ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 11, с. 1877–1893

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Х. Г. Умаров[1,2,*]

[1] 364043 Грозный, ул. В. Алиева, 19а, Академия наук Чеченской Республики, Россия

[2] 364068 Грозный, ул. С. Кишиевой, 33, Чеченский государственный педагогический университет, Россия

*e-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 14.05.2023 г.
Переработанный вариант 14.05.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Колебания балки с учетом эффектов деформации в поперечном направлении моделируются нелинейным дифференциальным уравнением соболевского типа, для которого исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций. Рассмотрены условия разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке. Библ. 10.

Ключевые слова: колебания балки, нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение решения.

DOI: 10.31857/S0044466923110273, **EDN:** CSNJET

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение колебаний балки с учетом эффектов деформации в поперечном направлении [1], § 4.2.2 обобщается нелинейным уравнением соболевского типа, неразрешенным относительно временной производной второго порядка [2]:

$$u_{tt} - \alpha u_{ttx} - u_{ttxx} + u_{xxxx} = \sigma'(u_x)u_{xx},$$

$$(t,x)\, x \in R^1_+ \times R^1, \quad R^1 =]-\infty,+\infty[, \quad R^1_+ =]0,+\infty[, \tag{0.1}$$

где α – заданный положительный числовой параметр, штрих в уравнении обозначает дифференцирование по $u_x = \partial_x u = \partial u/\partial x$, нелинейность $\sigma(\cdot)$ – заданная функция, не равная тождественно нулю.

Предполагаем, что стержень является бесконечным. Такая идеализация допустима [3, § 6.3], если параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не отражаются.

Уравнение (0.1) будем рассматривать в банаховом [4, гл. VIII, § 1] пространстве $C[R^1]$ (с нормой $\|g\|_C = \sup_{x\in R^1}|g(x)|$) непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$, предполагая, что искомое классическое решение $u = u(t,x)$, $(t,x) \in \overline{R}^1_+ \times R^1$, $\overline{R}^1_+ = [0,+\infty[$, и его частные производные, входящие в уравнение (0.1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат пространству $C[R^1]$. Через $C^{(k)}[R^1] = \{g(x) \in C[R^1] : g'(x),\dots,g^{(k)}(x) \in C[R^1]\}$, $k = 1,2,\dots$, будем обозначать подмножества дифференцируемых функций в пространстве $C[R^1]$.

Для уравнения (0.1) рассмотрим задачу Коши:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R^1, \tag{0.2}$$

в которой заданные начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[R^1]$.

Полагаем, что нелинейность уравнения (0.1): $\sigma(r)$, $r \in R^1$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция, модуль которой $|\sigma(r)|$ при $r \geq 0$ является непрерывной неубывающей функцией, причем справедливы оценки

$$\sup_{x\in R^1}|\sigma^{(i)}(g(x))| \leq \left|\sigma^{(i)}\left(\sup_{x\in R^1}|g(x)|\right)\right|, \quad i = \overline{0,1}, \quad \forall g(x) \in C[R^1]. \tag{0.3}$$

Исследование задачи Коши (0.1), (0.2) проведем по следующему плану: прежде всего убедимся, что постановка задачи Коши (0.1), (0.2) корректна и локальное по времени классическое решение ее существует. С этой целью 1) для соответствующего (0.1) линейного однородного уравнения: $u_{tt} - \alpha u_{ttx} - u_{ttxx} + u_{xxxx} = 0$, найдем решение задачи Коши, используя методы теории сильно непрерывных полугрупп операторов и косинус оператор-функций и отмечая используемые в дальнейшем оценки норм вспомогательных операторнозначных функций. Далее, 2) введем в рассмотрение вспомогательную задачу Коши

$$v_{tt} - \alpha v_{ttx} - v_{ttxx} + v_{xxxx} = (\sigma(v))_{xx}, \tag{0.4}$$

$$u|_{t=0} = \varphi'(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi'(x), \quad x \in R^1. \tag{0.5}$$

Для задачи Коши (0.4), (0.5) найдем временной отрезок $[0,t_1]$ существования и единственности классического решения и оценим норму в пространстве $C[R^1]$ этого локального решения. Затем, 3) установим связь между решениями уравнений (0.1) и (0.4). Начиная с этого пункта усиливаются требования к решению уравнения, полагая, что на временном отрезке $[0,t_1]$ решение $u = u(t,x)$ по переменной x принадлежит пересечению подмножества $C^{(4)}[R^1] \subset C[R^1]$ с пространством Соболева $W_2^4(R^1)$:

$$\partial_t^n u(t,x) \in C^{(4-n)}[R^1] \cap W_2^{4-n}(R^1), \quad n = \overline{0,2}, \quad t \in [0,t_1]. \tag{0.6}$$

В пункте 4) найдем условия разрушения на конечном временном отрезке решения задачи Коши для исходного уравнения (0.1). В заключительной части статьи 5) исследовано разрушение решения уравнения (0.1) в частном случае $\sigma(s) = \beta s^3$.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Напомним, что в пространстве $C[R^1]$ [4, гл. VIII, § 1], [5, § 1.3] дифференциальные операторы ∂_x, с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}[R^1]$, и ∂_x^2, $D(\partial_x^2) = C^{(2)}[R^1]$, являются соответственно производящими операторами сильно непрерывных сжимающих группы: $U(t;\partial_x)g(x) = g(x+t)$, $t \in R^1$, и полугруппы: $U(t;\partial_x^2)g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)\,d\xi$, $t \in \overline{R}_+^1$, класса C_0. Полуось $\lambda > 0$ принадлежит резольвентным множествам операторов ∂_x и ∂_x^2 и для соответствующих резольвент справедливы оценки норм: $\|(\lambda I - \partial_x)^{-1}\|$, $\|(\lambda I - \partial_x^2)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$, где I – тождественный оператор.

Используя неравенство [5, § 7.1]: $\|g'\|_C^2 \leq 4\|g''\|_C\|g\|_C$, в котором $g = g(x) \in C^{(2)}[R^1]$, нетрудно проверить, что оператор $\alpha\partial_x$ подчинен оператору ∂_x^2 с границей, не превышающей 1, но тогда [5, § 8.1] возмущенный оператор $A = \partial_x^2 + \alpha\partial_x$, $D(A) = C^{(2)}[R^1]$, является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы класса C_0: $\|U(t;A)\| \leq 1$, причем полуось $\lambda > 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора A.

Для любой функции $g(x)$ из $C[R^1]$ справедливы представления полугруппы, порождаемой оператором A: $U(t;A)g(x)=U(t;\alpha\partial_x)U(t;\partial_x^2)g(x) = U(t;\partial_x^2)U(t;\alpha\partial_x)g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta-x-\alpha t)^2/(4t)}g(\eta)d\eta$, и его резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}g(x)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}U(s;A)g(x)ds = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda+\alpha^2/4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(\eta-x)/2-\sqrt{\lambda+\alpha^2/4}|\eta-x|}g(\eta)\,d\eta$.

Из оценки нормы $\|\partial_x U(t;\partial_x^2)g(x)\|_C = \dfrac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}(\eta-x)e^{-(\eta-x)^2/(4t)}g(\eta)\,d\eta\right\|_C \le \|g(x)\|_C/\sqrt{\pi t}$, используя полученную мажоранту, выводим $\|\alpha\partial_x(I-\partial_x^2)^{-1}g(x)\|_C \le \alpha\int_0^{+\infty} e^{-s}\|\partial_x U(s;\partial_x^2)g(x)\|_C ds \le \alpha\|g(x)\|_C$. Откуда следует, что при $\alpha<1$, для оператора $B=\alpha\partial_x(I-\partial_x^2)^{-1} = \alpha[(I-\partial_x)^{-1}-(I-\partial_x^2)^{-1}]$ справедлива оценка нормы $\|B\|\le\alpha<1$ и поэтому оператор $I-B$ обратим и для его обратного имеет место оценка нормы $\|(I-B)^{-1}\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} B^n\right\| \le 1/(1-\alpha) = \alpha_0$.

