времени 10^{-5} с.

Таблица 1. Константы алюминия и критические значения для случаев ударной волны и волны разрежения

Параметры УРС		Критические значения	Ударная волна	Центрированная волна растяжения
ρ_0, кг/м^3	2780	u_0^*, м/с	–34.02	33.82
Γ	2.13	ρ^*, кг/м^3	2794.64	2765.43
s	1.338	p^*, ГПа	0.42	–0.41
a_0, м/с	5330	u_0^{**}, м/с	–794.69	–
μ, ГПа	27.6	ρ^{**}, кг/м^3	3167.70	–
Y, ГПа	0.29	p^{**}, ГПа	14.15	–



Фиг. 1. Валидация критических значений для ударной волны (количество ячеек – 2000).



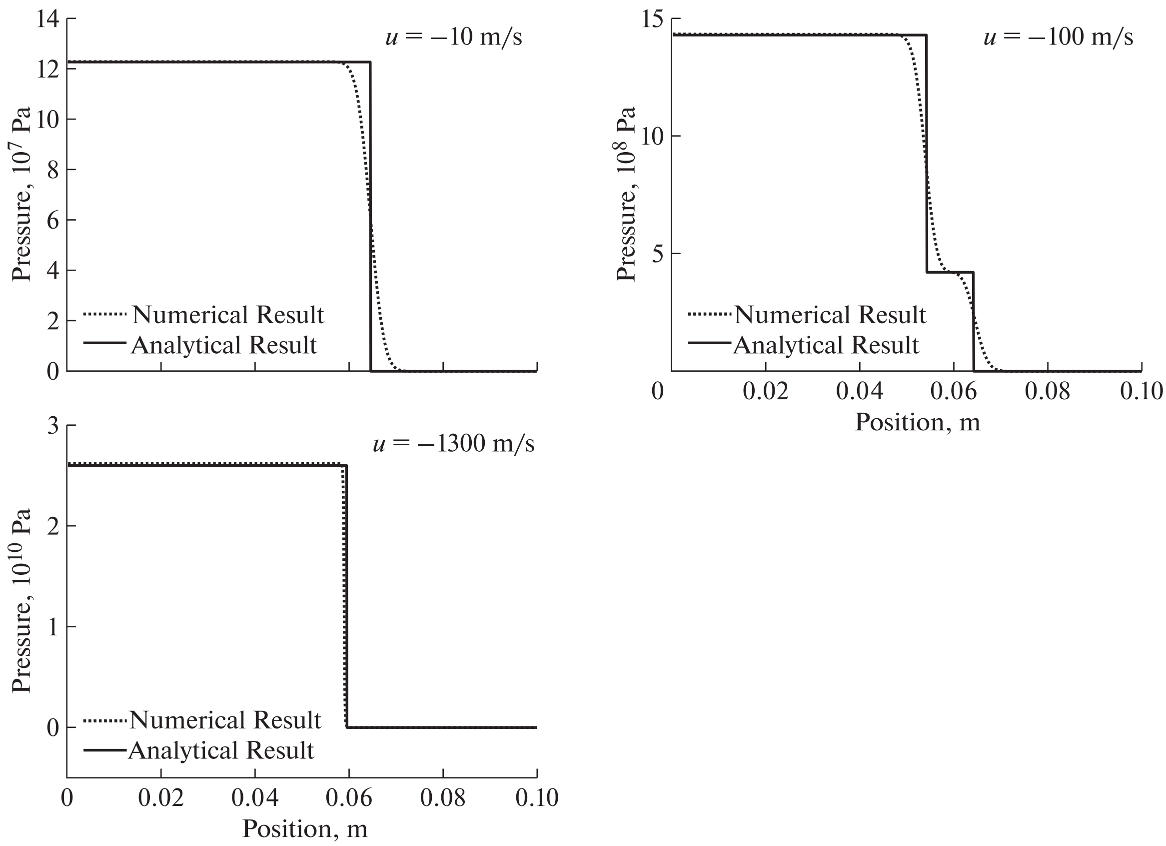
Фиг. 2. Валидация критических значений для волны разрежения.

