ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 11, с. 1859–1876

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ[1)]

© 2023 г. **В. Г. Звягин[1,*], В. П. Орлов[1,**]**

[1] *394018 Воронеж, Университетская площадь, 1, Воронежский гос. ун-т, Россия*

**e-mail: zvg_vsu@mail.ru*

***e-mail: orlov_vp@mail.ru*

Поступила в редакцию 14.01.2023 г.
Переработанный вариант 14.01.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

В настоящей работе устанавливается существование слабых решений начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траекторий негладкого поля скоростей и неоднородным граничным условием. Исследование предполагает аппроксимацию исходной задачи приближениями галеркинского типа с последующим предельным переходом на основе априорных оценок. Для исследования поведения траекторий негладкого поля скоростей используется теория регулярных лагранжевых потоков. Библ. 17.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, неоднородные условия, априорные оценки, слабое решение, регулярный лагранжев поток.

DOI: 10.31857/S0044466923110297, **EDN:** CTVFFN

1. ВВЕДЕНИЕ

В $Q_T = [0,T]\times\Omega$, где $\Omega \in R^N$, $N = 2, 3$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается движение вязкоупругой жидкости типа Олдройда (см. [1]), описываемое начально-краевой задачей

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \sum_{i=1}^{N}u_i(t,x)\partial u(t,x)/\partial x_i - \mu_0\Delta u(t,x) - \mu_1 \mathrm{Div}\int\limits_{\tau_u(t,x)}^{t}\exp((s-t)/\lambda)\mathscr{E}(u)(s,z(s;t,x))ds + \\ + \mathrm{grad}\,p(t,x) = f(t,x), \quad (t,x)\in Q_T; \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in Q_T; \quad \int\limits_{\Omega}p(t,x)dx = 0; \quad t\in[0,T]; \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = u^0(x), \quad x\in\Omega; \quad u(t,x) = \varphi(x), \quad t\in[0,T], \quad x\in\partial\Omega. \tag{1.3}$$

Здесь $u(t,x) = (u_1(t,x),\ldots,u_N(t,x))$ и $p(t,x)$ – векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t,x)$ – плотность внешних сил, $\mathscr{E}(u) = \{\mathscr{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^N$ – тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathscr{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$. Дивергенция $\mathrm{Div}\mathscr{E}(u)$ матрицы определяется как вектор с компонентами – дивергенциями строк, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \ge 0$, $\lambda > 0$ – константы, характеризующие вязкоупругие свойства жидкости, u^0 и φ – заданные начальное и граничное значения функции u. Вектор-функция $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int\limits_t^\tau u(s,z(s;t,x))ds, \quad \tau,t\in[0,T], \quad x\in\Omega. \tag{1.4}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 22-11-00103).

Функция $z(\tau;t,x)$ определяет траекторию движения частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$. Функция $\tau_u(t,x)$ определяется как $\tau_u(t,x) = \inf\{\tau : z(s;t,x) \in \Omega, s \in [\tau,t]\}$ и означает момент времени, начиная с которого частица жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$, начинает свое движение к x по Ω.

При $\tau_u(t,x) = 0$ движение данной частицы начинается с нулевого момента времени. Если $\tau_u(t,x) > 0$, то в этот момент времени частица занимает положение $z(\tau_u(t,x);t,x) \in \partial\Omega$, и $\tau_u(t,x)$ означает момент вхождения данной частицы в Ω через $\partial\Omega$.

В случае однородного граничного условия ($\varphi = 0$) поле скоростей $u(t,x)$ равно нулю на границе $\partial\Omega$, решение $z(\tau_u(t,x);t,x)$ задачи Коши (1.4) определено при всех $\tau \in [0,T]$, и, следовательно, $\tau_u(t,x) = 0$ в (1.1). В этом случае для различных моделей вязкоупругих сред нелокальные теоремы существования и единственности слабых и сильных решений для систем вида (1.1)–(1.4) устанавливались в [2–8].

В случае неоднородного условия на $u(t,x)$ на границе $\partial\Omega$, промежуток $\tau_u(t,x) \le \tau \le t$, на котором существует решение задачи Коши (1.4), может начинаться в момент $\tau_u(t,x) > 0$, что и определяет появление $\tau_u(t,x) > 0$ в пределе интегрирования в (1.1).

Заметим, что наличие интеграла в (1.1) означает (см. [9, гл. 7]) наличие памяти среды вдоль траекторий поля скоростей. В большинстве работ по разрешимости начально-краевых задач гидродинамики, в уравнение движения которых не входят интегродифференциальные слагаемые, неоднородный случай сводится к однородному сдвигом скорости (см., например, [10, 11, с. 118]). При этом неоднородная задача становится нетривиальной в случае многосвязной границы области Ω и ненулевых потоках на частях границы (о результатах в этом направлении см., например, обзор [12]). Но в случае задачи с памятью вдоль траекторий уже в случае односвязной границы появляются существенные дополнительные трудности, связанные с поведением траекторий поля скоростей в окрестности границы. В этой связи заметим, что с формальной точки зрения трудности связаны с наличием в (1.1) интеграла с переменным нижним пределом $\tau_u(t,x)$. Это сильно усложняет задачу, поскольку сказывается на дифференциальных свойствах выражения под знаком Div в (1.1).

Еще одним важным обстоятельством является следующее. При исследовании слабой разрешимости поле скоростей $u \in L_1(0,T;W_2^1(\Omega)^N)$, и не существует, вообще говоря, классического решения задачи Коши (1.4). Поэтому для разрешимости задачи Коши (1.4) приходится привлекать теорию регулярных лагранжевых потоков (РЛП) (см. разд. 6), обобщающих понятие классического решения.

В настоящей работе мы устанавливаем слабую разрешимость задачи (1.1)–(1.4). Мы предполагаем границу области и граничную функцию достаточно гладкими, чтобы избежать излишних вычислительных сложностей в доказательствах, хотя основные результаты справедливы и при более слабых ограничениях.

Далее структура работы следующая. Обозначения и вспомогательные результаты приводятся в разд. 2. В разд. 3 формулируется основной результат. В разд. 4 исследуются приближения галеркского типа для основной задачи. Доказательство основного результата проводится в разд. 5. В разд. 6 приводятся факты из теории регулярных лагранжевых потоков.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Функциональные пространства

Нам понадобятся гильбертовы пространства V и H (см. [13, разд. III.1.4]) соленоидальных функций. Символом $C_0^\infty(\Omega)^N$ обозначается множество бесконечно дифференцируемых отображений Ω в R^N, $N = 2,3$, с компактным носителем в Ω. Пусть $\mathcal{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^N, \operatorname{div} v = 0\}$. Обозначим через H и V замыкание $\mathcal{V}$ в нормах пространств $L_2(\Omega)^N$ и $W_2^1(\Omega)^N$ соответственно. Через V^{-1} обозначим пространство, сопряженное к V.

Обозначим через $\langle f, v\rangle$ действие функционала f из пространства V^{-1} на функцию v из V. Отождествление гильбертова пространства H с его сопряженным V^{-1} и теорема Рисса приводят к непрерывным вложениям $V \subset H = H^{-1} \subset V^{-1}$. При этом для $u \in V$ и $w \in V^{-1}$ справедливо соотношение $\langle u, w\rangle = (u, w)$ со скалярным произведением в H.