Итак, при выполнении условия $\alpha<1$, для резольвенты $(I-A)^{-1}$ справедливы представления $(I-A)^{-1}=(I-\alpha\partial_x-\partial_x^2)^{-1}=(I-\partial_x^2)^{-1}(I-B)^{-1}=(I-B)^{-1}(I-\partial_x^2)^{-1}$ и оценка нормы $\|(I-A)^{-1}\| \le$ $\le \|(I-B)^{-1}\|\le\alpha_0$.

Соответствующее (0.1) линейное уравнение запишем в виде

$$(u-\alpha u_x-u_{xx})_{tt} = -u_{xxxx}. \tag{1.1}$$

Пусть $u=u(t,x)$ — решение задачи Коши (1.1), (0.2), для которого частные производные u_{xx}, u_{txx} непрерывны при $t\ge 0$. Введем новую неизвестную функцию

$$v = u-\alpha u_x-u_{xx}. \tag{1.2}$$

Используя замену (1.2), принадлежность полуоси $\lambda>0$ резольвентному множеству оператора A и полагая, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C^{(2)}[R^1]$, можно единственным образом определить начальные значения функции $v=v(t,x)$: $v_0(x)=v(t,x)|_{t=0}=\varphi(x)-\alpha\varphi'(x)-\varphi''(x)$, $v_1(x)=v_t(t,x)|_{t=0}=\psi(x)-\alpha\psi'(x)-\psi''(x)$, и выразить решение $u(t,x)$ задачи Коши (1.1), (0.2) через новую неизвестную функцию $v(t,x)$:

$$u(t,x) = (I-A)^{-1}v(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2/4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha\eta/2-\sqrt{1+\alpha^2/4}|\eta|}v(t,x+\eta)\,d\eta. \tag{1.3}$$

После замены (1.2) уравнение (1.1) можно переписать в пространстве $C[R^1]$ в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$V_{tt} = \mathscr{A}\cdot V, \quad t\in R_+^1, \tag{1.4}$$

где $V=V(t): t\to v(t,x)$ — искомая вектор-функция, определенная для $t\in\overline{R}_+^1$ и со значениями в пространстве $C[R^1]$. Операторный коэффициент в уравнении (1.4) — линейный неограниченный оператор $\mathscr{A} = -(I-A)^{-1}\partial_x^4 = -(I-B)^{-1}(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^4 = (I-B)^{-1}\partial_x^2 + (I-B)^{-1} - (I-A)^{-1}$, $D(\mathscr{A})=C^{(2)}[R^1]$.

В пространстве $C[R^1]$ оператор ∂_x^2 является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной косинус оператор-функции класса C_0 (C_0—КОФ) $C(t;\partial_x^2)$, $t\in R^1$, которая представляется [5, § 1.5] формулой $C(t;\partial_x^2)g(x) = 2^{-1}[U(t;\partial_x)+U(-t;\partial_x)]g(x) = 2^{-1}[g(x+t)+g(x-t)]$ и для которой справедлива оценка нормы $\|C(t;\partial_x^2)\|\le 1$. Соответствующая синус оператор-функция (C_0—СОФ) $S(t;\partial_x^2)$, $t\in R^1$, имеет вид $S(t;\partial_x^2)g(x) = \int_0^t C(\tau;\partial_x^2)g(x)\,d\tau = \dfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\,d\xi$ и для нее справедлива оценка нормы $\|S(t;\partial_x^2)\|\le t$.

Неограниченный компонент оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}_0 = (I-B)^{-1}\partial_x^2$, $D(\mathcal{A}_0) = C^{(2)}[R^1]$, является мультипликативным возмущением производящего оператора ∂_x^2 C_0–КОФ $C(t;\partial_x^2)$ оператором $(I-B)^{-1}$. В силу цепочки соотношений $\|[(I-B)^{-1} - I]S(t;\partial_x^2)\partial_x^2 g(x)\|_C = \|(I-B)^{-1}\alpha\partial_x(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2 S(t;\partial_x^2)g(x)\|_C = 2\alpha\alpha_0\left\|\partial_x\int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\,d\xi\right\|_C \le 4\alpha\alpha_0\|g\|_C \le 4\alpha\alpha_0$, на функциях $g(x)\in C^{(2)}[R^1]$ и $\|g\|_C \le 1$, оператор $(I-B)^{-1}$принадлежит [6, § 12.1] классу $M2(\partial_x^2)$ мультипликативных возмущений производящего оператора ∂_x^2 C_0–КОФ $C(t;\partial_x^2)$, причем характеристика этого класса – функция $\tilde{\delta}_B(t) = \delta_{(I-B)^{-1}-I}(t)$, выписывается в явном виде: $\tilde{\delta}_B(t) = 4\alpha\alpha_0 t$, $t>0$. Поэтому [6] оператор $\mathcal{A}_0$ является производящим оператором C_0–КОФ $C(t;\mathcal{A}_0)$, для которой справедлива оценка нормы

$$\|C(t;\mathcal{A}_0)\| \le M_1 e^{\omega_1 t}, \quad t \ge 0, \tag{1.5}$$

и предельное соотношение $\left\|C(t;\mathcal{A}_0) - C(t;\partial_x^2)\right\| = O(\tilde{\delta}_B(t)) \to 0$, при $t \to +0$, где $M_1 = \sup\{\|C(t;\mathcal{A}_0)\|, 0 \le t \le \tau_0\}$ и $\omega_1 = \ln(M_1)/\tau_0$, здесь положительное число τ_0 определяется из неравенства $\tilde{\delta}_B(\tau_0) < 1$, т.е. $\tau_0 < 1/(4\alpha\alpha_0)$.

Ограниченный компонент оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}_1 = (I-B)^{-1} - (I-A)^{-1}$, $D(\mathcal{A}_1) = C[R^1]$, $\|\mathcal{A}_1\| \le 2\alpha_0 = \alpha_1^2$, является аддитивным возмущением производящего оператора $\mathcal{A}_0$ C_0–КОФ $C(t;\mathcal{A}_0)$, но возмущение ограниченным оператором сохраняет [5, § 8.2] способность оператора $\mathcal{A}_0$ порождать C_0–КОФ, поэтому оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ является производящим оператором C_0–КОФ.

Для уравнения (1.4) рассмотрим абстрактную задачу Коши, записав начальные условия в виде

$$V\big|_{t=0} = V_0, \quad V'\big|_{t=0} = V_1, \tag{1.6}$$

где $V_0 = v_0(x)$, $V_1 = v_1(x)$ – элементы пространства $C[R^1]$.

Задача Коши (1.4), (1.6) равномерно корректна [5, § 1.4] только тогда, когда оператор $\mathcal{A}$ является производящим оператором C_0–КОФ.

Решение задачи Коши (1.4), (1.6) для любых начальных данных $V_0 \in D(\mathcal{A})$ и $V_1 \in C_1[R^1]$ дается формулой $V(t) = C(t;\mathcal{A})V_0 + S(t;\mathcal{A})V_1$, $t\in R^1$, где $S(t;\mathcal{A})$ – C_0–СОФ ассоциированная с $C(t;\mathcal{A})$: $S(t;\mathcal{A})g = \int_0^t C(\tau;\mathcal{A})g\,d\tau$, $t\in R^1$, $g\in C[R^1]$, а $C_1[R^1]$ – линейное многообразие: $C_1[R^1] = \{g\in C[R^1] : C(t;\mathcal{A})g \in C^{(1)}(R^1, C[R^1])\}$. Очевидно, что $D(\mathcal{A}) = C^{(2)}[R^1] \subset C_1[R^1]$.

Для того чтобы вывести оценку нормы решения уравнения (1.4) – абстрактной функции $V(t)$, найдем оценки норм C_0–КОФ $C(t;\mathcal{A})$ и C_0–СОФ $S(t;\mathcal{A})$, для чего получим представление операторнозначной функции $C(t;\mathcal{A})$ через C_0–КОФ $C(t;\mathcal{A}_0)$ и $C(t;\mathcal{A}_1)$.

Ограниченный оператор $\mathcal{A}_1$ порождает C_0–КОФ $C(t;\mathcal{A}_1)$, для которой на произвольном элементе $g(x)\in C[R^1]$ справедливо представление [5, § 1.4, § 4.2] $C(t;\mathcal{A}_1)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\mathcal{A}_1^n g(x)$, $t\in R^1$, причем ряд сходится равномерно по t на каждом конечном отрезке из R^1. Отметим, что операторнозначная функция $C(t;\mathcal{A}_1)$ непрерывна в равномерной операторной топологии и для нее справедлива оценка нормы $\|C(t;\mathcal{A}_1)\| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\|\mathcal{A}_1\|^n \le \operatorname{ch}(\alpha_1 t)$, $t\in \bar{R}_+^1$.

