

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517

АНАЛИТИЧНОСТЬ И ПСЕВДОАНАЛИТИЧНОСТЬ В МЕТОДЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА¹⁾

© 2023 г. В. И. Качалов^{1,*}, Д. А. Маслов^{1,**}¹ 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ “МЭИ”, Россия

*e-mail: vikachalov@rambler.ru

**e-mail: maslovdma@mpei.ru

Поступила в редакцию 27.03.2023 г.
Переработанный вариант 27.03.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Метод малого параметра позволяет строить решения дифференциальных уравнений в виде степенных рядов и получил большое распространение в математической физике. В большинстве случаев эти ряды являются асимптотически сходящимися. Целью настоящей работы является нахождение условий обычной сходимости рядов по степеням малого параметра, представляющих решения задач теории возмущений. Библи. 17.

Ключевые слова: метод регуляризации С. А. Ломова, голоморфная регуляризация, псевдоаналитичность, ε -регулярное решение, ε -псевдoreгулярное решение.

DOI: 10.31857/S0044466923110170, EDN: KJODFG

1. ВВЕДЕНИЕ

Заложенный в трудах А. Пуанкаре метод малого параметра является одним из наиболее используемых в математической физике аналитических методов. Суть метода состоит в том, что решение поставленной задачи строится в виде ряда по степеням малого параметра, который либо уже присутствует в решаемой задаче, либо вводится искусственным путем. С другой стороны, наличие малого параметра в дифференциальном уравнении приводит к тому, что поставленная для него начальная или краевая задача становится либо регулярно возмущенной, либо сингулярно возмущенной, а значит, является предметом изучения функционального анализа. В первом случае, как это следует из теорем Пуанкаре о разложении для обыкновенных дифференциальных уравнений [1, гл. VI, § 2], построенные формальные ряды по степеням малого параметра сходятся в обычном смысле к точным решениям, что делает последние аналитически зависящими от параметра. А, именно, если правая часть уравнения

$$\partial_t y = f(t, y, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

аналитична в точке $M_0(t_0, y_0, 0)$, то существует и единственно решение $y(t, \varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0, \varepsilon) = y^0$, аналитическое в точке $M'_0(t_0, 0)$, т.е. представимое равномерно сходящимся на указанном отрезке рядом по степеням ε (который и строится методом малого параметра).

Однако, если рассматривать дифференциальное уравнение

$$\partial_t u = F(u, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

с неограниченным оператором F , даже аналитически зависящим от ε , то гарантировать обычную сходимость ряда по степеням малого параметра, представляющего решение этого уравнения, в общем случае, нельзя.

Также открытым остается вопрос, является ли сумма $u^f(t, \varepsilon)$ построенного формального ряда точным решением, при условии его обычной сходимости?

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00496).

Воспользуемся условием (А) для решения задач серии (7):

$$\begin{aligned}
 u_0(t) &= \mathcal{U}(t)u^0, \\
 u_1(t) &= \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu_0(\tau), Hu_0(\tau))d\tau, \\
 &\dots\dots\dots \\
 u_n(t) &= \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau) \left[\sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k(\tau), Hu_{n-k-1}(\tau)) \right] d\tau. \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, формальный ряд $u^f(t, \varepsilon)$ построен и нужно исследовать его на сходимость.

3. СЛУЧАЙ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ G И H

Пусть $\|u_0(t)\| \leq a \ \forall t \in [0, T]$, $\|B\| = b$, $\|G\| = g$, $\|H\| = h$, $\|\mathcal{U}(t)\| \leq q \ \forall t \in [0, T]$, при некоторых положительных a, b, g, h, q . Тогда, при $t \in [0, T]$ имеют место следующие оценки правых частей равенств (8), начиная со второго:

$$\begin{aligned}
 \|u_1(t)\| &\leq Tqbgha^2, \\
 \|u_2(t)\| &\leq T^2q^2b^2g^2h^2a^3, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \|u_n(t)\| &\leq T^nq^nb^ng^nh^na^{n+1}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{9}$$

Из неравенств (9) вытекает равномерная на отрезке $[0, T]$ сходимость ряда (5) при $|\varepsilon| < 1/c$, где $c = Tqbgha$. В итоге доказана следующая

Теорема 1. Если выполнено условие (А) и операторы G и H являются ограниченными, то задача Коши (6) имеет единственное ε -регулярное решение.