Через $W_2^k(\partial\Omega)$ обозначаются пространства Соболева на границе $\partial\Omega$ (см. [14, стр. 82]). Нормы в пространствах H и $L_2(\Omega)^N$ будем обозначать $|\cdot|_0$, в V как $|\cdot|_1$. Нормы в пространствах V^{-1}, $W_2^{-1}(\Omega)^N$ и $W_2^{-1}(\Omega)^{N\times N}$ будем обозначать $|\cdot|_{-1}$. Нормы в $L_2(0,T;H)$ и $L_2(0,T;L_2(\Omega)^N)$, обозначаются $\|\cdot\|_0$, нормы в $L_2(0,T;V)$ и $L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^N)$ как $\|\cdot\|_{0,1}$, а норма в пространстве $L_2(0,T;V^{-1})$ как $\|\cdot\|_{0,-1}$.

Через $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$, H, $L_2(\Omega)^N$, $L_2(\Omega)^{N\times N}$, в каких именно – ясно из контекста.

2.2. Граничная функция

Нам будет удобно считать, что область Ω содержится в ограниченной области Ω_0 с гладкой границей $\partial\Omega_0$, так что $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$. Будем предполагать, что граница Ω задается уравнением $\Phi(x) = 0$, где гладкая функция $\Phi(x) : \Omega_0 \to R^1$ такова, что $\Phi(x) < 0$ при $x \in \Omega$ и $\Phi(x) > 0$ при $x \in \Omega_0 \backslash \overline{\Omega}$.

Вследствие уравнения неразрывности (1.2) функция φ должна удовлетворять условию

$$\text{а)} \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\cdot n(x)dx = 0, \quad \varphi(x)\cdot n(x) = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x)n_i(x).$$

Здесь $n(x) = (n_1(x),\cdots,n_N(x))$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$.

Так как поведение решений задачи Коши (1.4) в окрестности $\partial\Omega$ тесно связано с граничной функцией $\varphi(x)$, с целью упростить технические моменты доказательств, мы наложим на $\varphi(x)$ некоторые дополнительные условия:

б) граничная функция $\varphi(x)$ является следом на $\partial\Omega$ непрерывно дифференцируемой на Ω_0 соленоидальной функции $a(x)$, равной нулю на $\partial\Omega_0$. Таких функций $a(x)$ существует бесконечно много (см. [10]).

в) в точках $\Gamma_0 = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x)\cdot n(x) = 0\}$ траектории $z_a(s;t,x)$ поля скоростей $a(x)$ (решения задачи Коши $z_a(s;t,x) = x + \int_t^s a(z_a(s;t,x))ds$, $s,t \in [0,T], x \in \Omega_0$), начинающиеся в точках $x \in \Gamma_0$, при $s > t$, близких к t, не принадлежат Ω.

Если определяемое функцией $\varphi(x)$ множество Γ_0 устроено достаточно просто, то такую функцию $a(x)$ можно построить, используя соображения [10, 13], с. 366. Например, если Ω выпукла и $\Gamma_- = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x)\cdot n(x) < 0\}$ и $\Gamma_+ = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x)\cdot n(x) > 0\}$ разделены множеством Γ_0, которое состоит из конечного множества непересекающихся гладких линий $\gamma_k \in \partial\Omega$ при $N = 3$, или Γ_0 является конечным набором точек при $N = 2$.

Заметим, что двигаясь в $\Omega_0 \backslash \overline{\Omega}$ по траектории поля скоростей $a(x)$, в точках множества Γ_0 частицы жидкости касаются границы $\partial\Omega$, не входят в Ω, в то время как в точках множества Γ_- входят в Ω, т.е. жидкость втекает в Ω, а в точках множества Γ_+ выходят из Ω, т.е. жидкость вытекает из Ω.

Заметим, что можно было бы с самого начала предполагать гладкость $\varphi(x)$ и считать, что Γ_0 разделяет Γ_- и Γ_+ и состоит из конечного множества непересекающихся гладких линий $\gamma_k \in \partial\Omega$ при $N = 3$, или Γ_0 является конечным набором точек при $N = 2$, а затем строить продолжение $a(x)$ в Ω и $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$ гладким образом, что в контексте статьи не является принципиальным.

2.3. Задача Коши

В случае $u \in L_2(0,T : W^1(\Omega)^N)$, вообще говоря, не существует классического решения задачи Коши (1.4), и ее разрешимость будем понимать в следующем смысле. Положим $u(t, x) = v(t,x) + a(x)$, $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$. Очевидно, что $v \in L_2(0,T;V)$. Продолжив функцию v нулем из Ω в Ω_0 и обозначив продолжение через v^*, имеем $u^* = v^* + a$. Тогда очевидно, что $u^* = u$ в Ω, $u = a$ в $\Omega_0\backslash\Omega$ и $u^* \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega_0)^N)$. Наряду с задачей (1.4) рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau (v^* + a)(s, z(s;t,x))ds, \quad \tau,t \in [0,T], \quad x \in \Omega_0. \tag{2.1}$$

Так как $v^* + a \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega_0)^N)$, то существует единственный РЛП, порожденный функцией $u^* = v^* + a$ (см. [15, 16] и разд. 6 данной статьи). В частности, это означает, что задача Коши (2.1) имеет абсолютно непрерывное по τ решение $z(\tau;t,x)$ при п.в. $x \in \Omega_0$. Обозначим через Z оператор, ставящий в соответствие функции v порожденный функцией $u^* = v^* + a$ РЛП, так что $Z(v) = z$. Ниже, говоря о решении $z(\tau;t,x)$ задачи Коши (1.4), мы будем иметь в виду $z(\tau;t,x) = Z(v)(\tau;t,x)$ при п.в. $x \in \Omega$ (сужение $Z(v)$ на Ω).

При $x \in \Omega$ точка $z(\tau;t,x) \in \overline{\Omega}$ только если $\tau \in [\tau_u(t,x),t]$. При этом функция $z(\tau;t,x)$ удовлетворяет уравнению (1.4) при $\tau \in [\tau_u(t,x),t]$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата нам будет удобно переписать задачу (1.1)–(1.4) в другом виде. Пусть $v = u - a$, где a отмеченная в разделе 2.2 функция. Полагая $u = v + a$, перепишем задачу (1.1)–(1.4) в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + \sum_{i=1}^N v_i(t,x)\partial v(t,x)/\partial x_i - \mu_0\Delta v(t,x) + \operatorname{grad} p(t,x) = \\ = f(t,x) - \sum_{i=1}^N v_i(t,x)\partial a(t,x)/\partial x_i - \sum_{i=1}^N a_i(t,x)\partial v(t,x)/\partial x_i + \mu_0\Delta a(x) \\ \mu_1 \mathrm{Div} \int_{\tau(t,x)}^t \exp((s-t)/\lambda)\mathscr{E}(v+a)(s, Z(v)(s;t,x))ds \quad (t,x) \in Q_T;\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \quad \int_\Omega p(t,x)dx = 0; \quad t \in [0,T]; \tag{3.2}$$

$$v(0,x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in S_T = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in \partial\Omega\}. \tag{3.3}$$

Здесь $\tau(t,x) = \inf\{\tau : z(s;t,x) \in \Omega, s \in [\tau,t]\}$, $v^0 = u^0 - a$.

