ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 11, с. 1799–1805

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

ТРЕХСЛОЙНЫЕ СХЕМЫ С ДВУКРАТНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ШАГА ПО ВРЕМЕНИ[1)]

П. Н. Вабищевич[1,2,*]

[1] 115191 Москва, Б. Тульская ул., 52, ИБРАЭ РАН, Россия
[2] 677007 Якутск, ул. Кулаковского, 42,
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Россия
**e-mail: vabishchevich@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.
Переработанный вариант 27.02.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

При численном решении нестационарных задач используются многослойные (более двух слоев) аппроксимации по времени. Они легко строятся и относительно просто исследуются при использовании равномерных сеток. В то же самое время при численном исследовании прикладных проблем мы должны применять аппроксимации с переменным шагом по времени. Проблемы построения многослойных схем на неравномерных сетках связаны как с сохранением заданной точности, так и с необходимостью обеспечения устойчивости приближенного решения. В работе строятся трехслойные схемы для приближенного решения задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка в специальном случае, когда шаг сетки изменяется (увеличивается или уменьшается) в два раза. Основное внимание уделяется особенностям аппроксимации при переходе с одного шага сетки на другой. Исследование базируется на использовании общих результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем в конечномерном гильбертовом пространстве. Получены оценки устойчивости по начальным данным и правой части при изменении шага сетки по времени в два раза. Библ. 8. Фиг. 2.

Ключевые слова: эволюционное уравнение второго порядка, задача Коши, трехслойные разностные схемы, устойчивость по начальным данным и правой части.

DOI: 10.31857/S0044466923110285, **EDN:** CTTUWU

ВВЕДЕНИЕ

При приближенном решении нестационарных задач часто приходится использовать многослойные аппроксимации по времени, когда при переходе на новый слой по времени задействовано известное решение на двух и более предшествующих слоях по времени (см. [1]– [3]). В частности, трехслойные аппроксимации являются естественными при рассмотрении задачи Коши для эволюционных уравнений второго порядка. Учет локальных особенностей решения проводится за счет выбора шага по времени. При использовании многослойных аппроксимаций на неравномерных сетках имеются две основные проблемы. Первая из них связана с построением аппроксимаций по времени необходимой точности. Вторая проблема – обеспечение устойчивости приближенного решения при выбранных аппроксимациях.

При построении и исследовании разностных аппроксимаций по времени для прикладных проблем широко используются результаты теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем (см. [4]). Получены (см., например, [5, 6]) необходимые и достаточные условия устойчивости двух- и трехслойных схем на равномерных сетках по времени. Для двухслойных схем переход к неравномерным сеткам не является принципиальным. В случае трехслойных схем ситуация много сложнее, что можно проиллюстрировать на случае нечастой смены шага по времени. Например, при рассмотрении вопроса об устойчивости трехслойных разностных схем мы вынуждены отдельно рассматривать проблему при увеличении шага по времени и при его уменьшении. Типичный результат (см. [7, 8]) состоит в том, что при смене шага по времени

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-41-00037 (разд. 2), проект № 23-71-30013 (разд. 3)).

априорные оценки устойчивости загрубляются, при этом константа в априорной оценке увеличивается при смене шага пропорционально отношению шагов по времени.

В вычислительной практике наибольшее распространение получила стратегия изменения (увеличения или уменьшения) шага по времени в два раза. В этом случае мы можем использовать наиболее удобные и точные аппроксимации на равномерных сетках при специальной подготовке необходимых расчетных данных. В настоящей работе такие неравномерные сетки используются для построения и исследования трехслойных схем. Получены оценки безусловной устойчивости приближенного решения по начальным данным и правой части для схем с весами второго порядка аппроксимации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения второго порядка в вещественном конечномерном гильбертовом пространстве H. Функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$C\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

и начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0. \tag{1.2}$$

Линейные постоянные (не зависящие от t) операторы A, B, C являются самосопряженными и положительно-определенными:

$$A = A^* \ge \nu_A I, \quad \nu_A > 0, \quad B = B^* \ge \nu_B I, \quad \nu_B > 0, \quad C = C^* \ge \nu_C I, \quad \nu_C > 0, \tag{1.3}$$

где I – единичный оператор в H. Будем использовать обычные обозначения $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ для скалярного произведения и нормы в H. Для самосопряженного положительно-определенного оператора D определим гильбертово пространство H_D со скалярным произведением и нормой $(u,v)_D = (Du,v)$, $\|u\|_D = (u,v)_D^{1/2}$.