4. О СВЯЗИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ С ε -РЕГУЛЯРНЫМ

В этом разделе статьи будет исследован вопрос о том, как соотносятся друг с другом точное и ε -регулярное решения.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то при достаточно малых ε точное решение $u(t, \varepsilon)$ задачи Коши (6) существует и совпадает с ее ε -регулярным решением $u^r(t, \varepsilon)$.

Доказательство. Поскольку A – инфинитезимальный генератор полугруппы $\mathcal{U}(t)$, то задача (6) эквивалентна интегральному уравнению [10, гл. 7, § 3]

$$u(t) = \mathcal{U}(t)u^0 + \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu(\tau), Hu(\tau))d\tau. \tag{10}$$

Обозначим через C_E банахово пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в E , с нормой равномерной на отрезке $[0, T]$ сходимости. Пусть $S^1 = \{u(t) \in C_E : \|u(t) - u_0(t)\| \leq 1\}$ – замкнутый единичный шар в C_E . Ясно, что при сделанных предположениях оператор

$$\Phi_\varepsilon[u(t)] = u_0(t) + \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu(\tau), Hu(\tau))d\tau$$

при достаточно малых ε отображает S^1 в себя и является сжатием. Поэтому, в соответствии с принципом сжатых отображений, в шаре S^1 существует и единственно решение интегрального

уравнения (10), что ввиду его эквивалентности задаче (6), доказывает существование и единственность у нее точного решения $u(t, \varepsilon)$.

Далее, пусть

$$u_{n\varepsilon}^r = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots + \varepsilon^n u_n(t) \quad (11)$$

есть частичная сумма ряда (5), представляющего ε -регулярное решение начальной задачи (6). Пользуясь билинейностью оператора B , можно доказать, что сумма (11) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t u_{n\varepsilon}^r &= A u_{n\varepsilon}^r + \varepsilon B(Gu_{n\varepsilon}^r, Hu_{n\varepsilon}^r) - \varepsilon^{n+1} \sum_{m=0}^n B(Gu_m, Hu_{n-m}) - \varepsilon^{n+2} \sum_{m=1}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) - \\ &- \varepsilon^{n+3} \sum_{m=2}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) - \dots - \varepsilon^{2n} [B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)] - \varepsilon^{2n+1} B(Gu_n, Hu_n). \end{aligned} \quad (12)$$

Если из уравнения (6) вычесть уравнение (12), то получится следующая начальная задача для $u(t, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t (u - u_{n\varepsilon}^r) &= A(u - u_{n\varepsilon}^r) + \varepsilon [B(Gu, H(u - u_{n\varepsilon}^r)) + B(G(u - u_{n\varepsilon}^r), Hu_{n\varepsilon}^r)] + \\ &+ \varepsilon^{n+1} \sum_{m=0}^n B(Gu_m, Hu_{n-m}) + \varepsilon^{n+2} \sum_{m=1}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) + \varepsilon^{n+3} \sum_{m=2}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) + \dots \\ &\dots + \varepsilon^{2n} [B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)] + \varepsilon^{2n+1} B(Gu_n, Hu_n), \quad (u - u_{n\varepsilon}^r)|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Запишем эквивалентное уравнению (13) интегральное уравнение (опустив переменную интегрирования):