Нас будет интересовать разрешимость в слабом смысле задачи (3.1)–(3.3). Введем пространство

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0,T;V),\ v' \in L_1(0,T;V^{-1})\}.$$

Здесь v' означает производную по t функции $v(t,\cdot)$ как функции со значениями в V^{-1}. Пусть $b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_i v_j \partial w_j/\partial x_i dx$, где $u,v,w \in V$.

Определение 3.1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$. *Слабым решением задачи* (3.1)–(3.3) *называется функция* $v \in W_1$, *удовлетворяющая условию* (3.3) *и тождеству*

$$\begin{aligned} d(v,\phi)/dt - \sum_{i=1}^{N}(v_i v, \partial\phi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\phi)) + \\ + \mu_1\left(\int_{\tau(t,x)}^{t}\exp((s-t)/\lambda)\mathcal{E}(v+a)(\tau,Z(v)(\tau;t,x))d\tau,\mathcal{E}(\phi)\right) = \\ = \langle f,\phi\rangle + b(v,a,\phi) + b(a,v,\phi) + b(a,a,\phi) - \mu_0(\mathcal{E}(a),\mathcal{E}(\phi)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

при любой $\phi \in V$ и п.в. $t \in [0,T]$.

Замечание. В силу вложения $W_1(0,T) \subset C_{weak}([0,T],H)$ (см. [13, лемма III.1.4]) начальное условие (3.3) имеет смысл.

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть для* φ *выполняются условия* а)–в) *п.* 2.2. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$. *Тогда существует слабое решение задачи* (3.1)–(3.3).

4. ГАЛЕРКИНСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ (3.1)–(3.3)

4.1. Построение галеркинских приближений

Обозначим через A действующий в H оператор с областью определения $D(A) = W_2^2(\Omega)^N \cap \overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega)^N \cap H$, определенный дифференциальным выражением $Av = -\mathcal{P}\mathrm{Div}\mathcal{E}(v)$. Здесь $\mathcal{P}$ – оператор ортогонального проектирования в $L_2(\Omega)$ на подпространство H. Оператор A является положительно определенным самосопряженным оператором (см. [11], разд. 2.4). Ортонормированная система собственных векторов $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots e_{iN})$, $i = 1,2,\dots$ образует базис в H.

Зафиксируем натуральное число n. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ оператор ортогонального проектирования в H на подпространство H_n, порожденное элементами $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пользуясь плотностью множества гладких функций в $L_2(0,T;V^{-1})$, аппроксимируем $f(t,x)$ последовательностью гладких по t и x функций $f^n(t,x)$, так что $\lim_{n\to+\infty}\|f(t,x) - f^n(t,x)\|_{0,-1} = 0$.

Будем искать галеркинские приближения v^n в виде

$$v^n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)e_k(x) \tag{4.1}$$

как решение тождества

$$\begin{aligned} d(v^n,\phi)/dt - \sum_{i=1}^{3}(v_i^n v^n, \partial\phi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v^n),\mathcal{E}(\phi)) + \\ + \mu_1\left(\int_{\tau^n(t,x)}^{t}\exp((s-t)/\lambda)\mathcal{E}(v^n+a)(\tau,z^n(\tau;t,x))d\tau,\mathcal{E}(\phi)\right) = \\ = \langle f^n,\phi\rangle + b(v^n,a,\phi) + b(a,v^n,\phi) + b(a,a,\phi) - \mu_0(\mathcal{E}(a),\mathcal{E}(\phi)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

при любой $\phi \in H_n$ и п.в. $t \in [0,T]$, $v^n(0,x) = \sum_{k=1}^{n} v_k^0 e_k(x)$, $v_k^0 = \sum_{k=1}^{n}(v^0(x), e_k(x))$.

Здесь z^n – решение задачи Коши

$$z^n(\tau;t,x) = x + \int_t^{\tau}(v^n + a)(s, z^n(s;t,x))ds, \quad \tau,t \in [0,T], \quad x \in \overline{\Omega}_0, \tag{4.3}$$

а $\tau^n(t,x) = \inf\{\tau : z^n(s;t,x) \in \Omega, s \in [\tau,t]\}$. При этом мы считаем, что функции $e_k(x)$ продолжены нулем из Ω в Ω_0, так что и функции $v^n(t,x)$ считаем равными нулю в $\Omega_0 \setminus \Omega$.

Сведем задачу нахождения функции $v^n(t,x)$ к задаче нахождения функций $g_i(t)$.

Полагая в (4.2) $\varphi = e_i$ и опуская непринципиальный в вычислениях множитель $\exp((s-t)/\lambda)$, получим соответствующую интегродифференциальную систему

$$g_i'(t) + D_i(g) + \sum_{k=1}^n d_{ki} g_k(t) + \mu_0 \lambda_i g_i(t) = w_{g,i}(t),$$

$$w_{g,i}(t) = f_i^n(t) - k_i + \mu_1 \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \sum_{k=1}^n g_k(s) \mathcal{E}(e_k(x))(z^n(s;t,x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x) \right) + \tag{4.4}$$

$$+ \mu_1 \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \sum_{k=1}^n g_k(s) \mathcal{E}(a)(z^n(s;t,x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x) \right), \quad g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \le i \le n.$$

$$z^n(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau (v^n + a)(s, z^n(s;t,x)) ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega_0, \tag{4.5}$$

где

$$\tau^n(t,x) = \inf\{\tau : z^n(s;t,x) \in \Omega, s \in [\tau,t]\}.$$

Здесь $f_i^n(t) = (f^n, e_i)$, $\sum_{k,r=1}^n d_{kri} g_k(t) g_r(t) \equiv D_i(g)$, $d_{kri} = -\sum_{j=1}^N (e_{kj} e_r, \partial e_i/\partial x_j)$, d_{ki} и k_i – некоторые числа.

Выясним свойства решений систем (4.4) и (4.5).

Рассмотрим сначала задачу Коши (4.5). Если бы мы рассматривали задачу Коши (4.5) при $(t,x) \in Q_T = [0,T] \times \Omega$, то из-за ненулевого условия для поля скоростей $v^n + a$ на границе Ω решения задачи (4.5) могли бы быть определены не на всем промежутке $[0, T]$, а лишь на промежутке существования полного решения задачи Коши (см. [17]).

Рассматривая задачу Коши при $(t,x) \in Q = [0,T] \times \Omega_0$, мы продолжим нулем функции $e_k(x)$ на Ω_0, сохраняя для продолжения прежнее обозначение. Пусть $Q_0 = Q_+ \cup Q_-$, где $Q_+ = [0,T] \times \Omega$, $Q_- = [0,T] \times (\Omega_0 \backslash \Omega)$. Из (4.1) следует, что поле скоростей $v^n + a$ непрерывно на $Q = [0,T] \times \Omega_0$ и непрерывно дифференцируемо на $\overline{Q}_+$ и $\overline{Q}_-$. Ясно, что поле скоростей $v^n + a$ удовлетворяет условию Липшица на Q и равно нулю на границе $\partial\Omega_0$ (но не на границе $\partial\Omega$). Тогда решения $z^n(\tau;t,x)$ задачи Коши (4.5) существуют и определены для всех $\tau \in [0,T]$, непрерывно дифференцируемы по $\tau \in [0,T]$ и по начальным данным $(t,x) \in Q_+$ и $(t,x) \in Q_-$.