К подобным задачам мы приходим, в частности, при использовании метода конечных элементов или метода конечных объемов при аппроксимации по пространству при численном исследовании нестационарных краевых задач для уравнений с частными производными. В частности, уравнение (1.1) при $C = 0$ мы можем связать с параболическим уравнением, а при $B = 0$ – с гиперболическим уравнением.

Приведем простейшую априорную оценку для решения задачи (1.1)–(1.3), которая будет для нас ориентиром при исследовании аппроксимаций по времени. Домножая уравнение (1.1) скалярно в H на du/dt, мы получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{du}{dt}\right\|_C^2 + \|u\|_A^2\right) + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_B^2 = \left(f, \frac{du}{dt}\right).$$

Для правой части используется оценка

$$\left(f, \frac{du}{dt}\right) \le \left\|\frac{du}{dt}\right\|_B^2 + \frac{1}{4}\|f\|_{B^{-1}}^2.$$

С учетом этого лемма Гронуолла дает нам априорную оценку

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_C^2 + \|u(t)\|_A^2 \le \|v_0\|_C^2 + \|u_0\|_A^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|f(\theta)\|_{B^{-1}}^2 \, d\theta. \tag{1.4}$$

При приближенном решении задачи Коши (1.1), (1.2) естественно ориентироваться на безусловно устойчивые трехслойные разностные схемы. Наиболее просто работать с равномерными сетками по времени, когда шаг по времени $\tau = \text{const}$, и пусть $y^n = y(t_n)$, $t_n = n\tau$, $n = 0,1,\ldots$. Трехслойная разностная схема с весом $\sigma = \text{const} > 0$ имеет вид

$$C\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + B\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + Ay^{n+\sigma} = f^n, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{1.5}$$

$$y^0 = u^0, \quad y^1 = \tilde{u}^1, \tag{1.6}$$

при использовании обозначений

$$y^{n+\sigma} = \sigma y^{n+1} + (1-2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}.$$

С учетом начальных условий (1.2) положим

$$u^0 = u_0, \quad \tilde{u}^1 \approx u^1(\tau) \approx u_0 + \tau v_0.$$

Трехслойная схема (1.5), (1.6) имеет второй порядок аппроксимации по τ. Теория устойчивости операторно-разностных схем (см. [5, 6]) дает следующие условия безусловной устойчивости этой схемы: схема (1.5), (1.6) безусловно устойчива при $\sigma \ge 0.25$.

В вычислительной практике при моделировании нестационарных процессов мы должны ориентироваться на использование неравномерных сеток по времени. Для многослойных схем на неравномерных сетках есть проблемы как с потерей устойчивости, так и с понижением точности. Наша цель состоит в построении неоднородных аппроксимаций по времени для нестационарных задач (1.1)–(1.3), которые давали бы безусловные устойчивые схемы второго порядка точности по τ.

2. РАВНОМЕРНАЯ СЕТКА

Условия устойчивости схемы (1.5), (1.6) $\sigma \ge 0.25$ устанавливаются с привлечением результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем (см. [5, 6]). Соответствующая оценка устойчивости по начальным данным и правой части имеет вид

$$\begin{gathered}\left\|\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}\right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \left\|\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}\right\|_A^2 + \left\|\frac{y^{n+1}+y^n}{2}\right\|_A^2 \le \\ \le \left\|\frac{\tilde{u}^1-u^0}{\tau}\right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau^2 \left\|\frac{\tilde{u}^1-u^0}{\tau}\right\|_A^2 + \left\|\frac{\tilde{u}^1+u^0}{2}\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tau\left\|f^k\right\|_{B^{-1}}^2, \quad n = 1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Мы наложим более жесткие ограничения на σ, при которых мы можем получить оценку устойчивости в более простой норме.

Теорема 1. *Трехслойная разностная схема* (1.3), (1.5), (1.6) *является безусловно устойчивой для* $\sigma \ge 0.5$. *При этих ограничениях для приближенного решения задачи* (1.1), (1.2) *априорная оценка имеет вид*

$$\left\|\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}\right\|_D^2 + \frac{1}{2}\left\|y^{n+1}\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\left\|y^n\right\|_A^2 \le \left\|\frac{\tilde{u}^1-u^0}{\tau}\right\|_D^2 + \frac{1}{2}\left\|\tilde{u}^1\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\left\|u^0\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tau\left\|f^k\right\|_{B^{-1}}^2, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2.2}$$

где

$$D = C + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau^2 A.$$

Доказательство. С учетом равенства

$$\sigma y^{n+1} + (1-2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1} = \frac{1}{2}(y^{n+1}+y^{n-1}) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)(y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1})$$