$$\begin{aligned} u - u_{n\varepsilon}^r &= \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) [B(Gu, H(u - u_{n\varepsilon}^r)) + B(G(u - u_{n\varepsilon}^r), Hu_{n\varepsilon}^r)] d\tau + \\ &+ \varepsilon^{n+1} \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) \left[\sum_{m=0}^n B(Gu_m, Hu_{n-m}) + \varepsilon \sum_{m=1}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) + \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 \sum_{m=2}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) + \dots + \varepsilon^{n-1} (B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)) + \varepsilon^n B(Gu_n, Hu_n) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Из этого уравнения вытекают следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|u(t, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(t)\| &\leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|\mathcal{U}(t - \tau)\| \|u(\tau, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(\tau)\| d\tau + |\varepsilon|^{n+1} Tq \left[\sum_{m=0}^n \|B(Gu_m, Hu_{n-m})\|_{C_E} + \right. \\ &+ |\varepsilon| \sum_{m=1}^n \|B(Gu_m, Hu_{n-m+1})\|_{C_E} + |\varepsilon|^2 \sum_{m=2}^n \|B(Gu_m, Hu_{n-m+2})\|_{C_E} + \dots + |\varepsilon|^{n-1} \|B(Gu_n, Hu_{n-1})\|_{C_E} + \\ &\left. + \|B(Gu_{n-1}, Hu_n)\|_{C_E} + |\varepsilon|^n \|B(Gu_n, Hu_n)\|_{C_E} \right] \leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|\mathcal{U}(t - \tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \|u_{n\varepsilon}^r(\tau)\|) \times \\ &\times \|u(\tau, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(\tau)\| d\tau + |\varepsilon|^{n+1} Tqbgh[(n+1)a^2 bghc^n + |\varepsilon| na^2 bghc^{n+1} |\varepsilon|^2 (n-1)a^2 bghc^{n+2} + \dots \\ &\dots + 2|\varepsilon|^{n-1} a^2 bghc^{2n-1} + |\varepsilon|^n a^2 bghc^{2n}], \end{aligned} \quad (15)$$

где $c = Tqbgha$.

Если $|\varepsilon| < \frac{1}{2Tbghq(1+a)}$, то $\rho = |\varepsilon|c < \frac{a}{2(1+a)} < \frac{1}{2}$, и из цепочки неравенств (15) следует, что

$$\begin{aligned} \|u(t, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(t)\| &\leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|U(t-\tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \|u_{n\varepsilon}^r(\tau)\|) \|u(\tau, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(\tau)\| d\tau + \\ &+ |\varepsilon|^{n+1} Tqa^2 bgh\rho^2 [n+1 + \rho(1+\rho+\dots+\rho^{n-1})] \leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|U(t-\tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \\ &+ \|u_{n\varepsilon}^r(\tau)\|) \|u(\tau, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(\tau)\| d\tau + |\varepsilon| Tqa^2 bgh\rho^n \left(n+1 + \frac{n\rho}{1-\rho} \right) \leq \\ &\leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|U(t-\tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \|u_{n\varepsilon}^r(\tau)\|) \|u(\tau, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(\tau)\| d\tau + \rho^n \varepsilon Tqa^2 bgh(2n+1), \end{aligned}$$

так как $\rho(1-\rho)^{-1} < 1$ при $0 < \rho < 1/2$.

Обозначим через $\mathcal{H}(t, \tau, \varepsilon) = |\varepsilon| bgh \|U(t-\tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \|u_{n\varepsilon}^r(\tau)\|)$ ограниченную при $0 \leq t, \tau \leq T$ функцию, поскольку последовательность $\{u_{n\varepsilon}^r(t)\}$ является сходящейся. В соответствии с неравенством Гронуолла-Беллмана

$$\|u(t, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(t)\| \leq \rho^n |\varepsilon| Tqa^2 bgh(2n+1) e^{\int_0^t \mathcal{H}(t, \tau, \varepsilon) d\tau},$$

и, поскольку $(2n+1)\rho^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и $\|u(t, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(t)\|_{C_E} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В итоге $u(t, \varepsilon) = u^r(t, \varepsilon)$ и теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения (уравнение типа Больцмана)

$$\partial_t u + y \partial_x u = \varepsilon \iint_{\Pi} e^{-\xi^2} (u^2(t, \xi, y) - u^2(t, x, \eta)) d\xi d\eta, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2}.$$

В качестве E возьмем банахово пространство непрерывных и ограниченных в замкнутой полосе

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1\},$$

с нормой равномерной сходимости; область определения оператора $A = -y \partial_x$ состоит из непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по y функций из E ; билинейный оператор

$$B(u, v) = \iint_{\Pi} e^{-\xi^2} (u(\xi, y)v(\xi, y) - u(x, \eta)v(x, \eta)) d\xi d\eta,$$

действующий из $E \times E$ в E , очевидно, является ограниченным.