Пусть $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$. Введем оператор Z, ставящий в соответствие функции $g(t)$ решение $z(\tau;t,x)$ задачи Коши (4.5), так что $Z(g) = z(\tau;t,x)$.

Здесь и ниже мы опускаем верхний индекс n у функций z^n, g^n, v^n, τ^n для удобства.

Пусть $G_0 = [0,T] \times [0,T] \times \Omega_0$, $G_+ = [0,T] \times [0,T] \times \Omega$, $G_- = [0,T] \times [0,T] \times (\Omega_0 \backslash \Omega)$. Справедлива

Лемма 4.1. *Оператор* $Z : C[0,T]^n \to C(G_0)^N$ *непрерывен. Кроме того,* $Z : C[0,T]^n \to C^1(\overline{G}_+)^N$, $Z : C[0,T]^n \to C^1(\overline{G}_-)^N$ *ограничен.*

Доказательство. Пусть $S(R) = \{g(t) : \|g\|_{C(0,T)^n} \le R\}$. Пусть g^1, $g^2 \in S(R)$, а $z^1(\tau;t,x)$, $z^2(\tau;t,x)$ – решения соответствующих задачи Коши (4.5). Пользуясь (4.5) и гладкостью e_k и a, стандартным образом устанавливается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любых g^1, $g^2 \in S(R)$, таких, что $\|g^1 - g^2\|_{C(0,T)^n} \le \delta$ справедливо неравенство $\|z^1(\tau;t,x) - z^2(\tau;t,x)\|_{C(G_0)^N} \le \varepsilon$.

Второе утверждение леммы следует из непрерывной зависимости и дифференцируемости решения $z(\tau;t,x)$ задачи Коши (4.5) по начальным данным t, x и гладкости e_k и a и стандартным образом устанавливаемого неравенства $\|Z(g)\|_{C(G_0)^N} \le M(R)$ для всех $g \in S(R)$.

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Оператор* $Z : C[0,T]^n \to C(G_0)^N$ *равномерно непрерывен на* $S(R)$.

Доказательство. Пусть $g^i(t) = (g_1^i(t), g_2^i(t), \ldots, g_n^i(t)) \in S(R)$, $i = 1, 2$, и пусть $z^i(\tau; t, x)$ являются решениями задач Коши

$$z^i(\tau;t,x) = x + \sum_{k=1}^{n}\int_t^{\tau} g_k(s)e_k(z^i(s;t,x))ds + \int_t^{\tau} a(s, z^i(s;t,x))ds,$$
$$\tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega_0, \quad i = 1,2. \tag{4.6}$$

Пусть $r > 0$ и $\bar{y}(t) = \exp(rt)y(t)$ для произвольной $y(t)$. Из (4.6) следует, что

$$\bar{z}^2(\tau;t,x) - \bar{z}^1(\tau;t,x) = \sum_{k=1}^{n}\int_t^{\tau} \exp(r(\tau - s))(\bar{g}_k^2(s) - \bar{g}_k^1(s))e_k(z^2(s;t,x))ds +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\int_t^{\tau} g_k^2(s)\exp(k\tau)(e_k(z^2(s;t,x)) - e_k(z^1(s;t,x))ds + \int_t^{\tau} \exp(r\tau)(a(s, z^2(s;t,x))ds - \tag{4.7}$$
$$- a(s, z^1(s;t,x)))ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega_0, \quad i = 1,2.$$

Из (4.7) и гладкости $e_k(x)$ и $a(x)$ вытекает, что

$$|\bar{z}^2(\tau;t,x) - \bar{z}^1(\tau;t,x)| \le M_1\int_{\tau}^{t} \exp(r(\tau - s))\|\bar{g}^2(s) - \bar{g}^1(s))\|_{C[0,T]^n}ds +$$
$$+ M_2\int_{\tau}^{t} \exp(r(\tau - s))|\bar{z}^2(s;t,x) - \bar{z}^1(s;t,x)|ds \le M_1\int_{\tau}^{t} \exp(r(\tau - s))ds\|\bar{g}_k^2(s) - \bar{g}_k^1(s)\|_{C[0,T]^n} + \tag{4.8}$$
$$+ M_2\int_{\tau}^{t} \exp(r(\tau - s))\ |ds \max_{\tau \le s \le t}|\bar{z}^2(s;t,x) - \bar{z}^1(s;t,x)|, \quad \tau \le t.$$

Из (4.8) следует, что

$$\max_{\tau \le s \le t}|\bar{z}^2(s;t,x) - \bar{z}^1(s;t,x)| \le M_3\|\bar{g}^2(t) - \bar{g}^1(t)\|_{C[0,T]^n} + M_4 r^{-1}\max_{\tau \le s \le t}|\bar{z}^2(s;t,x) - \bar{z}^1(s;t,x)|, \quad \tau \le t.$$

Выбирая $r > 0$ достаточно большим, получаем отсюда неравенство

$$\max_{\tau \le s \le t}|\bar{z}^2(s;t,x) - \bar{z}^1(s;t,x)| \le M_5\|\bar{g}^2(t) - \bar{g}^1(t)\|_{C[0,T]^n}, \quad \tau \le t.$$

Из ограниченности $\exp(kt)$ на $[0,T]$ сверху и снизу следует, что

$$\max_{\tau \le s \le t}|z^2(s;t,x) - z^1(s;t,x)| \le M_6\|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0,T]^n}, \quad \tau \le t. \tag{4.9}$$

Неравенство

$$\max_{\tau \le s \le t}|z^2(s;t,x) - z^1(s;t,x)| \le M_7\|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0,T]^n}, \quad \tau \ge t, \tag{4.10}$$

легко получается с помощью леммы Гронуолла.

Из неравенств (4.9)–(4.10) вытекает, что

$$\max_{0 \le s \le T,\ (t,x) \in Q_T}|z^2(s;t,x) - z^1(s;t,x)| \le M_8\|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0,T]^n}ds. \tag{4.11}$$

Отсюда следует утверждение леммы 4.2.

Лемма 4.2 доказана.

Пусть $z(\tau; t, x)$ является решением задачи Коши (4.5). Рассмотрим на Q_T функцию $\tau(t, x) = \inf\{s : z(\tau;t,x) \in \Omega, 0 \le s \le \tau \le t\}$. Имеет место

Лемма 4.3. *Справедливо соотношение* $\tau(t,x) \in C(Q_T)$.

Доказательство. Зафиксируем $(t,x) \in Q_T$. Пусть $\tau(t,x) = 0$ и $z(0;t,x) \in \Omega$. Тогда непрерывность $\tau(t,x)$ в точке (t, x) является следствием непрерывности по начальным данным решения задачи Коши (4.5).

Пусть $\tau(t,x) > 0$. Тогда $z(\tau(t,x);t,x) \in \partial\Omega$. Обозначим $\tau_* = \tau(t,x)$, $z_* = z(\tau_*;t,x)$. Тогда $z_* \in \partial\Omega$, $\Phi(z_*) = 0$, $\Phi(z(\tau;t,x)) < 0$ при $\tau \in (\tau_*, t]$. Из условия б) раздела 2.2 вытекает, что $z_* \not\in Z_0$, так как в противном случае траектория $z(\tau;t,x)$ при $\tau \ge \tau_*$ должна входить в Ω из $\Omega_0\backslash\Omega$ и в то же время должна при τ_* по касательной уходить в $\Omega_0\backslash\overline{\Omega}$, что невозможно в силу единственности решения задачи Коши. Таким образом, $z_* \in Z_-$.