Рассматривая производящий оператор $\mathcal{A}$ C_0–КОФ $C(t;\mathcal{A})$ как результат возмущения производящего оператора $\mathcal{A}_0$ C_0–КОФ $C(t;\mathcal{A}_0)$ оператором $\mathcal{A}_1$, который в свою очередь порождает C_0–КОФ $C(t;\mathcal{A}_1)$, для $g(x)\in D(\mathcal{A}_0)\cap D(\mathcal{A}_1)=C^{(2)}[R^1]$ и $t\in R^1$ имеем [5, § 8.2] представление

$$C(t;\mathcal{A})g(x)=C(t;\mathcal{A}_0)g(x)+\frac{t^2}{2}\int\limits_0^1 j_1(t\sqrt{1-s^2},\mathcal{A}_0)C(ts;\mathcal{A}_1)g(x)\,ds,$$

где $j_1(t,\mathcal{A}_0)g(x)=\dfrac{4}{\pi}\int_0^1\sqrt{1-r^2}C(tr;\mathcal{A}_0)g(x)\,dr$.

Используя неравенство (1.5), для $t\in R^1_+$ получим оценки норм: $\|j_1(t,\mathcal{A}_0)\|\le\dfrac{4M_1}{\pi}e^{\omega_1 t}\int_0^1\sqrt{1-r^2}dr\le$ $\le M_1e^{\omega_1 t}$ и

$$\|C(t;\mathcal{A})\|\le M_1e^{\omega_1 t}+\frac{t^2M_1}{2}\int\limits_0^1 e^{\omega_1 t\sqrt{1-s^2}}\operatorname{ch}(\alpha_1 ts)\,ds\le$$

$$\le M_1e^{\omega_1 t}+\frac{t^2M_1}{2}e^{\omega_1 t}\int\limits_0^1 e^{\alpha_1 ts}ds\le M_1e^{(\omega_1+\alpha_1)t}\left(1+\frac{t}{2\alpha_1}\right)=h_1(t), \tag{1.7}$$

$$\|S(t;\mathcal{A})\|\le M_1\left(1+\frac{t}{2\alpha_1}\right)\int\limits_0^t e^{(\omega_1+\alpha_1)\tau}d\tau\le\frac{h_1(t)}{\omega_1+\alpha_1}=h_2(t). \tag{1.8}$$

Теперь, производя обратную замену (1.3) и используя перестановочность резольвенты $(I-A)^{-1}$ с косинус оператор-функцией, порождаемой оператором $\mathcal{A}$, находим решение задачи Коши для уравнения (1.1):

$$u(t,x)=(I-A)^{-1}V(t)=C(t;\mathcal{A})\varphi(x)+S(t;\mathcal{A})\psi(x). \tag{1.9}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (0.1) *параметр* $\alpha<1$ *и пусть начальные функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *принадлежат подмножеству* $C^{(4)}[R^1]$ *пространства* $C[R^1]$*, тогда задача Коши для линейного однородного уравнения* (1.1) *равномерно корректна, классическое решение дается формулой* (1.9) *и для него справедлива оценка*

$$\sup_{x\in R^1}|u(t,x)|\le h_1(t)\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|+h_2(t)\sup_{x\in R^1}|\psi(x)|,\quad t\in\overline{R}^1_+.$$

Замечание 1. Классическое решение $V(t)$ абстрактной задачи Коши (1.4), (1.6) принадлежит $C^{(2)}(\overline{R}^1_+,C[R^1])$ и для него $\mathcal{A}V(t)\in C(\overline{R}^1_+,C[R^1])$, следовательно $v(t,x)=(I-A)u(t,x)\in C^{2,2}(\overline{R}^1_+,R^1)$. В силу формулы (1.9), найденное решение задачи Коши (1.1), (0.2) $u(t,x)\in C^{2,4}(\overline{R}^1_+,R^1)$.

2. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу Коши (0.4), (0.5) для уравнения получающееся из (0.1) дифференцированием обеих частей по переменной x и последующей подстановкой $u_x=v$ (отметим, что при этом соответствующие линейные однородные уравнения для уравнений (0.1), (0.4) совпадают).

Применим к обеим частям уравнения (0.4) линейный ограниченный оператор $(I - A)^{-1}$, тогда получим эквивалентное (0.4) уравнение, которое в пространстве $C[R^1]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$V_{tt} = \mathscr{A} \cdot V + F(V), \tag{2.1}$$

где $V = V(t) : t \to v(t,x)$ – искомая вектор-функция, оператор $\mathscr{A}$ такой же, как и в уравнении (1.4), а $F(\cdot)$ – заданный нелинейный оператор: $F(g) = [(I - A)^{-1} - (I - B)^{-1}]\sigma(g)$, $\|F(g)\|_C \le 2\alpha_0 |\sigma(\|g\|_C)|$, здесь $\sigma(g)$ – оператор суперпозиции: $\sigma(g) = \sigma(g(x))$.

Для уравнения (2.1) рассмотрим абстрактную задачу Коши, записав начальные условия в виде

$$V|_{t=0} = V_0', \quad V'|_{t=0} = V_1', \tag{2.2}$$

где $V_0' = (v_0(x))'$, $V_1' = (v_1(x))'$ – элементы пространства $C[R^1]$.

Из ограниченности операторов $(I - A)^{-1}$ и $(I - B)^{-1}$ и непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $\sigma(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(\cdot)$ в пространстве $C[R^1]$ и, значит, $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому существует промежуток $[0,t_0[$, в котором абстрактная задача Коши (2.1), (2.2) для любых $V_0' \in D(\mathscr{A})$ и $V_1' \in C_1[R^1]$ имеет [7, § 3] единственное обобщенное решение $V = V(t)$, $t \in \overline{R}_+^1$, т.е. единственное непрерывно дифференцируемое решение абстрактного интегрального уравнения

$$V(t) = C(t;\mathscr{A})V_0' + S(t;\mathscr{A})V_1' + \int_0^t S(t-\tau;\mathscr{A})F(V(\tau))\,d\tau. \tag{2.3}$$

Из абстрактного интегрального уравнения (2.3), используя оценки (1.7), (1.8), получаем интегральное неравенство $\|V(t)\|_C \le h_3(t) + 2\alpha_0 h_2(t)\int_0^t |\sigma(\|V(\tau)\|_C)|d\tau$, где $h_3(t) = h_1(t)[\sup_{x\in R^1}|\varphi'(x)| + \sup_{x\in R^1}|\psi'(x)|/(\alpha_1 + \omega_1)]$, или

$$\|V(t)\|_C \le r_1 + r_2\int_0^t |\sigma(\|V(\tau)\|_C)|\,d\tau, \tag{2.4}$$

здесь $r_1 = \max_{t\in[0,t_0]} h_3(t)$ и $r_2 = 2\alpha_0 \max_{t\in[0,t_0]} h_2(t)$.

Из интегрального неравенства (2.4) выводим [8, § 1.4] оценку нормы обобщенного решения

$$\|V(t)\|_C = \sup_{x\in R^1}|v(t,x)| = \sup_{x\in R^1}|u_x(t,x)| \le \Omega^{-1}(\Omega(r_1) + r_2 t) = h_4(t), \quad t \in [0,t_1], \tag{2.5}$$

где $\Omega(\xi) = \int_\eta^\xi \frac{ds}{|\sigma(s)|}$, $\eta > 0$, $\xi > 0$, функция $\Omega^{-1}(\cdot)$ – обратная к $\Omega(\cdot)$, а отрезок $[0,t_1] \subseteq [0,t_0[$, определяется теми значениями t, при которых значения $\Omega(r_1) + r_2 t$ принадлежат области определения функции $\Omega^{-1}(\cdot)$.