запишем уравнение (1.5) в виде

$$D\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + B\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + \frac{1}{2}A(y^{n+1} + y^{n-1}) = f^n. \tag{2.3}$$

Обозначим $s^n = y^n - y^{n-1}$, тогда

$$y^{n+1} - y^{n-1} = s^{n+1} + s^n, \quad y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1} = s^{n+1} - s^n.$$

Уравнение (2.3) принимает форму

$$D\frac{s^{n+1} - s^n}{\tau^2} + B\frac{s^{n+1} + s^n}{2\tau} + \frac{1}{2}A(y^{n+1} + y^{n-1}) = f^n. \tag{2.4}$$

Домножим уравнение (2.4) на $s^{n+1} + s^n = y^{n+1} - y^{n-1}$, что дает

$$\frac{1}{\tau^2}(\|s^{n+1}\|_D^2 - \|s^n\|_D^2) + \frac{1}{2}\left(\|y^{n+1}\|_A^2 - \frac{1}{2}\|y^{n-1}\|_A^2\right) + \frac{1}{2\tau}\|s^{n+1} + s^n\|_B^2 = (f^n, s^{n+1} + s^n).$$

С учетом введенных обозначений и неравенства

$$(f^n, s^{n+1} + s^n) \le \frac{1}{2\tau}\|s^{n+1} + s^n\|_B^2 + \frac{\tau}{2}\|f^n\|_{B^{-1}}^2$$

получим оценку решения на слое

$$\left\|\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau}\right\|_D^2 + \frac{1}{2}\|y^{n+1}\|_A^2 + \frac{1}{2}\|y^n\|_A^2 \le \left\|\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau}\right\|_D^2 + \frac{1}{2}\|y^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\|y^{n-1}\|_A^2 + \frac{1}{2}\tau\|f^n\|_{B^{-1}}^2. \quad (2.5)$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла, мы получим доказываемую оценку (2.2). Теорема 1 доказана.

Априорную оценку (2.2) мы можем рассматривать как прямой дискретный аналог оценки (1.4) для решения задачи Коши (1.1)–(1.3). Недостаток оценки (2.1) перед оценкой (2.2) связан с тем, что устойчивость доказывается не для самого приближенного решения на отдельных слоях по времени, а только их линейной комбинации. Такое новое качество приближенного решения достигается за счет более жестких ограничений на вес σ: вместо $\sigma \ge 0.25$ мы имеем $\sigma \ge 0.5$.

3. НЕРАВНОМЕРНАЯ СЕТКА

Мы рассматриваем проблему построения аппроксимаций по времени для уравнения (1.1) на неравномерной сетке по времени. В общем случае положим

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, \quad t_{n+1/2} = t_n + 0.5\tau_{n+1}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad t_0 = 0.$$

С учетом априорной оценки (2.2) квадрат нормы приближенного решения будем оценивать величиной

$$S^n = \left\|\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau_n}\right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y^n - y^{n-1}\|_A^2 + \frac{1}{2}\|y^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\|y^{n-1}\|_A^2.$$

Остановимся на алгоритме приближенного решения задачи (1.1), (1.2) на сетке, для которой шаг изредка меняется в два раза. При специальной организации вычислений мы фактически используем аппроксимации на равномерной сетке по времени и поэтому сохраняем второй порядок точности. Ключевой момент исследования связан с доказательством устойчивости используемых разностных схем. Мы должны отдельно рассмотреть случай увеличения и случай уменьшения шага по времени в два раза.

Вариант увеличения шага сетки в два раза показан на фиг. 1. Начиная с момента времени $t = t_n$, шаг сетки удваивается; с учетом введенных обозначений имеем $\tau_{n+1} = 2\tau_n$. Переход на новую сетку по времени будем обеспечивать использованием приближенного решения во вспомогательном полуцелом узле $t_{n+1/2}$. Для решений $y^{n+1/2}$ и y^{n+1} используется сетка с шагом τ_n:

$$C\frac{y^{n+1/2} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau_n^2} + B\frac{y^{n+1/2} - y^{n-1}}{2\tau_n} + A(\sigma y^{n+1/2} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = f^n, \quad (3.1)$$

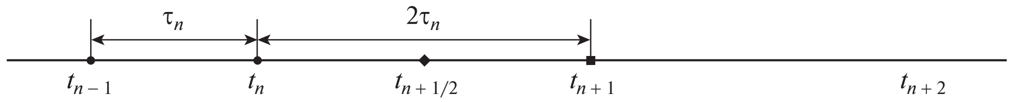
$$C\frac{y^{n+1} - 2y^{n+1/2} + y^n}{\tau_n^2} + B\frac{y^{n+1} - y^n}{2\tau_n} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^{n+1/2} + \sigma y^n) = \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n). \quad (3.2)$$