Из непрерывности функции $z(\tau;t,x)$ и условия б) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau_1 \in (\tau_* - \varepsilon, \tau_*)$, что $\Phi(z(t_1;t,x) > 0$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_*]$. Из непрерывности же функции $z(\tau;t,x)$ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех, $S_\delta = \{(t',x') : |t-t'| \le \delta, |x-x'| \le \delta\}$ выполнялось неравенство $\Phi(z(t_1;t',x')) > 0$ и $|z(\tau_1;t',x') - z(\tau_1;t,x)| < d/2$, где $d = \operatorname{dist}(z(\tau_1;t,x), \partial\Omega)$.

В случае $\tau(t',x') \in [\tau_1, \tau_*]$ имеем $\tau(t,x) - \tau(t',x') \le \varepsilon$. Покажем, что если $\tau(t',x') > \tau_*$, то $\tau(t',x') - \tau(t,x) \le \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$. Допустим, что это не так. Тогда найдется последовательность (t^n, x^n), сходящаяся к (t,x) при $n \to +\infty$, такая что $\tau(t^n,x^n) \ge \tau_* + \varepsilon$ и $\Phi(z(\tau(t^n,x^n);t^n,x^n)) = 0$. Выберем из последовательности (t^n,x^n) подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\overline{\tau} \ge \tau_* + \varepsilon$ (пусть это будет сама последовательность (t^n,x^n)).

Пользуясь непрерывностью функций Φ и z и переходя к пределу в соотношении $\Phi(z(\tau(t^n,x^n);t^n,x^n)) = 0$, получаем $\Phi(z(\overline{\tau};t,x)) = 0$. Но это означает, что $z(\overline{\tau};t,x) \in \partial\Omega$ при $\overline{\tau} > \tau_*$, чего быть не может.

Таким образом, если $\tau(t',x') > \tau_*$, то $\tau(t',x') - \tau(t,x) \le \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$.

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $(t',x') \in S_\delta$ выполняется неравенство $|\tau(t',x') - \tau(t,x)| < \varepsilon$.

Случай $\tau(t,x) = 0$ и $z(\tau(t,x);t,x) \in \partial\Omega$ рассматривается аналогично предыдущему случаю с некоторыми упрощениями. Непрерывность функции $\tau(t,x)$ установлена.

Лемма 4.3 доказана.

Поставим в соответствие функции $g(t)$, определяющей задачу Коши (4.5), функцию $\tau_g(t,x)$, тем самым определяя оператор $\mathcal{T}(g) = \tau_g(t,x)$.

Пусть $S_g(R) = \{g : \|g\|_{C(0,T)^n} \le R\}$, $R > 0$ – произвольное число.

Лемма 4.4. *Оператор* $\mathcal{T} : C[0,T]^n \to C(Q_T)$ *непрерывен на* $S_g(R)$.

Доказательство. Рассмотрим фиксированную $g^*(t) \in S_g(R)$ и соответствующие ей $z^*(\tau;t,x)$ и $\tau^*(t,x)$. Пусть последовательность $g^k(t) \in S_g(R)$ такова, что $\lim_{\to+\infty}\|g^k - g^n\|_{C(0,T)^n} = 0$. Пусть $g^n(t)$ соответствуют функции $z^k(\tau;t,x)$ и $\tau^k(t,x)$. Покажем, что $\lim_{k\to+\infty}\|\tau^k(t,x) - \tau^*(t,x)\|_{C(Q_T)} = 0$. Предположим, что это не так. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ существует подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение), для которой выполняется $\|\tau^k(t,x) - \tau^*(t,x)\|_{C(Q_T)} \ge \varepsilon$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение) такая, что при некотором $(t,x) \in Q_T$ выполняется $|\tau^k(t,x) - \tau^*(t,x)| \ge \varepsilon$.

Рассмотрим сначала случай $\tau^*(t,x) > 0$. Заметим, что тогда $z^*(\tau^*;t,x) \in \partial\Omega$ и $\Phi(z^*(\tau^*;t,x)) = 0$. Предположим, что на некоторой подпоследовательности имеем $\tau^k(t,x) - \tau^*(t,x) \ge 0$ (случай $\tau^k(t,x) - \tau^*(t,x) \le 0$ рассматривается аналогично). Тогда можно считать, что $\tau^k(t,x) \to \overline{\tau}(t,x) \ge \tau^*(\mathrm{t},x) + \varepsilon_0$. Так как $z^k(\tau^k(t,x);t,x) \in \partial\Omega$ и $\Phi(z^k(\tau^k;t,x)) = 0$. Из последнего соотношения в силу непрерывности $\Phi(t,x)) = 0$ и сходимостей $z^k(\tau;t,x) \to z^*(\tau;t,x)$ и $\tau^k(t,x) \to \overline{\tau}(t,x)$ вытекает, что $\Phi(z^*(\overline{\tau};t,x) = 0$ при $\overline{\tau}(t,x) > \tau^*(t,x)$, что невозможно.

Случай $\tau^*(t,x) = 0$ рассматривается аналогично.

Непрерывность оператора $\mathcal{T}$ установлена.

Лемма 4.4 доказана.

Рассмотрим теперь соответствующую первому уравнению системы (4.4) задачу

$$g_i'(t) + D_i(g) + \sum_{k=1}^{n} d_{ki} g_k(t) + \mu_0 \lambda_i g_i(t) = w_i(t), \quad g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \le i \le n. \tag{4.12}$$

Здесь $g = (g_1, \cdots, g_n)$, $w = (w_1, \cdots, w_n)$.

Лемма 4.5. *Пусть* $w(t) \in C(0,T)^n$. *Тогда система* (4.12) *однозначно разрешима и справедлива оценка*

$$\|g(t)\|_{C(0,T)^n} \le M(\|w(t)\|_{C(0,T)^n} + |v^0|_0). \tag{4.13}$$

Доказательство. Однозначная разрешимость системы (4.12) вытекает из общих свойств решения задачи Коши для систем ОДУ с гладкими данными (см., например, [17]). В [13, разд. III.3.2], для соответствующей решению системы (4.12) функции $v^n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) e_k(x)$ установлена оценка

$$\sup_{0 \le t \le T} |v^n(t)|_0 + \|v^n\|_{0,1} \le M_0(\|\tilde{w}\|_{0,-1} + |v^0|_0), \tag{4.14}$$

где $\tilde{w}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t) e_k(x)$. Так как $\|\tilde{w}\|_{0,-1} \le \|w(t)\|_{L_2(0,T)^n} \le \|w(t)\|_{C(0,T)^n}$, а $|v^n(t)|_0^2 = \|g(t)\|_{L_2(0,T)^n}^2$, то из (4.14) вытекает неравенство (4.13).

Лемма 4.5 доказана.

Введем оператор G, ставящий в соответствие функции $w(t)$ решение $h(t)$ системы (4.12), так что $G(w) = g(t)$.

Пусть $S_w(R) = \{w : \|w\|_{C(0,T)^n} \le R\}$. Справедлива

Лемма 4.6. *Оператор* $G : C[0,T]^n \to C[0,T]^n$ *непрерывен на* $S_w(R)$.