Решение интегрального уравнения (2.3): $V(t)$, $t \in [0,t_1]$, будет классическим решением абстрактной задачи Коши (2.1), (2.2), если оно дважды непрерывно дифференцируемо, что вытекает [7] из непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора $F(\cdot)$, при условии принадлежности начальных данных V_0' и V_1' соответственно множествам $D(\mathscr{A})$ и $C_1[R^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (0.1) *параметр* $\alpha < 1$ *и пусть начальные функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *принадлежат пространству* $C[R^1]$ *вместе со своими производными до пятого порядка включительно, тогда на временном отрезке* $[0, t_1]$ *существует единственное классическое решение* $v = v(t,x)$ *задачи Коши* (0.4), (0.5) *в пространстве* $C[R^1]$*, для которого справедлива оценка* (2.5).

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ (0.1) И (0.4)

В дальнейших рассмотрениях предполагается, что решение уравнения (0.1) принадлежит пересечению пространства $C[R^1]$ с пространством $L_2(R^1)$ функций с интегрируемым квадратом.

Напомним, что скалярное произведение и норма в $L_2(R^1)$ определяются соответственно формулами $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx$ и $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ и что для функций $g(x)$, принадлежащих пересечению пространства непрерывных ограниченных функций $C(R^1)$ с пространством Соболева $W_2^1(R^1)$, справедлива оценка

$$\|g\|_C \le \|g\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [(g(x))^2 + (g'(x))^2] dx\right)^{1/2}, \tag{3.1}$$

причем, если $g(x) \in C^{(2)}(R^1)$, то [9] предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \to \pm\infty$ равен нулю.

Лемма. *Из существования локального классического решения уравнения* (0.4): $v = v(t,x)$, $t \in [0,t_1]$, *следует существование соответствующего решения*

$$u = u(t,x) = \lim_{x_0 \to -\infty} \int_{x_0}^{x} v(t,s)\,ds = \int_{-\infty}^{x} v(t,s)\,ds \tag{3.2}$$

уравнения (0.1) *на том же временном отрезке* $[0,t_1]$*, при выполнении условий* (0.6):

$$\partial_t^n \partial_x^m u(t,x) \in C[R^1] \cap L_2(R^1), \quad n + m \le 4, \quad n = \overline{0,2}, \quad m = \overline{0,4}, \quad t \in [0,t_1].$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий (0.6) следуют предельные равенства

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \partial_t^n \partial_x^m u(t,x) = 0, \quad n + m \le 4, \quad n = \overline{0,2}, \quad m = \overline{0,4}, \quad t \in [0,t_1]. \tag{3.3}$$

Пусть $v = v(t,x)$ классическое решение уравнения (0.4) на временном отрезке $[0,t_1]$, тогда, используя соотношения (3.3), выводим равенства

$$1)\ \int_{-\infty}^{x} v_{tt}(t,s)\,ds = u_{tt}(t,x), \quad 2)\ \int_{-\infty}^{x} v_{tts}(t,s)\,ds = u_{ttx}(t,x),$$

$$3)\ \int_{-\infty}^{x} v_{ttss}(t,s)\,ds = u_{ttxx}(t,x), \quad 4)\ \int_{-\infty}^{x} v_{ssss}(t,s)\,ds = u_{xxxx}(t,x).$$

Далее, в силу непрерывности функции $\sigma'(\cdot)$, имеем

$$\int_{-\infty}^{x} \partial_s^2 \sigma(v(t,s))\,ds = (\sigma(u_x(t,x)))_x - \sigma'\left(\lim_{x_0 \to -\infty} u_x(t,x_0)\right) \lim_{x_0 \to -\infty} u_{xx}(t,x_0) = (\sigma(u_x(t,x)))_x.$$

Теперь, используя полученные представления и подставляя функцию (3.2) в уравнение (0.1), получаем тождественное равенство на отрезке $[0,t_1]$:

$$u_{tt}(t,x) - \alpha u_{ttx}(t,x) - u_{ttxx}(t,x) + u_{xxxx}(t,x) - (\sigma(u_x(t,x)))_x =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} [v_{tt}(t,s) - \alpha v_{tts}(t,s) - v_{ttss}(t,s) + v_{ssss}(t,s) - \partial_s^2 \sigma(v(t,s))] ds \equiv 0,$$

откуда следует, что функция (3.2) является решением уравнения (0.1).

Замечание 2. Из требований (0.6) к решению $u = u(t,x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) с необходимостью следуют условия, которым должны удовлетворять начальные функции

$$\varphi(x) \in C^{(4)}[R^1] \cap L_2(R^1), \quad \psi(x) \in C^{(3)}[R^1] \cap L_2(R^1). \tag{3.4}$$

4. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (0.1), (0.2)

Рассмотрим так называемый интеграл энергии для уравнения (0.1) на временном отрезке $[0,t_1]$:

$$y(t) = (u,u) + (u_x,u_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u^2 + u_x^2)dx = \|u\|^2_{W_2^1}. \tag{4.1}$$

Найдем условия разрушения решения $u = u(t,x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) на некотором временном отрезке $[0,t_2] \subseteq [0,t_1]$, т.е. найдем достаточные условия возникновения разрыва второго рода для интеграла энергии (4.1) на отрезке $[0,t_2]$, который выбираем так, чтобы на нем выполнялось неравенство $y(t) > 0$, вытекающее из начального условия $y(0) = \|\varphi\|^2_{W_2^1} > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы* 2 *и пусть начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и нелинейность* $\sigma(\cdot)$ *обеспечивают, в дополнение к условиям* (0.3), (3.4) *выполнение требований*

$$s\sigma(s) \le \lambda_0\Phi(s), \;\; \Phi(s) = \int\limits_0^s \sigma(r)\,dr, \; \forall s \in R^1, \; \lambda_0 > 3 + (\alpha+2)r_5,$$

$$\Phi(\varphi'(x)) \in L_1(R^1), \quad \|\psi\|^2_{W_2^1} + \|\varphi''\|_2^2 \ge -2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\varphi'(x))\,dx,$$

$$(\varphi,\psi) + (\varphi',\psi') > \left(\frac{r_{10}}{\lambda_0 - 2}\|\varphi\|^2_{W_2^1} + \frac{r_{11}}{\lambda_0}\right)^{1/2}\|\varphi\|_{W_2^1} > 0,$$

тогда время T_∞ *существования решения задачи Коши* (0.1), (0.2) *не может быть сколь угодно большим, а именно имеет место оценка сверху:*

$$T_\infty \le \frac{1}{r_{12}}\|\varphi\|^{(2-\lambda_0)/4}_{W_2^1},$$

причем для функционала $y(t)$ *справедлива оценка снизу*

$$y(t) \ge (\|\varphi\|^{(2-\lambda_0)/2}_{W_2^1} - r_{12}t)^{4/(2-\lambda_0)}$$

и предельное равенство $\limsup\limits_{t\uparrow T_\infty} y(t) = +\infty$.

Замечание 3. Фигурирующие в формулировке теоремы постоянные λ_0, r_j определяются в ходе доказательства теоремы и зависят от параметра α, начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и нелинейности $\sigma(\cdot)$.

Доказательство. Применяя к квадрату производной интеграла энергии: $y'(t) = 2[(u,u_t) + (u_x,u_{tx})]$, неравенство Коши–Буняковского: $|(\varphi,\psi)| \le \varphi_2\psi_2$, выводим вспомогательную оценку

$$[y'(t)]^2 \le 4y(t)\,z(t), \tag{4.2}$$

где $z(t)$, $t \in [0,t_2]$, – второй интеграл энергии для уравнения (0.1), определяемый формулой

$$z(t) = \|u_t\|^2_{W_2^1} = (u_t,u_t) + (u_{tx},u_{tx}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u_t^2 + u_{tx}^2)dx. \tag{4.3}$$

Вычислим производную второго порядка функционала (4.1) и выразим ее значение через второй интеграл энергии (4.3):

$$\frac{1}{2}y''(t)+(u_{xx},u_{tt})-(u,u_{tt})=z(t). \tag{4.4}$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на функцию $u=u(t,x)$ и проинтегрируем полученное равенство по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, применяя формулу интегрирования по частям и учитывая равенство нулю внеинтегральных слагаемых при $x\to\pm\infty$, получим

$$(u_{xx},u_{tt})-(u,u_{tt})=\|u_{xx}\|_2^2+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_x\sigma(u_x)\,dx+\alpha(u_x,u_{tt}). \tag{4.5}$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (0.1) на $u_t=u_t(t,x)$ и обозначая через $\Phi(\cdot)$ – потенциал, определяемый нелинейностью $\sigma(\cdot)$ формулой $\Phi(s)=\int_0^s\sigma(r)\,dr$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)+\|u_{xx}\|_2^2+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(u_x)\,dx\right)+2\alpha(u_{tx},u_{tt})=0. \tag{4.6}$$