4. В расчетах используется равномерная неподвижная сетка, состоящая из 1000 или 2000 ячеек. Вычисления проводятся с переменным шагом по времени, соответствующему условию устойчивости численного метода (условию CFL).

В первом столбце табл. 1 приведены константы УРС для алюминия, во втором – соответствующие критические параметры для ударной волны, а в третьем – для волны разрежения. Индексы * и ** обозначают критические значения для перехода от одноволнового к двухволновому режиму и от двухволнового к одноволновому режиму соответственно.

Рассмотрим следующие два случая. Первый случай является примером ударной волны, когда объект ударяется о стену слева с определенной отрицательной начальной скоростью. Второй случай является примером центрированной волны растяжения, когда левая сторона объекта прикреплена к стене, а правая растягивается с положительной начальной скоростью. В разд. 3 приводились теоретические значения основных характеристик структуры волн, которые теперь сравниваются с численными результатами.

На фиг. 1 и 2 показано распределение давления, когда начальная скорость находится около первого критического значения. Видно, что численно рассчитанные критические значения должны лежать между 34–35 м/с, что очень близко к данным, приведенным в табл. 1. Соответствующие теоретические и численные значения приведены в табл. 2. Индекс 1 обозначает параметр состояния после первой волны, а индекс 2 – параметр состояния после второй волны. В этой таблице ρ_1 и p_1 являются ρ^*и p^*, $u_1 = u_0 - u_0^*$, потому что, как уже отмечено, значение изменения скорости через первую волну фиксировано и величина равна u_0^*.



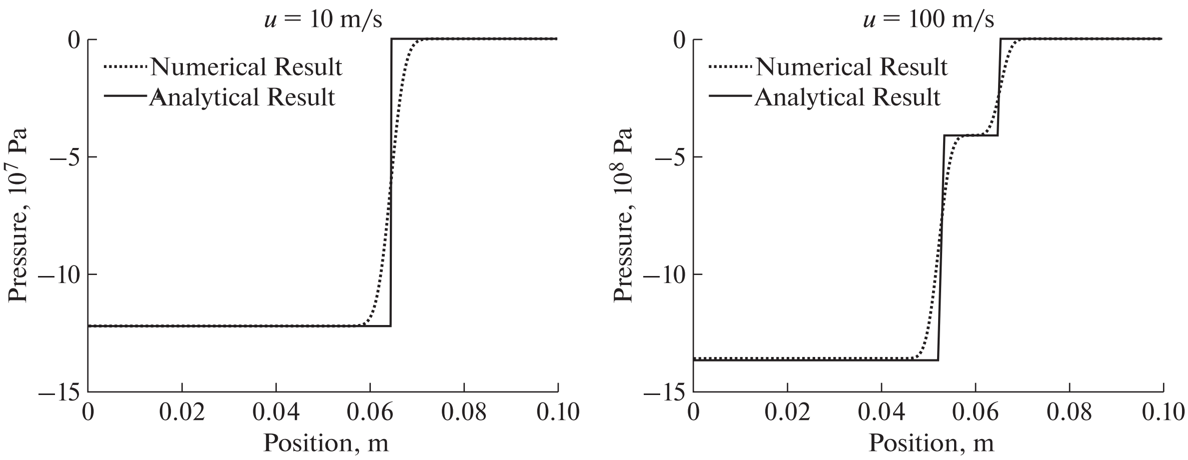
Фиг. 3. Распределение давления при нескольких различных скоростях для ударной волны.

При изменении начальной скорости соответственно меняется и режим волны. На фиг. 3 и 4 показаны численные результаты и теоретические значения для различных волновых режимов в случае ударных и центрированных волн. Соответствующие конкретные значения указаны в табл. 3 и 4.