Утверждение леммы вытекает из общих свойств решения задачи Коши для систем ОДУ с гладкими данными (см., например, [17]).

Введем множество $\mathcal{B}(R) = \{g : g = G(w),\ w \in S_w(R)\}$.

Лемма 4.7. *Множество* $\mathcal{B}(R)$ *компактно в* $C(0,T)^n$.

Доказательство. Равномерная ограниченность $\mathcal{B}(R)$ в $C(0,T)^n$ следует из леммы 4.6.

Из (4.12) и леммы 4.6 вытекает неравенство $\|g'(t)\|_{C(0,T)}^n \le M(R)$ с некоторой константой $M(R)$ для всех $g \in \mathcal{B}(R)$. Отсюда следует равностепенная непрерывность $\mathcal{B}(R)$.

Применение критерия Арцела (см., например, [14], с. 32) дает утверждение леммы.

Лемма 4.7 доказана.

4.2. Операторное уравнение

Обозначим правую часть (4.4), зависящую от $g(t) = (g_1, \cdots, g_n)$, $z^n(\tau^1; t, x)$, и $\tau(t,x)$ как $\mathcal{G}_i(g,z,\tau)$, и пусть $\mathcal{G}(g,z,\tau) = (\mathcal{G}_1(g,z,\tau), \cdots, \mathcal{G}_n(g,z,\tau))$. Тем самым определяется оператор $\mathcal{G} : C[0,T]^n \times \times C(Q_0)^n \times C[0,T] \to C[0,T]^n$. Пусть произвольная функция $w \in C[0,T]^n$. Поставим в соответствие w функцию $g = G(w)$, затем поставим в соответствие g функцию $z = Z(g) = Z(G(w))$, затем поставим в соответствие z функцию $\tau = \mathcal{T}(z) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Обозначим $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w)))$ и

$\Upsilon(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Таким образом, мы поставили в соответствие w функцию $z(s;t,x) = \mathcal{Z}(w)$, где $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w)))$ и функцию $\tau(t,x) = \Upsilon(w)$, где $\Upsilon(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Тогда из (4.4) имеем

$$\begin{aligned} w_i(t) = f_i(t) - k_i - \mu_1\left(\int_{\Upsilon(w)(t,x)}^{t}\sum_{k=1}^{n}(G(w))_k(s)\mathcal{E}(e_k)(\mathcal{Z}(w)(s;t,x)))ds, \mathcal{E}(e_i(x))\right) - \\ - \mu_1\left(\int_{\Upsilon(w)(t,x)}^{t}\sum_{k=1}^{n}(G(w))_k(s)\mathcal{E}(a)(\mathcal{Z}(w)(s;t,x))ds, \mathcal{E}(e_i(x))\right), \quad 1 \le i \le n. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Обозначая правую часть (4.15) через $K_i(w)$, $K(w) = (K(w)_1, \cdots, K(w)_n)$, получаем из (4.4) операторное уравнение

$$w = \mathcal{K}(w), \quad \mathcal{K}(w) = \mathcal{G}(G(w), \mathcal{Z}(w), \Upsilon(w)). \tag{4.16}$$

Нетрудно видеть, что из непрерывности операторов G, $\mathcal{Z}$, Υ следует, что оператор $\mathcal{K}$ переводит $C(0,T)^n$ в $C(0,T)^n$.

Введем на $C(0,T)^n$ норму $\|w\|_l = \|w(t)\exp(-lt)\|_{C(0,T)^n}$, где $l > 0$. Пусть $S_l(R) = \{w : \|w\|_l \le R\}$. Справедлива

Лемма 4.8. *Пусть R достаточно велико. Тогда $\mathcal{K}(S_l(R)) \subset S_l(R)$.*

Доказательство. Пусть $w \in S_l(R)$. Пользуясь леммами 4.1, 4.5, 4.6 и равенством (4.15), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(w)\|_l \le \|f(t)\|_l + \max|k_i| + \int_0^t \exp(-l(t-s))\|G(w)(s)\exp(-ls)\|_{C(0,T)^n} ds \le \|f(t)\|_l + \max|k_i| + \\ + M_1\|w(s)\|_l \int_0^t \exp(-l(t-s))ds \le \|f(t)\|_l + \max|k_i| + M_2 l^{-1}\|w(t)\|_l ds \le \|f(t)\|_l + \max|k_i| + M_2 l^{-1} R. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Выбирая l так, чтобы $M_1 l^{-1} R < 1/2$, получаем $\|K(w)\|_l \le M_3(\|f(t)\|_l + \max|k_i|)$. Выбирая теперь R достаточно большим и пользуясь (4.17), получаем $\|\mathcal{K}(w)\|_l \le R$.

Лемма 4.8 доказана.

Лемма 4.9. *Оператор $\mathcal{K}$ является непрерывным и компактным на $S_l(R)$.*

Доказательство. Непрерывные по норме $\|\cdot\|_{C(0,T)^n}$ операторы являются непрерывными и по норме $\|\cdot\|_l$ в силу эквивалентности этих норм, и оператор $K = \mathcal{G}(\mathcal{T}(w), \mathcal{Z}(w), \Upsilon(w))$ является непрерывным как суперпозиция непрерывных операторов.

Оператор G переводит $S_l(R)$ в компактное множество $\mathcal{B}(R)$. Следовательно, непрерывные операторы $\Upsilon(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$, $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w)))$ и $\mathcal{K} = \mathcal{G}(\mathcal{T}(w), \mathcal{Z}(w), \Upsilon(w)))$ переводят $S_l(R)$ в компактное множество.

Лемма 4.9 доказана.

Из лемм 4.8, 4.9 в силу принципа Шаудера вытекает

Лемма 4.10. *Оператор $\mathcal{K}$ имеет на $S_l(R)$ неподвижную точку.*

4.3. Разрешимость системы (4.4)–(4.5)

Теорема 4.1. *Система* (4.4)–(4.5) *имеет решение.*

Доказательство. Из леммы 10 вытекает существование неподвижной точки w оператора $\mathcal{K}$. Ясно, что $g = G(w)$ является решением системы (4.4)–(4.5), где $z^n(s;t,x) = \mathcal{Z}(w)$, $\tau^n(t,x) = \Upsilon(w)$.

Теорема 4.1 доказана.

4.4. Разрешимость интегрального тождества (4.2)

Пусть $v^n(t,x) = \sum_{k=1}^n g_k(t)e_k(x)$, где $g(t)$, $z^n(s;t,x)$, $\tau^n(t,x)$ – решение системы (4.4)–(4.5).

Теорема 4.2. *Функция* $v^n(t,x)$ *удовлетворяет интегральному тождеству* (4.2) *и соотношениям* (4.5)*,* (4.3) *и справедлива равномерная по n оценка*

$$\sup_t |v^n(t,x)|_0 + \|v^n(t,x)\|_{0,1} \leq M(\|f(t)\|_{0,-1} + |v^0|_0 + M_*(a)). \tag{4.18}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 4.1.

Докажем оценку (4.18). Стандартными соображениями, как и в случае системы Навье–Стокса (см. [13, разд. II.1.4, стр. 141]), и опуская индексы n, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t,x)|_0^2 + \mu_0|\mathscr{E}(v)(t,x)|_0^2 = \langle f(t,x), v(t,x)\rangle - \\ - \mu_1\left(\int\limits_{\tau(t,x)}^{t} \mathscr{E}(v+a)(s,z(s;t,x))ds, \mathscr{E}(v)(t,x)\right) + b(a,a,v) + b(v,a,v) + b(a,v,v) = \sum_{i=1}^5 I_i.\end{gathered} \tag{4.19}$$

Оценим слагаемые I_i.