Введем в рассмотрение функционал энергии, связанный с уравнением (0.1)

$$E(t)=z(t)+\|u_{xx}\|_2^2+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(u_x)\,dx+2\alpha\int\limits_0^t(u_{x\tau},u_{\tau\tau})\,d\tau.$$

Из равенства (4.6) следует, что производная функционала энергии равна нулю: $dE(t)/dt=0$, следовательно, энергия $E(t)$ не зависит от времени и поэтому для решения уравнения (0.1) имеет место закон сохранения:

$$E(t)=E(0)\equiv E_0, \tag{4.7}$$

в котором начальная энергия E_0 определяется формулой

$$E_0=\|\psi\|_2^2+\|\psi'\|_2^2+\|\varphi''\|_2^2+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\varphi'(x))\,dx.$$

Используя представление уравнения (0.1) в виде

$$u_{tt}=\mathscr{A}u+(I-A)^{-1}\sigma'(u_x)u_{xx}, \tag{4.8}$$

выведем оценку квадрата нормы частной производной u_{tt}. Оценивая нормы обеих частей уравнения (4.8), рассмотрим цепочку неравенств:

$$\|u_{tt}\|_2^2\le(\|(I-B)^{-1}\|\|u_{xx}\|_2+\|(I-B)^{-1}-(I-A)^{-1}\|\|u_2\|+\|(I-A)^{-1}\|\|\sigma'(u_x)u_{xx}\|_2)^2$$

(учитывая неравенства (0.3) и (2.5), имеем

$$\|\sigma'(u_x)u_{xx}\|_2^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sigma'(u_x))^2u_{xx}^2dx\le\left(\sigma'\left(\sup_{x\in R^1}|u_x(t,x)|\right)\right)^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2dx\le$$

$$\le(\sigma'(h_4(t)))^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2dx=h_5^2(t)\|u_{xx}\|_2^2,$$

где $h_5(t)=|\sigma'(h_4(t))|$ – непрерывная функция на отрезке $[0,t_1]$)

$$\alpha_0^2((1+h_5(t))\|u_{xx}\|_2+2\|u\|_2)^2\le$$

(применяя неравенство $\|u\|_2^2\le y(t)$)

$$\le 2\alpha_0^2((1+h_5(t))^2\|u_{xx}\|_2^2+4y(t)).$$

Таким образом, получаем оценку

$$\|u_{tt}\|_2^2 \le r_3 y(t) + r_5\|u_{xx}\|_2^2, \quad t \in [0, t_2], \tag{4.9}$$

где $r_3 = 8\alpha_0^2$, $r_4 = \max\limits_{t\in[0,t_2]} h_5(t)$ и $r_5 = 2\alpha_0^2(1 + r_4)^2$.

Предположим, что выполняется условие

$$s\sigma(s) \le \lambda\Phi(s) \quad \forall s \in R^1, \tag{4.10}$$

где λ – пока неопределенное достаточно большое положительное число.

Сравнивая равенства (4.5) и (4.7) и применяя условие (4.10), получим неравенство

$$\lambda z(t) + (\lambda - 2)\|u_{xx}\|_2^2 \le \lambda E_0 + 2\alpha(u_x, u_{tt}) + 2(u, u_{tt}) - 2(u_{xx}, u_{tt}) - 2\alpha\lambda\int_0^t (u_{\tau x}, u_{\tau\tau})\,d\tau. \tag{4.11}$$

Учитывая, что $\|u_x\|_2^2 \le y(t)$, $\|u_{\tau x}\|_2^2 \le z(\tau)$ и применяя неравенство (4.9) и оценки

1) $2(u_x, u_{tt}) \le \|u_x\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \le (1 + r_3)\,y(t) + r_5\|u_{xx}\|_2^2$,

2) $2(u, u_{tt}) \le \|u\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \le (1 + r_3)\,y(t) + r_5\|u_{xx}\|_2^2$,

3) $2(u_{xx}, u_{tt}) \le \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \le r_3 y(t) + (1 + r_5)\|u_{xx}\|_2^2$,

4) $2\int_0^t (u_{\tau x}, u_{\tau\tau})\,d\tau \le \int_0^t (\|u_{\tau x}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2)d\tau \le \int_0^t z(\tau)\,d\tau + r_3\int_0^t y(\tau)\,d\tau + r_5\int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau$

увеличим правую часть неравенства (4.11):

$$\lambda z(t) + (\lambda - 3 - (\alpha + 2)r_5)\|u_{xx}\|_2^2 \le \lambda E_0 + (\alpha(1 + r_3) + 1 + 2r_3)\,y(t) +$$
$$+ \alpha\lambda r_3\int_0^t y(\tau)\,d\tau + \alpha\lambda\left(\int_0^t z(\tau)\,d\tau + r_5\int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau\right). \tag{4.12}$$

Полагая $\lambda_1 = \lambda - 3 - (\alpha + 2)r_5 > 0$, т.е.

$$\lambda = \lambda_0 > 3 + (\alpha + 2)r_5,$$

обозначая

$$E_1(t) = \lambda_0 E_0 + r_6 y(t) + \alpha\lambda_0 r_3\int_0^t y(\tau)\,d\tau,$$

где $r_6 = \alpha(1 + r_3) + 1 + 2r_3$, и учитывая, что $r_5 > 1$, перепишем (4.12) в виде интегрального неравенства

$$z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 \le \frac{1}{\lambda_1}E_1(t) + \frac{\alpha\lambda_0 r_5}{\lambda_1}\int_0^t (z(\tau) + \|u_{xx}\|_2^2)d\tau. \tag{4.13}$$

Требуя выполнение неравенства $E_1 \ge 0$, для чего достаточно, чтобы начальная энергия E_0 была неотрицательной: $E_0 = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi''\|_2^2 + 2\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\varphi'(x))\,dx \ge 0$, и применяя к неравенству (4.13) лемму Гронуолла, на отрезке $t \in [0, t_2]$ получим оценку

$$z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 \le \frac{1}{\lambda_1}E_1(t) + \frac{\alpha\lambda_0 r_5}{\lambda_1^2}e^{\alpha\lambda_0 t_1 r_5/\lambda_1}\int_0^t E_1(s)\,ds. \tag{4.14}$$

Из непрерывной дифференцируемости интеграла энергии $y(t)$ следует, что при выполнении начального условия $y'(0) = 2[(\varphi,\psi) + (\varphi',\psi')] > 0$ найдется такой отрезок времени $[0,t_3] \subseteq [0,t_2]$, на котором производная интеграла энергии будет неотрицательна: $y'(t) \geq 0$, но тогда справедлива цепочка соотношений

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau = \tau y(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t \tau y'(\tau)\,d\tau \leq ty(t) \leq t_1 y(t). \tag{4.15}$$

Интегрируя по частям и применяя неравенство (4.15), оценим интеграл из правой части (4.14)

$$\int_0^t E_1(s)\,ds \leq \lambda_0 t_1 E_0 + r_6 t_1 y(t) + \alpha\lambda_0 r_3 \left(s\int_0^s y(\tau)\,d\tau \Bigg|_0^t - \int_0^t sy(s)\,ds \right) \leq$$

$$\leq \lambda_0 t_1 E_0 + (r_6 + \alpha\lambda_0 t_1 r_3)\,t_1 y(t).$$

Используя полученную оценку, увеличим правую часть неравенства (4.14)

$$z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 \leq r_8 + r_9 y(t),$$

где $r_7 = 1 + \alpha\lambda_0 t_1 r_5 e^{\alpha\lambda_0 t_1 r_5/\lambda_1}/\lambda_1$, $r_8 = \lambda_0 r_7 E_0/\lambda_1$, $r_9 = (r_6 + \alpha\lambda_0 t_1 r_3)\,r_7/\lambda_1$.