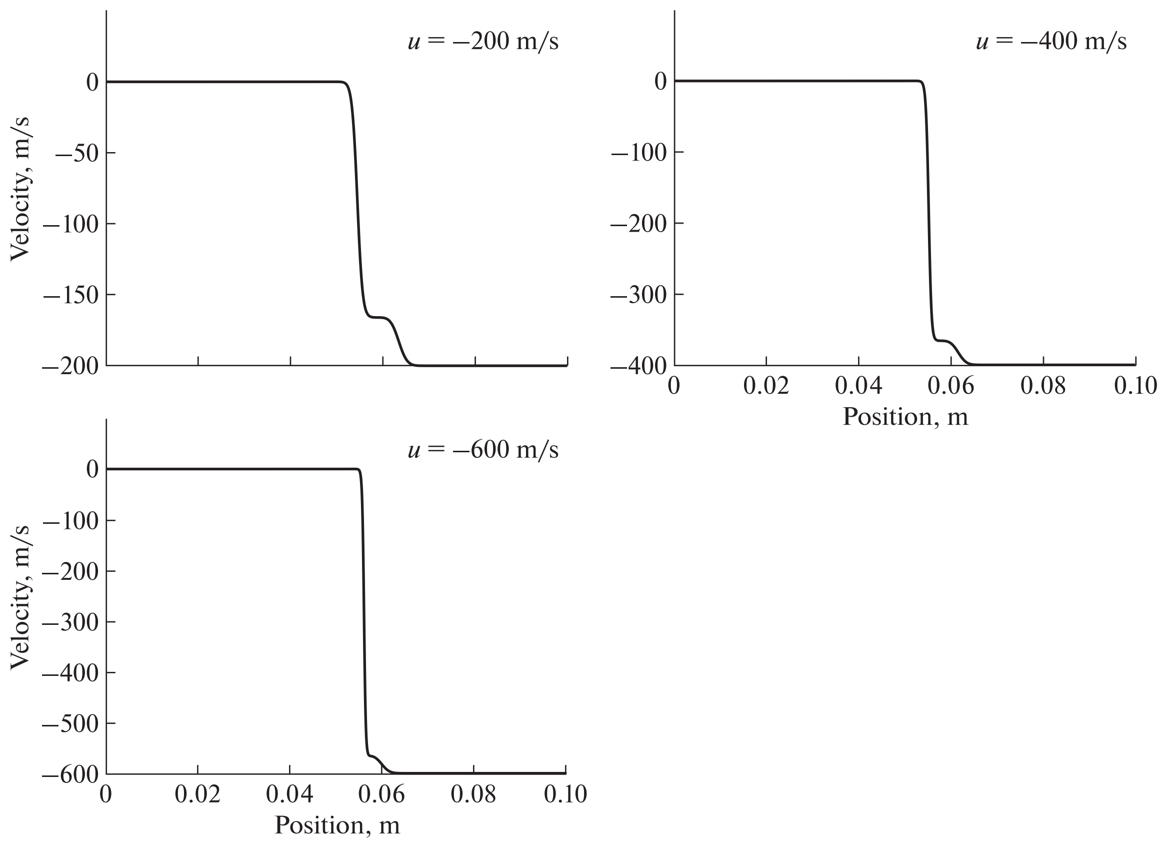
В двухволновом режиме начальная скорость продолжает увеличиваться, как показано на фиг. 5 и 6. Независимо от величины начальной скорости после первой волны параметры состояния изменяются от своего начального значения до значений, точно соответствующих параметрам текучести. Величина изменения скорости также фиксирована и является первым критическим значением. По мере увеличения начальной скорости в случае центрированной волны разрежения дальнейшего перехода к одноволновому режиму не происходит. Для ударной волны скорость распространения первой ударной волны уменьшается. При больших скоростях числен-

Таблица 2. Теоретические и численные значения в случае ударной и разреженной волн вокруг первого критического значения

Параметры	Теоретические значения (ударная волна)	Теоретические значения (разреженная волна)	Численные значения ($u = -35$ м/с)	Численные значения ($u = 35$ м/с)
u_1, м/с	−0.98	1.18	−1.00	1.18
ρ_1, кг/м^3	2794.64	2765.43	2794.64	2765.43
p_1, ГПа	0.42	−0.41	0.42	−0.410
u_2, м/с	0	0	0.00	0.00
ρ_2, кг/м^3	2795.17	2764.82	2795.17	2764.81
p_2, ГПа	0.436	−0.428	0.435	−0.427