Рассмотрим сначала I_1. Нетрудно видеть, что при произвольном $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|I_1| \leq |f(t,x)|_{-1}|v(t,x)|_1 \leq C_1(\varepsilon)|f(t,x)|_{-1}^2 + \varepsilon|v(t,x)|_1^2. \tag{4.20}$$

В силу гладкости $a(t,x)$ получаем

$$|I_3| + |I_4| + |I_5| \leq M_0(a)|v(t,x)|_0^2. \tag{4.21}$$

Рассмотрим слагаемое I_2. Очевидно, что

$$|I_2| \leq \varepsilon|v(t,x)|_1^2 + C_3(\varepsilon)\left|\int\limits_{\tau(t,x)}^{t} \mathscr{E}(v+a)(s,z(s;t,x))ds\right|_0^2 = \varepsilon|v(t,x)|_1^2 + C_2(\varepsilon)I_{22}. \tag{4.22}$$

Легко видеть, что в силу гладкости $a(t,x)$

$$\begin{gathered} I_{22} = \int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{\tau(t,x)}^{t} \mathscr{E}(v+a)(s,z(s;t,x))ds\right|^2 dx \leq M\left(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\tau(t,x)}^{t} |v_x(s,z(s;t,x))|^2 dsdx + \right. \\ \left. + \int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{t}|a_x(s,z(s;t,x))|^2 dsdx\right) \leq M_1\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\tau(t,x)}^{t} |v_x(s,z(s;t,x)|^2 dsdx + M_2(a) = M_1 I_{221} + M_2(a). \end{gathered} \tag{4.23}$$

Здесь v_x и a_x – матрицы Якоби вектор-функций v и a, $|v_x|$ и $|a_x|$ – нормы матриц. Считая v продолженной нулем из Ω в Ω_0, рассмотрим задачу Коши

$$\overline{z}(\tau;t,x) = x + \int\limits_{t}^{\tau}(\overline{v} + a)(s,\overline{z}(s;t,x))ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega_0. \tag{4.24}$$

Задача (4.24) нелокально разрешима, при этом якобиан $J(t, x)$ отображения $y = z(t; s, x) : \Omega_0 \to \Omega_0$ равен единице в силу соленоидальности поля скоростей.

Используя вышеприведенные рассуждения и меняя порядок интегрирования, получаем

$$I_{221} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\tau(t,x)}^{t} |v_x(s,z(s;t,x))|^2 dsdx \leq \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega_0}|v_x(s,z(s;t,x))|^2 ds. \tag{4.25}$$

Делаем в последнем интеграле по Ω_0 замену переменной $x = z(t;s,y)$ и учитывая $J(t,x) = 1$, имеем

$$I_{221}\int_0^t\int_{\Omega_0}|v_x(s,y)|^2 J^{-1}(t,z(t;s,y))dyds = \int_0^t\int_{\Omega_0}|v_x(s,y)|^2 dyds = \int_0^t\int_{\Omega}|v_x(s,y)|^2 dyds. \tag{4.26}$$

Из (4.23)–(4.26) вытекает

$$I_{22} \le M_1\int_0^t|v_x(s,y)|_0^2 ds + M_2(a). \tag{4.27}$$

Из неравенств (4.22) и (4.27) вытекает, что

$$|I_2| \le \varepsilon|v(t,x)|_1^2 + C_3(\varepsilon)\left(\int_0^t|v(s,x)|_1^2 ds + M_2(a)\right). \tag{4.28}$$

Так как $|\mathscr{E}u)(x)|_0 > m|(u(x)|_1$, $m > 0$, для $\forall u \in V$, то интегрируя (4.19) по t, пользуясь оценками (4.20), (4.21) и (4.28), выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем

$$\begin{gathered}|v(t,x)|_0^2 + \int_0^t|v(s,x)|_1^2 ds \le M_6\left(\int_0^t|f(s,x)|_{-1}^2 ds + |v^0|_0^2 + M_2(a)\right) + \\ + M_7\left(\int_0^t\int_0^\xi|v(s,x)|_1^2 dsd\xi + \int_0^t|v(s,x)|_0^2 ds\right).\end{gathered} \tag{4.29}$$

Отсюда получаем интегральное неравенство типа Гронуолла для $q(t) = \int_0^t|v(\tau,x)|_1^2 d\tau + |v(t,x)|_0^2$, дающее оценку $q(t)$. Из (4.29) и оценки $q(t)$ следует утверждение теоремы 4.2.

Теорема 4.2 доказана.

Замечание. Так как $v(t,x) = 0$ при $x \in \Omega_0\backslash\Omega$, то $\|v(t,x)\|_{L_2(\Omega_0)^N} = |v(t,x)|_0$, $\|v(t,x)\|_{L_2(0;W_1^2(\Omega_0)^N)} = |v(t,x)|_1$. Отсюда и из оценки (4.18) вытекает равномерная по n оценка

$$\sup_t|v^n(t,x)|_{L_2(\Omega_0)^N} + \|v^n(t,x)\|_{L_2(0;W_1^2(\Omega_0)^N)} \le M(\|f(t)\|_{0,-1} + |v^0|_0 + M_*(a)). \tag{4.30}$$

4.5. Свойства галеркинских приближений

Пусть $v^n(t,x) = \sum_{k=1}^n g_k(t)e_k(x)$, где $g(t)$, $z^n(s;t,x)$, $\tau^n(t,x)$ являются решениями системы (4.4), (4.5). Из того, что v^n равна нулю вне Ω и из оценки (4.30) следует слабая в $L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega_0)^N)$ и сильная в $L_2(0,T;L_2(\Omega_0)^N)$ сходимость $v^n(t,x)$ к некоторой $v^n(t,x) \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega_0)^N)$ (с точностью до подпоследовательности) при $n \to +\infty$.

Из теоремы 6.2 следует, что последовательность $z^n(s;t,x)$ сходится по τ, x мере к РЛП $z(s;t,x)$, порожденному $v(t,x) \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega_0)^N)$ равномерно по t. Тогда последовательность $z^n(s;t,x)$ (с точностью до подпоследовательности) сходится к $z(s;t,x)$ при п.в. $(s,x) \in Q_T$.

Рассмотрим последовательность $\tau^n(t,x)$.