После этого для определения y^{n+2} используются аппроксимации на сетке с шагом τ_{n+1}:

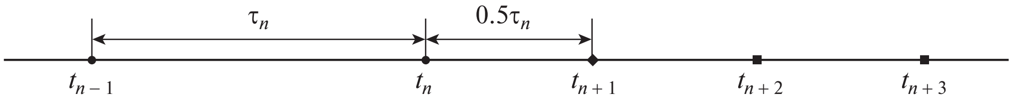
$$C\frac{y^{n+2} - 2y^{n+1} + y^n}{\tau_{n+1}^2} + B\frac{y^{n+2} - y^n}{2\tau_{n+1}} + A(\sigma y^{n+2} + (1 - 2\sigma)y^{n+1} + \sigma y^n) = f^{n+1}. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) аналогично (2.5) следует оценка

$$S^{n+2} \le S^{n+1} + \frac{1}{2}\tau_{n+1}\|f^{n+1}\|_{B^{-1}}^2. \quad (3.4)$$



Фиг. 1. Увеличение шага сетки в два раза.



Фиг. 2. Уменьшение шага сетки в два раза.

Для (3.1) и (3.2) получим

$$\tilde{S}^{n+1/2} \le S^n + \frac{1}{2}\tau_n \|f^n\|^2_{B^{-1}}, \tag{3.5}$$

$$\tilde{S}^{n+1} \le \tilde{S}^{n+1/2} + \frac{1}{8}\tau_n \|f^{n+1} + f^n\|^2_{B^{-1}}, \tag{3.6}$$

где

$$\tilde{S}^{n+1/2} = \left\|\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau_n}\right\|^2_C + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y^{n+1/2} - y^n\|^2_A + \frac{1}{2}\|y^{n+1/2}\|^2_A + \frac{1}{2}\|y^n\|^2_A,$$

$$\tilde{S}^{n+1} = \left\|\frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau_n}\right\|^2_C + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y^{n+1} - y^{n+1/2}\|^2_A + \frac{1}{2}\|y^{n+1}\|^2_A + \frac{1}{2}\|y^{n+1/2}\|^2_A.$$

Принимая во внимание

$$\|y^{n+1} - y^n\|^2_Q \le 2\|y^{n+1} - y^{n+1/2}\|^2_Q + 2\|y^{n+1/2} - y^n\|^2_Q, \quad Q = C, A,$$

получим

$$S^{n+1} \le q\left(\tilde{S}^{n+1/2} + \tilde{S}^{n+1}\right). \tag{3.7}$$

Здесь постоянная $q = 1$ при $\sigma = 0.5$ и $q = 2$ в общем случае при $\sigma > 0.5$. Из неравенств (3.5) и (3.6) следует

$$\tilde{S}^{n+1/2} + \tilde{S}^{n+1} \le 2S^n + \frac{5}{2}\tau_n \|f^n\|^2_{B^{-1}} + \frac{1}{8}\tau_{n+1}\|f^{n+1}\|^2_{B^{-1}}.$$

Принимая во внимание (3.7) ($q = 2$), мы получим

$$S^{n+1} \le 4\left(S^n + \frac{5}{8}\tau_n \|f^n\|^2_{B^{-1}} + \frac{1}{16}\tau_{n+1}\|f^{n+1}\|^2_{B^{-1}}\right).$$

С учетом (3.4) отсюда следует оценка решения после увеличения шага в два раза

$$S^{n+2} \le 4\left(S^n + \frac{1}{2}\frac{\tau_{n+1} + \tau_n}{2}\|f^n\|^2_{B^{-1}} + \frac{1}{2}\tau_{n+1}\|f^{n+1}\|^2_{B^{-1}}\right). \tag{3.8}$$

При уменьшении шага сетки в два раза (фиг. 2) используется следующая стратегия. Изменение сетки проводится после расчета y^n: $\tau_{n+1} = 0.5\tau_n$. Ее ключевая особенность связана с расчетом приближенного решения при $t = t_{n+1}$. Вспомогательное решение $\tilde{y}^{n+2}$ находится по трехслойной схеме

$$C\frac{\tilde{y}^{n+2} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau_n^2} + B\frac{\tilde{y}^{n+2} - y^{n-1}}{2\tau_n} + A(\sigma\tilde{y}^{n+2} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = f^n. \tag{3.9}$$