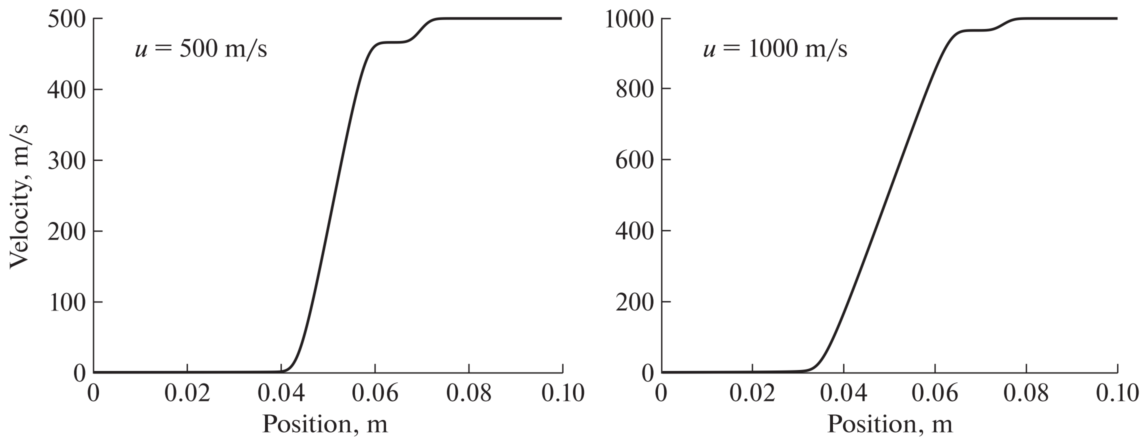


Фиг. 4. Распределение давления при нескольких различных скоростях для волны разрежения.



Фиг. 5. Распределение скорости для ударной волны при нескольких различных скоростях в пределах двухволнового режима (количество сеток – 2000).

ная диссипация первой волны достаточно большая. Это может быть связано с тем, что начальная скорость близка ко второму критическому значению, и что первая волна скоро начнет исчезать. Возможно, можно точно описать эту волну, используя более точный алгоритм и большее число сеток. Однако сравнение здесь только качественное с теоретическими выводами, поэтому конкретные значения не приводятся.



Фиг. 6. Распределение скорости для волны разрежения при нескольких различных скоростях в пределах двухволнового режима (количество сеток – 2000).

Таблица 3. Теоретические значения в различных режимах

Параметры	$u = -10$ м/с	$u = -100$ м/с	$u = -1300$ м/с	$u = 10$ м/с	$u = 100$ м/с
u_1, м/с	0	–65.98	–	0	66.18
ρ_1, кг/м^3	2784.31	2794.64	–	2775.69	2765.43
p_1, ГПа	0.123	0.42	–	–0.122	–0.41
x_1, м	0.0645	0.06394	–	0.06445–0.06463	0.06490–0.06553
u_2, м/с	–	0	0	–	0
ρ_2, кг/м^3	–	2828.74	3388.46	–	2730.82
p_2, ГПа	–	1.430	25.970	–	–1.366
x_2, м	–	0.05407	0.05940	–	0.05220–0.05354

Таблица 4. Численные значения в различных режимах

Параметры	$u = -10$ м/с	$u = -100$ м/с	$u = -1300$ м/с	$u = 10$ м/с	$u = 100$ м/с
u_1, м/с	0.00	–66.01	/	0	66.18
ρ_1, кг/м^3	2784.31	2794.64	/	2775.69	2765.43
p_1, ГПа	0.123	0.420	/	–0.122	–0.410
x_1, м	0.0644	0.06455	/	0.05835–0.07015	0.06105–0.07075
u_2, м/с	/	0.00	0.00	/	0
ρ_2, кг/м^3	/	2828.72	3393.77	/	2730.54
p_2, ГПа	/	1.431	26.173	/	–1.358
x_2, м	/	0.05385	0.05888	/	0.04635–0.05775

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для расчета неконсервативной модели Уилкинса используется широко применяемая в настоящее время схема, консервативная по пути в фазовом пространстве в сочетании с численными методами HLL. Предложен выбор пути, альтернативный широко используемому в литературе прямолинейному, который приводит к решению линейной задачи и упрощает расчетную схему. В приближении одномерной одноосной деформации обе схемы (с прямолинейным и предложенным путем интегрирования в фазовом пространстве) совпадают в силу консервативности определяющей системы уравнений.