Решение ищем в виде ряда по степеням малого параметра:

$$u^r(t, x, y, \varepsilon) = u_0(t, x, y) + \varepsilon u_1(t, x, y) + \dots + \varepsilon^n u_n(t, x, y) + \dots,$$

коэффициенты которого являются решением серии задач. Поскольку непрерывная полугруппа задается формулой $U\varphi \equiv \varphi(t - xy, y)$, то

$$u_0(t, x, y) = e^{-(x-ty)^2}.$$

Для определения $u_1(t, x, y)$ имеем следующее уравнение:

$$\partial_t u_1 + y \partial_x u_1 = \iint_{\Pi} e^{-\xi^2} (e^{-2(\xi-ty)^2} - e^{-2(x-\eta)^2}) d\xi d\eta.$$

Пользуясь формулой решения линейного неоднородного уравнения в банаховом пространстве (см. формулы (8)), имеем

$$u_1(t, x, y) = \int_0^t \left[2\sqrt{\pi} e^{2(t-\tau)^2 y^2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-2(x-y(t-\tau))^2 + 2(t-\tau)^2} \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{2}(x+t-\tau)) - \operatorname{erf}(\sqrt{2}(x-t+\tau))}{t-\tau} \right] d\tau,$$

где $\operatorname{erf}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-\xi^2} d\xi$ — интеграл ошибок.

5. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОГО БИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Далее будем изучать начальную задачу

$$\partial_t u = Au + \varepsilon B(Gu, Hu), \quad u|_{t=0} = u^0, \quad (16)$$

где H — замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D_H \supset D_A$.

Сформулируем и докажем утверждение об аппроксимации уравнения (16) уравнением с неограниченным билинейным оператором.

Теорема 3. Пусть наряду с уравнением (16) задано уравнение

$$\partial_t v = Av + \varepsilon B(Gv, Lv), \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

с тем же начальным условием, в котором L является ограниченным оператором. Тогда, если $u(t, \varepsilon)$ есть точное решение задачи Коши (16), ограниченное на отрезке $[0, T]$ при всех достаточно малых ε , то существует константа $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ такая, что

$$\|u(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon)\| \leq C_\varepsilon \|(H - L)u(t, \varepsilon)\|, \quad (18)$$

где $v(t, \varepsilon)$ — решение начальной задачи для уравнения (17).

Доказательство. Представим уравнение (16) в виде

$$\partial_t u = Au + \varepsilon B(Gu, Lu) + \varepsilon B(Gu, (H - L)u)$$

и вычтем из него уравнение (17):

$$\partial_t (u - v) = A(u - v) + \varepsilon [B(G(u - v), Lu) + B(Gv, L(u - v))] + \varepsilon B(Gu, (H - L)u), \quad (u - v)|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Составим интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (19):

$$u - v = \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) [B(G(u - v), Lu) + B(Gv, L(u - v))] d\tau + \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) B(Gu, (H - L)u) d\tau.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\|u - v\| \leq |\varepsilon| b g \int_0^t \|\mathcal{U}(t - \tau)\| (\|Lu\| + \|v\| \|L\|) \|u - v\| d\tau + |\varepsilon| T q b g \|u\| \|(H - L)u\|,$$

к которому можно применить неравенство Гронуола–Беллмана:

$$\|u - v\| \leq |\varepsilon| T q b g \|u\| \exp \{ |\varepsilon| T q b g (\|Lu\|_{C_E} + \|v\|_{C_E} \|L\|) \} \|(H - L)u\|. \quad (20)$$

Оценка (20) совпадает с неравенством (18) при очевидном выборе C_ε . То, что $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ вытекает из ограниченности решения $u(t, \varepsilon)$ и оператора L . Теорема доказана.

6. СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ И ε -ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу с положительным ε

$$\varepsilon \partial_t u = \tilde{A}u + \varepsilon^2 B(Gu, Hu), \quad u|_{t=0} = u^0, \quad (21)$$

и потребуем выполнения условия $(\tilde{A})$: оператор $\tilde{A}$ является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы $\tilde{\mathcal{U}}(t)$. Будем искать решение задачи Коши (21) в виде ряда

$$u^f(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon u_1(t, \varepsilon^{-1}) + \dots + \varepsilon^n u_n(t, \varepsilon^{-1}) + \dots \quad (22)$$

с коэффициентами, определяемыми из серии начальных задач

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u_0 &= \tilde{A}u_0, \quad u_0|_{t=0} = u^0, \\ \varepsilon \partial_t u_1 &= \tilde{A}u_1 + \varepsilon B(Gu_0, Hu_0), \quad u_1|_{t=0} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon \partial_t u_n &= \tilde{A}u_n + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k, Hu_{n-k-1}), \quad u_n|_{t=0} = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что все задачи серии (23) являются сингулярно возмущенными и, поэтому, в соответствии с формулами решений таких задач [11, гл. I, § 6] имеем

$$\begin{aligned} u_0(t, \varepsilon^{-1}) &= \tilde{U}(\varepsilon^{-1}t)u^0, \\ u_1(t, \varepsilon^{-1}) &= \int_0^t \tilde{U}(\varepsilon^{-1}(t-\tau))B(Gu_0(\tau, \varepsilon^{-1}), Hu_0(\tau, \varepsilon^{-1}))d\tau, \\ &\dots\dots\dots \\ u_n(t, \varepsilon^{-1}) &= \int_0^t \tilde{U}(\varepsilon^{-1}(t-\tau)) \left[\sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k(\tau, \varepsilon^{-1}), Hu_{n-k-1}(\tau, \varepsilon^{-1})) \right] d\tau, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (24)$$

Определение 2. Если ряд (22) сходится равномерно по $t \in [0, T]$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, то его сумма $u^{pr}(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ называется ε -псевдoreгулярным решением задачи Коши (21).

Сформулируем утверждения, аналогичные доказанным ранее теоремам, относящимся к регулярному случаю.

Теорема 4. Если выполнено условие $(\tilde{A})$ и операторы G и H являются ограниченными, то начальная задача (21) имеет ε -псевдoreгулярное решение $u^{pr}(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$, совпадающее с ее точным решением $u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$.

Пусть H — замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D_H \supset D_{\tilde{A}}$. Предположим, что задана еще одна начальная задача

$$\varepsilon \partial_t v = \tilde{A}v + \varepsilon^2 B(Gv, Lv), \quad v|_{t=0} = u^0, \quad (25)$$

с ограниченным оператором L .

Теорема 5. Если $u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ — точное решение задачи Коши (21) (с неограниченным оператором H), ограниченное на отрезке $[0, T]$, то существует константа $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ такая, что

$$\|u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) - v(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \leq C_\varepsilon \|(H - L)u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\|. \quad (26)$$

Следствие из теоремы 5. Пусть последовательность операторов $\{L_m\}_{m=1}^\infty$ сильно сходится к оператору H . Тогда для любого целого неотрицательного n существует натуральное m такое, что при всех достаточно малых положительных ε

$$\|u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) - v_{n\varepsilon}^{[m]}(t, \varepsilon^{-1})\| \leq Q_n \varepsilon^{n+1},$$

где $v_{n\varepsilon}^{[m]}$ есть n -я частичная сумма ряда, представляющего ε -псевдoreгулярное решение уравнения (25), когда $L = L_m$; Q_n — константа, не зависящая от ε .

Эти утверждения доказываются так же, как и аналогичные им в регулярном случае, с учетом того, что $\|U(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$.