Таким образом, на временном отрезке $[0,t_3]$ справедливы неравенства

$$\|u_{xx}\|_2^2, \quad z(t) \leq r_8 + r_9 y(t). \tag{4.16}$$

Подставляя значение левой части равенства (4.5) в формулу (4.4), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x \sigma(u_x)\,dx = z(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \alpha(u_x,u_{tt}) - \|u_{xx}\|_2^2. \tag{4.17}$$

Сравнивая равенство (4.17) с равенством, вытекающим из закона сохранения (4.7) и учитывая неравенство (4.10), в котором $\lambda = \lambda_0$, получим

$$(\lambda_0 + 2)\,z(t) + (\lambda_0 - 2)\|u_{xx}\|_2^2 \leq \lambda_0 E_0 + y''(t) + 2\alpha(u_x,u_{tt}) - 2\alpha\lambda_0\int_0^t (u_{\tau x},u_{\tau\tau})\,d\tau. \tag{4.18}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и оценки (4.9), (4.15), (4.16), имеем

1) $2(u_x,u_{tt}) \leq (1 + r_3)\,y(t) + r_5\|u_{xx}\|_2^2 \leq r_5 r_8 + (1 + r_3 + r_5 r_9)\,y(t)$,

2) $2\int_0^t (u_{x\tau},u_{\tau\tau})\,d\tau \leq \int_0^t z(\tau)\,d\tau + r_3\int_0^t y(\tau)\,d\tau + r_5\int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \leq (1 + r_5)\,r_8 t_1 + (r_3 + (1 + r_5)\,r_9 t_1)\,y(t)$.

Учитывая эти оценки и то, что $\lambda_0 > 2$, уменьшим левую и увеличим правую части неравенства (4.18), в результате получим

$$y''(t) + r_{10}y(t) + r_{11} \geq (\lambda_0 + 2)\,z(t), \tag{4.19}$$

где $r_{10} = \lambda_0 E_0 + \alpha[r_5 + \lambda_0 t_1(1 + r_5)]\,r_8$ и $r_{11} = \alpha[(1 + r_3 + r_5 r_9) + t_1\lambda_0(r_3 + (1 + r_5)\,r_9)]$.

Теперь, используя оценку (4.2), уменьшим правую часть неравенства (4.19), в итоге имеем

$$y(t)\,y''(t) - \frac{\lambda_0 + 2}{4}(y'(t))^2 + r_{11}y(t) + r_{10}y^2(t) \geq 0, \quad t \in [0,t_3]. \tag{4.20}$$

Сравнивая неравенство (4.20) с одним из основных обыкновенных дифференциальных неравенств для интеграла энергии [10, Приложение А, § 5], заключаем, что если выполнены начальные условия

$$y(0) > 0, \quad (y'(0))^2 > 4\left(\frac{r_{10}}{\lambda_0 - 2}y^2(0) + \frac{r_{11}}{\lambda_0}y(0)\right),$$

тогда время t_3 существования решения задачи Коши (0.1), (0.2) не может быть сколь угодно большим, а именно имеет место оценка сверху

$$t_3 \le T_\infty \le \frac{1}{r_{12}\left(y(0)\right)^{(\lambda_0-2)/4}},$$

где

$$r_{12}^2 = \frac{(\lambda_0-2)^2}{16}\left(y(0)\right)^{-\frac{\lambda_0+2}{2}}\left(\left(y'(0)\right)^2 - \frac{4r_{10}}{\lambda_0-2}y^2(0) - \frac{4r_{11}}{\lambda_0}y(0)\right) =$$

$$= \frac{(\lambda_0-2)^2}{4}\|\varphi\|_{W_2^1}^{-\lambda_0-2}\left(\left((\varphi,\psi)+(\varphi',\psi')\right)^2 - \frac{r_{10}}{\lambda_0-2}\|\varphi\|_{W_2^1}^4 - \frac{r_{11}}{\lambda_0}\|\varphi\|_{W_2^1}^2\right),$$

причем для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу

$$y(t) \ge \frac{1}{\left(\left(y(0)\right)^{(2-\lambda_0)/4} - r_{12}t\right)^{4/(\lambda_0-2)}},$$

и, значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (0.1), (0.2).

5. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (0.1), (0.2) В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Выясним, какой вид примут условия теоремы 3 для конкретной нелинейности $\sigma(s) = \beta s^3$, $\beta > 0$, т.е. рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \alpha u_{ttx} - u_{ttxx} + u_{xxxx} = 3\beta u_x^2 u_{xx} \tag{5.1}$$

и найдем условие, связывающее параметры α и β при разрушении решения $u = u(t,x)$ задачи Коши (5.1), (0.2) на временном отрезке $[0,t_3]$. (Напомним, что на отрезке $[0,t_3]$ для интеграла энергии $y(t) = \|u\|_{W_2^1}^2$ выполняются неравенства $y(t) > 0$ и $y'(t) \ge 0$, вытекающие из начальных условий $\|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0$ и $(\varphi,\psi) + (\varphi',\psi') > 0$.)

В рассматриваемом случае основные энергетические равенства примут вид:

1) результат умножения (5.1) на $u = u(t,x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$(u_{xx},u_{tt}) - \alpha(u_x,u_{tt}) - (u,u_{tt}) - \|u_{xx}\|_2^2 = \beta\|u_x^2\|_2^2; \tag{5.2}$$

2) результат умножения уравнения (5.1) на $u_t = u_t(t,x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$\beta\|u_x^2\|_2^2 = 2\tilde{E}_0 - 2z(t) - 2\|u_{xx}\|_2^2 - 4\alpha\int_0^t (u_{\tau x},u_{\tau\tau})\,d\tau, \tag{5.3}$$

где $\tilde{E}_0 = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi''\|_2^2 + \beta\|(\varphi')^2\|_2^2/2$ — начальная энергия;

3) результат умножения уравнения (5.1) на $u_x = u_x(t,x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$(u_{xxx},u_{tt}) = (u_x,u_{tt}) + \alpha(u_{xx},u_{tt}); \tag{5.4}$$

4) результат умножения уравнения (5.1) на $u_{tt} = u_{tt}(t,x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{ttx}\|_2^2 = (u_{xxx},u_{ttx}) + 3\beta(u_{tt},u_x^2u_{xx}); \tag{5.5}$$

5) результат умножения уравнения (5.1) на $u_{xx} = u_{xx}(t,x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$\|u_{xxx}\|_2^2 + 3\beta\|u_xu_{xx}\|_2^2 = (u_{xx},u_{tt}) + \alpha(u_{xxx},u_{tt}) + (u_{xxx},u_{ttx}). \tag{5.6}$$

Представление уравнения (0.1) в форме (4.8) в рассматриваемом случае принимает вид

$$u_{tt} = \mathscr{A}u + 3\beta(I-A)^{-1}u_x^2u_{xx}.$$

Оценивая нормы обеих частей этого уравнения, получаем цепочку соотношений

$$\|u_{tt}\|_2^2 \le \alpha_0^2\left(\|u_{xx}\|_2 + 2\|u\|_2 + 3\beta\|u_x^2u_{xx}\|_2\right)^2 \le$$

(используя неравенства $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$, $\|u_2^2\| \le y(t)$ и (3.1))

$$\le 3\alpha_0^2\left(\|u_{xx}\|_2^2 + 4\|u\|_2^2 + 9\beta^2\sup_{x\in R^1}u_x^4\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2dx\right) \le$$

$$\le 3\alpha_0^2\left(\|u_{xx}\|_2^2 + 4y(t) + 9\beta^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx + \int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2dx\right)^2\|u_{xx}\|_2^2\right) \le$$

$$\le 3\alpha_0^2\left(\|u_{xx}\|_2^2 + 4y(t) + 9\beta^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx + \int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx + \|u_{xx}\|_2^2\right)^2\|u_{xx}\|_2^2\right) =$$

$$= 3\alpha_0^2(\|u_{xx}\|_2^2 + 4y(t) + 9\beta^2(y(t) + \|u_{xx}\|_2^2)^2\|u_{xx}\|_2^2).$$

Таким образом, на временном отрезке $[0, t_3]$, имеем оценку

$$\|u_{tt}\|_2^2 \le 3\alpha_0^2(9\beta^2qy^2(t) + 2(2+9\beta^2q^2)y(t) + (1+9\beta^2q^2)q), \tag{5.7}$$

где обозначено $q = \|u_{xx}\|_2^2$.