Получено хорошее совпадение численных результатов и теории в широком диапазоне параметров задачи ударно-волнового взаимодействия с недеформируемой стенкой. Численные расчеты не только совпадают с теоретическими результатами, но и хорошо отражают характеристики и тенденции упругопластического течения, показанные в теоретическом решении. Например, численные результаты описывают три различные структуры для ударной волны и две различные структуры для центрированной волны растяжения, а также изменение положения между двумя волнами при изменении начальной скорости в случае двухволновой структуры.

Предложенный численный метод может быть распространен на двух- и трехмерный случаи, а также использован в модели диффузной границы для описания динамических процессов в многоматериальной среде. Это является предметом дальнейшей нашей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilkins M.L.* Calculation of elastic-plastic flow. M.: California Univ. Livermore Radiat. Lab., 1963.
2. *Godunov S.K., Romenskii E.* Elements of continuum mechanics and conservation laws. M.: Springer Science & Business Media, 2003.
3. *Peshkov I., Romenski E.* A hyperbolic model for viscous Newtonian flows // Continuum Mech. and Thermodynam. 2016. V. 28. P. 85–104.
4. *Kojic M., Bathe K.J.* Studies of finite element procedures—Stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated Lagrangian Jaumann formulation // Computers & Structures. 1987. V. 26. № 1–2. P. 175–179.
5. *Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Y.* Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. M.: CRC Press, 2000.
6. *Fridrich D., Liska R., Wendroff B.* Cell-centered Lagrangian Lax–Wendroff HLL hybrid method for elasto-plastic flows // Computers & Fluids. 2017. V. 157. P. 164–174.
7. *Maire P.H., Abgrall R., Breil J., et al.* A nominally second-order cell-centered Lagrangian scheme for simulating elastic–plastic flows on two-dimensional unstructured grids // J. Comput. Phys. 2013. V. 235. P. 626–665.
8. *Peshkov I., Boscheri W., Loubère R., et al.* Theoretical and numerical comparison of hyperelastic and hypoelastic formulations for Eulerian non-linear elastoplasticity // J. Comput. Phys. 2019. V. 387. P. 481–521.
9. *Pares C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // SIAM J. Numeric. Analys. 2006. V. 44. № 1. P. 300–321.
10. *Dumbser M., Castro M., Parés C., et al.* ADER schemes on unstructured meshes for nonconservative hyperbolic systems: Applications to geophysical flows // Computers & Fluids. 2009. V. 38. № 9. P. 1731–1748.
11. *Munoz-Ruiz M.L., Parés C.* Godunov method for nonconservative hyperbolic systems // J. ESAIM: Math. Model. and Numeric. Analys. 2007. V. 41. № 1. P. 169–185.
12. *Maso Dal, LeFloch P.G., and Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // J. Math. Pures Appl. 1995. V. 74. P. 483–548.
13. *Dumbser M., Hidalgo A., Castro M., et al.* FORCE schemes on unstructured meshes II: Non-conservative hyperbolic systems // Comput. Meth. Appl. Mech. and Engineer. 2010. V. 199. № 9–12. P. 625–647.
14. *Dumbser M., Balsara D.S.* A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 2016. V. 304. P. 275–319.
15. *Serezhkin A., Menshov I.* On solving the Riemann problem for non-conservative hyperbolic systems of partial differential equations // Comput. Fluid. 2020. V. 210. P. 104675.
16. *Gavrilyuk S.L., Favrie N., Saurel R.* Modelling wave dynamics of compressible elastic materials // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. № 5. P. 2941–2969.
17. *Menshov I.S., Mischenko A.V., Serejkin A.A.* Numerical modeling of elastoplastic flows by the Godunov method on moving Eulerian grids // Math. Model. and Comput. Simulat. 2014. V. 6. P. 127–141.
18. *Einfeltd B.* On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM J. Numer. Analys. 1988. V. 25. № 2. P. 294–318.
19. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. M.: Springer Science & Business Media, 2013.