Пример 2. Построим приближенное решение задачи Коши

$$\varepsilon \partial_t u = \tilde{A}u - \varepsilon^2 B(u, Hu), \quad t \in (0, T], \quad u|_{t=0} = u^0.$$

Здесь, $E = C[0, 1]$ — банахово пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций переменной x ; оператор $\tilde{A} = \partial_x^2$, с областью определения $D_{\tilde{A}} = \{w(x) \in C[0, 1] : \partial_x^2 w \in C[0, 1], w(0) = w(1) = 0\}$; оператор G совпадает с тождественным оператором I ; оператор $H = \partial_x$, с областью определения $D_H^\mu = \{w(x) \in C[0, 1] : \partial_x w \in C[0, 1], \mu w(0) - w(1) = 0\}$, $\mu \in (0, 1)$; билинейный оператор $B(u, v) = -uv$; $u^0 = \varphi(x) \in D_A$.

Резольвента оператора H задается формулой

$$R_H(\lambda) = \frac{1}{\mu - e^\lambda} \left(\mu \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi + e^\lambda \int_x^1 e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi \right),$$

и при всех $\lambda > 0$ (и заданном $\mu \in (0, 1)$) подчинена оценке $\|R_H(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ [12, гл. II, п. 1.3]. В этих условиях [11, гл. I, § 2] последовательность ограниченных операторов

$$L_m = -mI - m^2 R_H(m)$$

при $m \rightarrow \infty$ сильно сходится к оператору H . С помощью них составим серию сингулярно возмущенных задач

$$\varepsilon \partial_t v = \tilde{A}v - \varepsilon^2 B(v, H_m v), \quad t \in (0, T], \quad v|_{t=0} = u^0. \quad (27)$$

Сжимающая полугруппа задается с помощью функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности [13, гл. IV, § 1]

$$G(t/\varepsilon, x; s) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k s) \sin(\pi k x) e^{-\pi^2 k^2 t/\varepsilon}.$$

Построим ε -псевдорегулярное решение задачи (27) (оно совпадает с ее точным решением):

$$V_m(t, x, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = v_0(t, x, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon v_1(t, x, \varepsilon^{-1}) + \dots,$$

где

$$v_0(t, x, \varepsilon^{-1}) = \int_0^1 G(t\varepsilon^{-1}, x; s) \varphi(s) ds,$$

$$v_1(t, x, \varepsilon^{-1}) = - \int_0^t \left[\int_0^1 G((t-\tau)\varepsilon^{-1}, x; s) (v_0(\tau, s, \varepsilon^{-1}) H_m[v_0(\tau, s, \varepsilon^{-1})]) ds \right] d\tau,$$

и т.д.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время теория сингулярных возмущений представляет собой активно развивающуюся область математики. При этом решаются новые задачи путем комбинирования различных методов и подходов как ранее разработанных, так и вновь созданных [14–17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М.: Наука, 1973.
3. Волков В.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргера с модульной адвекцией и линейным усилением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. С. 1851–1860.
4. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
5. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.
6. Krivoruchenko M.I., Nadyozhin D.K., Yudin A.V. Hydrostatic equilibrium of stars without electroneutrality constraint // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. № 15. P. 1–20. id 083016.

7. Качалов В.И. О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 64–71.
8. Besova M.I., Kachalov V.I. Analytical Aspects of the Theory of Tikhonov Systems // Mathematics. 2022. 10:1, 72 (published online). 14 pp. www.mdpi.com/2227-7390/10/1/72.
9. Kachalov V.I. Holomorphic Regularization of Boundary-Value Problems for Tikhonov Systems // J. Mathem. Sciences. 2022. V. 268. № 1. P. 63–69.
10. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
11. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
12. Дезин А.А. Воспоминания и избранные труды по математике. М.: Макс Пресс, 2011.
13. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
14. Malek S. On Boundary Layer Expansions For a Singularly Perturbed Problem With Confluent Fuchsian Singularities // Mathematics. 2020. V. 8. № 2. P. 189.
15. Glizer V.Y. Asymptotic Analysis of Spectrum and Stability for One Class of Singularly Perturbed Neutral-Type Time Delay Systems // Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 325 (published online).
16. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I. Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. № 27. <https://doi.org/10.3390/axioms8010027>
17. Нефедов Н.Н. Периодические контрастные структуры в задаче реакция-диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 601–612.