Рассмотрим функционал, определяемый уравнением (5.1):

$$Q(t) = \|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{ttx}\|_2^2 + \|u_{xxx}\|_2^2 + 3\beta\|u_xu_{xx}\|_2^2. \tag{5.8}$$

Используя соотношения (5.4)–(5.6), (5.2) и затем применяя неравенство Коши–Буняковского, оценим правую часть равенства (5.8)

$$Q(t) = 3\beta(u_{tt}, u_x^2u_{xx}) + 2(u_{xxx}, u_{ttx}) + (u_{xx}, u_{tt}) + \alpha[(u_x, u_{tt}) + \alpha(u_{xx}, u_{tt})] =$$

$$= 3\beta(u_{tt}, u_x^2u_{xx}) + 2(u_{xxx}, u_{xtt}) + (\alpha^2+1)(u_{xx}, u_{tt}) + \alpha(u_x, u_{tt}) =$$

$$= 3\beta(u_{tt}, u_x^2u_{xx}) + 2(u_{xxx}, u_{ttx}) + \alpha(u_x, u_{tt}) +$$

$$+ (\alpha^2+1)[\|u_{xx}\|_2^2 + \beta\|u_x^2\|_2^2 + (u, u_{tt}) + \alpha(u_x, u_{tt})] =$$

$$= 3\beta(u_{tt}, u_x^2u_{xx}) + 2(u_{xxx}, u_{ttx}) + \alpha(\alpha^2+2)(u_x, u_{tt}) +$$

$$+ (\alpha^2+1)(u, u_{tt}) + (\alpha^2+1)\beta\|u_x^2\|_2^2 + (\alpha^2+1)\|u_{xx}\|_2^2 \le$$

$$\le \frac{3\beta}{2}(\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_x^2u_{xx}\|_2^2) + \|u_{xxx}\|_2^2 + \|u_{ttx}\|_2^2 + \frac{\alpha(\alpha^2+2)}{2}(\|u_x\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2) +$$

$$+ \frac{\alpha^2+1}{2}(\|u\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2) + (\alpha^2+1)\beta\|u_x^2\|_2^2 + (\alpha^2+1)\|u_{xx}\|_2^2.$$

Используя оценки

$$1)\quad \|u_x^2u_{xx}\|_2^2 \le \sup_{x\in R^1}u_x^4\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2dx \le (y(t) + \|u_{xx}\|_2^2)^2\|u_{xx}\|_2^2 = (y(t)+q)^2q,$$

$$2)\quad \|u_x^2\|_2^2 \le \sup_{x\in R^1}u_x^2\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx \le (y(t) + \|u_{xx}\|_2^2)y(t) = (y(t)+q)\,y(t),$$

продолжим оценку функционала (5.8)

$$Q(t) \le \|u_{xxx}\|_2^2 + \|u_{ttx}\|_2^2 + \frac{1}{2}(3\beta + \alpha^3 + (\alpha+1)^2)\|u_{tt}\|_2^2 + \frac{3\beta q}{2}y^2(t) + 3\beta q^2y(t) + \frac{3\beta q^3}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha^3+(\alpha+1)^2)y(t)+(\alpha^2+1)\beta y^2(t)+(\alpha^2+1)\beta q y(t)+(\alpha^2+1)q=$$

$$=\|u_{xxx}\|_2^2+\|u_{ttx}\|_2^2+\frac{1}{2}(3\beta+r_{13})\|u_{tt}\|_2^2+\frac{\beta}{2}(3q+2r_{14})y^2(t)+$$

$$+\frac{1}{2}(6\beta q^2+2r_{14}\beta q+r_{13})y(t)+\frac{q}{2}(3\beta q^2+2r_{14}),$$

где $r_{13}=\alpha^3+(\alpha+1)^2$, $r_{14}=\alpha^2+1$. Отсюда следует неравенство

$$(3\beta+r_{13}-2)\|u_{tt}\|_2^2+$$

$$+(3q+2r_{14})\beta y^2(t)+[6\beta q^2+2r_{14}\beta q+r_{13}]y(t)+(3\beta q^2+2r_{14})q\geq 0. \tag{5.9}$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $3\beta+r_{13}-2>0$ или в подробной записи

$$3\beta+\alpha^3+\alpha^2+2\alpha-1>0. \tag{5.10}$$

Обозначая $r_{15}=3\alpha_0^2(3\beta+r_{13}-2)$ и применяя в левой части (5.9) оценку (5.7), получим неравенство

$$(3r_{16}q+2r_{14})\beta y^2(t)+(6r_{16}\beta q^2+2r_{14}\beta q+r_{17})y(t)+3r_{16}\beta q^3+r_{18}q\geq 0, \tag{5.11}$$

где $r_{16}=3r_{15}\beta+1$, $r_{17}=r_{13}+4r_{15}$, $r_{18}=r_{15}+2r_{14}$, которое, с учетом (5.10), справедливо для всех значений интеграла энергии $y(t)$, но тогда дискриминант квадратного трехчлена из левой части неравенства (5.11) должен быть неположительный:

$$d_1=4\beta(r_{14}^2\beta+3r_{16}(r_{17}-r_{18}))q^2+4r_{14}\beta(r_{17}-2r_{18})q+r_{17}^2\leq 0. \tag{5.12}$$

Потребуем, чтобы коэффициент при первой степени квадратного трехчлена в (5.12) был отрицательным: $r_{17}-2r_{18}<0$, а коэффициент при второй степени положительным: $r_{14}^2\beta+3r_{16}(r_{17}-r_{18})>0$, тогда, подставляя значения $r_{13}-r_{18}$ и α_0, соответственно имеем

$$18\beta+\alpha^5-5\alpha^4+15\alpha^3-4\alpha^2+20\alpha-9<0 \tag{5.13}$$

и

$$2187\alpha_0^4\beta^3+81\alpha_0^2(\gamma_1+18\alpha_0^2\gamma_2)\beta^2+$$

$$+[r_{14}^2+27\alpha_0^2(1+\gamma_1\gamma_2+9\alpha_0^2\gamma_2^2)]\beta+\gamma_1+9\alpha_0^2\gamma_2>0, \tag{5.14}$$

где $\gamma_1=r_{13}-2r_{14}$, $\gamma_2=r_{13}-2$.

Потребуем еще, чтобы дискриминант квадратного трехчлена в (5.12) был положительным: $d_2=4\beta[r_{14}^2\beta(r_{17}-2r_{18})^2-r_{17}^2(r_{14}^2\beta+3r_{16}(r_{17}-r_{18}))]>0$, тогда получаем еще одно условие, связывающее параметры α и β уравнения (5.1)

$$2834352\alpha_0^8\beta^5+52488\alpha_0^6(2\gamma_3+3\gamma_4)\beta^4+$$

$$+81\alpha_0^4(16(r_{14}^2+27\alpha_0^2(\gamma_2\gamma_5+3))+72\gamma_4\gamma_3+27\gamma_4^2-4r_{14}^2)\beta^3+$$

$$+9\alpha_0^2(432\gamma_5+8\gamma_4(r_{14}^2+27\alpha_0^2(\gamma_2\gamma_5+3))+9\gamma_3\gamma_4^2-4r_{14}^2\gamma_6)\beta^2+$$

$$+(216\alpha_0^2\gamma_4\gamma_5+(r_{14}^2+27\alpha_0^2(\gamma_2\gamma_5+3))\gamma_4^2-r_{14}^2\gamma_6^2)\beta+3\gamma_5\gamma_4^2<0, \tag{5.15}$$

где $\gamma_3=18\alpha_0^2\gamma_2+\gamma_1$, $\gamma_4=12\alpha_0^2\gamma_2+r_{13}$, $\gamma_5=9\alpha_0^2\gamma_2+\gamma_1$, $\gamma_6=6\alpha_0^2\gamma_2+\gamma_1$.