Решение y^{n+1} определяется линейной интерполяцией $\tilde{y}^{n+2}$ и y^n:

$$y^{n+1} = \frac{1}{2}(\tilde{y}^{n+2} + y^n). \tag{3.10}$$

Завершает переход на новую сетку с уменьшенным в два раза шагом расчет y^{n+2}:

$$C\frac{y^{n+2} - 2y^{n+1} + y^n}{\tau_{n+1}^2} + B\frac{y^{n+2} - y^n}{2\tau_{n+1}} + A(\sigma y^{n+2} + (1-2\sigma)y^{n+1} + \sigma y^n) = f^{n+1}. \tag{3.11}$$

Для (3.11) мы имеем обычную оценку устойчивости

$$S^{n+2} \le S^{n+1} + \frac{1}{2}\tau_{n+1}\|f^{n+1}\|^2_{B^{-1}}. \tag{3.12}$$

Из (3.9) получим

$$\tilde{S}^{n+2} \le S^n + \frac{1}{2}\tau_n\|f^n\|^2_{B^{-1}}, \tag{3.13}$$

где

$$\tilde{S}^{n+2} = \left\|\frac{\tilde{y}^{n+2} - y^n}{\tau_n}\right\|^2_C + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|\tilde{y}^{n+2} - y^n\|^2_A + \frac{1}{2}\|\tilde{y}^{n+2}\|^2_A + \frac{1}{2}\|y^n\|^2_A.$$

При выполнении (3.13) имеем

$$y^{n+1} - y^n = \frac{1}{2}(\tilde{y}^{n+2} - y^n),$$

$$\|y^{n+1}\|^2_A \le \|\tilde{y}^{n+1}\|^2_A + \|y^n\|^2_A.$$

Прямые вычисления приводят нас к оценке

$$S^{n+1} \le 2\tilde{S}^{n+2}.$$

С учетом (3.13) в дополнение к оценке (3.12) получим

$$S^{n+1} \le 2\left(S^n + \frac{1}{2}\tau_n\|f^n\|^2_{B^{-1}}\right). \tag{3.14}$$

Стандартная априорная оценка устойчивости (прямой аналог (1.4)) имеет вид

$$S^{n+1} \le S^n + \frac{1}{2}\frac{\tau_{n+1} + \tau_n}{2}\|f^n\|^2_{B^{-1}}.$$

С учетом (3.8), (3.14) имеем

$$S^{n+1} \le (M_- + M_+)\left(S^1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\tau_{k+1} + \tau_k}{2}\|f^k\|^2_{B^{-1}}\right), \tag{3.15}$$

где

$$S^1 = \left\|\frac{\tilde{u}^1 - u^0}{\tau_1}\right\|^2_C + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|\tilde{u}^1 - u^0\|^2_A + \frac{1}{2}\|\tilde{u}^1\|^2_A + \frac{1}{2}\|u^0\|^2_A.$$

Для постоянных M_- и M_+ имеем

$$M_- = 2^{m_-}, \quad M_+ = 4^{m_+},$$

где m_- – число уменьшений шага по времени в два раза, M_+ – число увеличений шага по времени в два раза.

Подводит итог нашего рассмотрения следующее основное утверждение.

Теорема 2. *Трехслойная разностная схема на неравномерной сетке с изменением шага по времени в два раза является безусловно устойчивой при* $\sigma \ge 0.5$. *Для приближенного решения задачи* (1.1), (1.2) *имеет место априорная оценка* (3.15).

Такой результат об устойчивости с более грубыми априорными оценками согласуется с ранее установленными в несколько других условиях фактами (см. [7, 8]). Наиболее существенный элемент связан с предложенной удобной организацией вычислений для специального случая изменением шага по времени в два раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations. II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer, 1996.
2. *LeVeque R.J.* Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia: SIAM, 2007.
3. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М.: ЛЕНАНД, 2021.
4. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekker, 2001.
5. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
6. *Samarskii A.A., Matus P.P., Vabishchevich P.N.* Difference Schemes with Operator Factors. Dordrecht: Kluwer, 2002.
7. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Макаревич Е.Л., Матус П.П.* Устойчивость трехслойных разностных схем на неравномерных по времени сетках // Докл. АН. 2001. Т. 376. № 6. С. 738–741.
8. *Matus P., Zyuzina E.* Three-level difference schemes on non-uniform in time grids // Comput. Meth. Appl. Math. 2001. V. 1. № 3. P. 265–284.