При выполнении условий (5.10) и (5.13)–(5.15) квадратный трехчлен (5.12) имеет положительные корни $K_{1,2} = \dfrac{4r_{14}\beta(2r_{18} - r_{17}) \pm \sqrt{d_2}}{4\beta(r_{14}^2\beta + 3r_{16}(r_{17} - r_{18}))}$, причем неравенство (5.12) будет выполняться при $K_1 \le q \le K_2$, откуда следует оценка

$$\|u_{xx}\|_2^2 \le K_2 \quad \forall t \in [0, t_3]. \tag{5.16}$$

Теперь неравенство (5.7) можно переписать в виде

$$\|u_{tt}\|_2^2 \le r_{19} y^2(t) + r_{20} y(t) + r_{21}, \tag{5.17}$$

где $r_{19} = 27\alpha_0^2\beta^2 K_2$, $r_{20} = 6\alpha_0^2(2 + 9\beta^2 K_2^2)$, $r_{21} = 3\alpha_0^2(1 + 9\beta^2 K_2^2)K_2$.

Исключая из равенств (5.2) и (5.3) слагаемые, содержащие параметр β, получим

$$2z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 = 2\tilde{E}_0 + (u, u_{tt}) + \alpha(u_x, u_{tt}) - (u_{xx}, u_{tt}) - 4\alpha\int_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau\tau})\,d\tau.$$

Оценивая абсолютную величину правой части последнего неравенства, имеем

$$z(t) \le \tilde{E}_0 + \frac{1}{4}y(t) + \frac{3}{4}\|u_{tt}\|_2^2 + \alpha\int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau + \alpha\int_0^t z(\tau)\,d\tau. \tag{5.18}$$

Используя оценки (5.17), (4.15) и

$$\int_0^t y^2(\tau)\,d\tau = \tau y^2(\tau)\Big|_0^t - 2\int_0^t \tau y(\tau)\,y'(\tau)\,d\tau \le t y^2(t) \le t_1 y^2(t),$$

из (5.18) выводим интегральное неравенство

$$z(t) \le \Psi(t) + \alpha\int_0^t z(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0, t_3], \tag{5.19}$$

где $\Psi(t) = r_{19}r_{22}y^2(t) + r_{23}y(t) + r_{24}$, здесь $r_{22} = 3/4 + \alpha t_1$, $r_{23} = 1/4 + r_{20}r_{22}$, $r_{24} = \tilde{E}_0 + r_{21}r_{22}$.

Так как в рассматриваемом случае начальная энергия $\tilde{E}_0$ – неотрицательная величина, то применяя к (5.19) лемму Гроноулла, получим

$$z(t) \le \Psi(t) + \alpha\int_0^t \Psi(s)\,e^{\alpha(t-s)}\,ds \le \Psi(t) + \alpha e^{\alpha t_1}\int_0^t \Psi(s)\,ds \le$$
$$\le r_{26}y^2(t) + r_{27}y(t) + r_{28}, \quad t \in [0, t_3], \tag{5.20}$$

где $r_{25} = 1 + \alpha t_1 e^{\alpha t_1}$, $r_{26} = r_{19}r_{22}r_{25}$, $r_{27} = r_{23}r_{25}$, $r_{28} = r_{24}r_{25}$.

Вычисляя производную второго порядка интеграла энергии (4.1), используя уравнение (5.1) и интегрируя по частям, выводим энергетическое равенство:

$$z(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \|u_{xx}\|_2^2 - \alpha(u_x, u_{tt}) = \beta\|u_x^2\|_2^2. \tag{5.21}$$

Из равенств (5.21) и (5.3) следует, что, например, удвоенная правая часть равенства (5.3) в любой точке t отрезка $[0, t_3]$ будет больше левой части (5.21):

$$4\tilde{E}_0 - 4z(t) - 4\|u_{xx}\|_2^2 - 8\alpha\int_0^t (u_{\tau x}, u_{\tau\tau})\,d\tau \ge z(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \|u_{xx}\|_2^2 - \alpha(u_x, u_{tt})$$

или

$$y''(t) + 8\tilde{E}_0 + 2\alpha(u_x, u_{tt}) - 16\alpha\int_0^t (u_{\tau x}, u_{\tau\tau})\,d\tau \ge 10z(t) + 6\|u_{xx}\|_2^2. \tag{5.22}$$

Учитывая неравенства

$$1)\ 2(u_x, u_{tt}) \le \|u_x\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \le r_{19} y^2(t) + (1 + r_{20}) y(t) + r_{21},$$

$$2)\ 2\int_0^t (u_{\tau x}, u_{\tau\tau})\, d\tau \le \int_0^t (\|u_{\tau x}\|_2^2 + \|u_{\tau\tau}\|_2^2) d\tau \le \int_0^t z(\tau)\, d\tau + \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau$$

(применяя оценки (5.19) и (5.17))

$$((r_{19} + r_{26}) y^2(t) + (r_{20} + r_{27}) y(t) + r_{21} + r_{28})t_1,$$

увеличим левую часть неравенства (5.22) и уменьшим правую

$$y''(t) + r_{29} + r_{30} y(t) + r_{31} y^2(t) \ge 10 z(t), \tag{5.23}$$

где $r_{29} = 8\tilde{E}_0 + \alpha(r_{21} + 8(r_{21} + r_{28})t_1)$, $r_{30} = \alpha(1 + r_{20} + 8(r_{20} + r_{27})t_1)$, $r_{31} = \alpha(r_{19} + 8(r_{19} + r_{26})t_1)$.

Используя неравенство (4.2), из неравенства (5.23) выводим

$$y(t) y''(t) - \frac{5}{2}(y'(t))^2 + r_{29} y(t) + r_{30} y^2(t) + r_{31} y^3(t) \ge 0, \quad t \in [0, t_3]. \tag{5.24}$$

Сравнивая неравенство (5.24) с неравенством для интеграла энергии [10, Приложение A, § 5], заключаем, что все условия разрушения решения выполнены и что имеет место

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы 2 и пусть начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и параметры* α, β *уравнения* (5.1) *обеспечивают, в дополнение к условиям* (0.3), (3.4), (5.10), (5.13)–(5.15), *выполнение требований*

$$[(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')]^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{r_{31}}{2}\|\varphi\|_{W_2^1}^4 + \frac{r_{30}}{3}\|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \frac{r_{29}}{4}\right)\|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0,$$

тогда время t_3 *существования решения задачи Коши* (5.1), (0.2) *не может быть сколь угодно большим, а именно имеет место оценка сверху:*

$$t_3 \le T_\infty \le \frac{1}{r_{32}}\|\varphi\|_{W_2^1}^{-3},$$

где

$$r_{32}^2 = 9\|\varphi\|_{W_2^1}^{-5}\left\{[(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')]^2 - \frac{r_{31}}{4}\|\varphi\|_{W_2^1}^6 - \frac{r_{30}}{6}\|\varphi\|_{W_2^1}^4 - \frac{r_{29}}{8}\|\varphi\|_{W_2^1}^2\right\},$$

причем для функционала $y(t)$ *справедлива оценка снизу*

$$y(t) \ge \left(\|\varphi\|_{W_2^1}^{-3} - r_{33} t\right)^{-2/3}$$

и предельное равенство $\limsup\limits_{t \uparrow T_\infty} y(t) = +\infty$.

Замечание 4. Из всех требований теоремы 4 наиболее трудно проверяемыми являются условия (5.10), (5.13)–(5.15) на параметры α, β уравнения (5.1). Однако графический калькулятор Desmos: https://www.desmos.com/ позволяет наглядно изобразить не только области, в которых справедливо каждое из этих неравенств, но и изобразить область на плоскости переменных $x = \alpha$, $y = \beta$, определяющую решение системы неравенств (5.10), (5.13)–(5.15) с заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beards C.F.* Structural Vibration: Analysis and Damping. Oxford, 2003. 289 p.
2. *Демиденко Г.В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
3. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
4. *Dunford N., Schwartz J.T.* Linear Operators. Part I: General Theory. N.Y.: Interscience, 1958. xiv + 858 p. = *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.

5. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Серия Матем. анализ. Т. 28. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 87–202.
6. *Васильев В.В., Пискарев С.И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций // http://www-old.srcc.msu.ru/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2-ru.pdf
7. *Travis C.C., Webb G.F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
8. *Dragomir S.S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002. 193 p.
9. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.,* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. R. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
10. *Корпусов М.О.* Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2012. 256 с.