Теорема 4.3. *Последовательность $\tau^n(t,x)$ сходится к $\tau(t,x)$ при $n \to +\infty$ при п.в. $(t,x) \in Q_T$.*

Доказательство теоремы 4.3. Пусть последовательность $z^n(s;t,x)$ сходится к $z(s;t,x)$ при $(t,x) \in Q_T$. Покажем, что тогда $\tau^n(t,x)$ сходится к $\tau(t,x)$ (с точностью до подпоследовательности). Рассмотрим сначала случай $\tau(t,x) > 0$. Предположим противное, т.е. $\tau^n(t,x)$ не сходится к $\tau^*(t,x)$. Тогда найдется подпоследовательность (индексы те же), при которой либо $\tau^n(t,x) \ge \tau(t,x) + \delta$, либо $\tau^n(t,x) \le \tau(t,x) - \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть сначала $\tau^n(t,x) \ge \tau(t,x) + \delta$. Тогда можно считать, $\tau^n(t,x) \to \tau_1 > \tau(t,x) + \delta$. В этом случае $\Phi(z^n(\tau^n(t,x);t,x)) = 0$, $\Phi(z^n(\tau_1;t,x)) > 0$. Из сходимости $z^n(s;t,x)$ к $z(s;t,x)$ и непрерывности $\Phi(t,x)$ следует, что $\Phi(z(\tau_1;t,x)) \ge 0$. Следовательно, либо $z(\tau_1;t,x) \not\subseteq \Omega$ при $\tau_1 > \tau(t,x)$, либо $z(\tau_1;t,x) \in \partial\Omega$ при $\tau_1 > \tau(t,x)$, что противоречит определению $\tau(t,x)$.

Аналогично рассматривается случай $\tau^n(t,x) \le \tau(t,x) - \delta$.

В случае $\tau(t,x) > 0$ теорема 4.3 доказана. Случай $\tau(t,x) = 0$ доказывается проще.

Теорема 4.3 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

Покажем, что предел v последовательности v^n галеркинских приближений является слабым решением задачи (3.1)–(3.3). Функция v^n удовлетворяет тождеству (4.2) при произвольной $\phi \in H_n$. Пусть $\phi \in H_m$ при фиксированном $m \in N$.

Рассмотрим тождество (4.2) при произвольной $n > m$. Интегрируя (4.2) по t, получаем

$$(v^n(T),\phi) - \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i^n v^n, \partial\phi/\partial x_i)ds + \mu_0 \int_0^T (\mathscr{E}(v^n)(s), \mathscr{E}(\phi))ds +$$
$$+\mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \mathscr{E}(v^n)(s, z^n(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\phi)(x) \right) dt + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \mathscr{E}(a)(z^n(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\phi)(x) \right) dt + \int_0^T b(a, v^n, \phi)dt + \quad (5.1)$$
$$+ \int_0^T b(a, v^n, \phi)dt = \int_0^T (f^n, \phi)ds - \int_0^T b(a,a,\phi)dt - \mu_0 \int_0^T (\mathscr{E}(a)(s), \mathscr{E}(\phi))ds + (v^0, \phi), \quad \phi \in H_m.$$

Пусть

$$I_1(n) = (v^n(T),\phi), \quad I_2(n) = \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i^n v^n, \partial\phi/\partial x_i)ds, \quad I_3(n) = \mu_0 \int_0^T (\mathscr{E}(v^n)(s), \mathscr{E}(\phi))ds,$$

$$I_4(n) = \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \mathscr{E}(v^n)(s, z^n(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\phi)(x) \right) dt,$$

$$I_5(n) = \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \mathscr{E}(a)(s, z^n(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\phi)(x) \right) dt, \quad I_6(n) = \int_0^T b(a, v^n, \phi)dt,$$

$$I_7(n) = \int_0^T b(v^n, a, \phi)dt, \quad I_8(n) = \int_0^T (f^n, \phi)ds.$$

$$I_9 = -\int_0^T b(a,a,\phi)dt - \mu_0 \int_0^T (\mathscr{E}(a)(s), \mathscr{E}(\phi))ds + (v^0, \phi).$$

Запишем тождество (5.1) в виде

$$I_1(n) - I_2(n) + \mu_0 I_3(n) + \mu_1 I_4(n) + \mu_1 I_5(n) + I_6(n) + I_7(n) = I_8(n) + I_9 \quad (5.2)$$

и перейдем в (5.2) или, что то же в (5.1), к пределу при $n \to +\infty$.

Из оценки (4.18) вытекает ограниченность v^n в $L_2(0,T;V)$ и ограниченность значений $v^n(T)$ в H непрерывных функций $v^n(t)$. Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0,T;V)$, а $v^n(T,x)$ слабо сходится к $v(T,x)$ в H. Далее, доказательство соотношений

$$\lim_{n\to\infty} I_1(n) = (v(T),\phi), \quad \lim_{n\to\infty} I_3(n) = \int_0^T (\mathscr{E}(v)(s),\mathscr{E}(\phi))dt, \tag{5.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_2(n) = \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i v, \partial\phi/\partial x_i)ds, \tag{5.4}$$

проводится по стандартной схеме (см., например, [13, с. 232]).

Перейдем к слагаемому $I_4(n)$.

Лемма 5.1. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to+\infty} I_4(n) = I_4 = \int_0^T \left(\int_{\tau(t,x)}^t \mathscr{E}(v)(s,z(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\phi)(x) \right) dt. \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \left(\int_0^t \mathscr{E}(v^n)(s,z^n(s;t,x))ds \right) : \mathscr{E}(\phi)(x)dxdt. \tag{5.6}$$

Здесь и ниже $\mathscr{E}(u) : \mathscr{E}(w) = \sum_{i,j=1}^N \mathscr{E}_{ij}(u) : \mathscr{E}_{ij}(w)$ для $u,w \in V$. Покажем, что $\bar{I}_4(n) = I_4(n)$. В самом деле, так как $\operatorname{supp}\phi(x) \subset \Omega$, то

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_\Omega \int_0^t \mathscr{E}(v^n)(s,z^n(s;t,x)) : \mathscr{E}(\phi)(x)dsdxdt. \tag{5.7}$$

При $s < \tau^n(t,x)$ имеем $z^n(s;t,x) \not\subset \Omega$, и так как $v^n(t,x) = 0$ при $x \not\subset \Omega$, то $v^n(s,z^n(s;t,x)) = 0$. Следовательно, при $s < \tau^n(t,x)$ имеем $\mathscr{E}(v^n)(s,z^n(s;t,x)) = 0$. Поэтому

$$\int_0^t \mathscr{E}(v^n)(s,z^n(s;t,x))ds = \int_{\tau^n(t,x)}^t \mathscr{E}(v^n)(s,z^n(s;t,x))ds.$$

Отсюда и из (5.6) следует $\bar{I}_4(n) = I_4(n)$.

Перейдем к пределу в (5.6). Сделав в интеграле по x замену переменной $x = z^n(t;s,y)$, получаем

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathscr{E}(v^n)(s,y) : \mathscr{E}(\phi)(z^n(t;s,y))dsdydt. \tag{5.8}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered}\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathscr{E}(v^n)(s,y) : \mathscr{E}(\phi)(z(t;s,y))dsdydt + \\ + \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathscr{E}(v^n)(s,y) : (\mathscr{E}(\phi)(z^n(t;s,y)) - \mathscr{E}(\phi)(z(t;s,y)))dydt = I_{41}(n) + I_{42}(n).\end{gathered} \tag{5.9}$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$I_{41}(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathscr{E}(v^n)(s,y)\psi(t,y)dsdy, \quad \psi(t,y) = \int_s^T \mathscr{E}(\phi)(z(t;s,y))dt. \tag{5.10}$$

Из (4.30) вытекает слабая компактность $v^n(t,x)$ в $L_2(0,T;W_2^1(\Omega_0)^N)$. Будем считать, что сама $v^n(t,x)$ слабо сходится к $v(t,x)$ в $L_2(0,T;W_2^1(\Omega_0)^N)$. Пользуясь слабой сходимостью v^n к v и переходя к пределу в (5.10), получаем

$$\lim_{n\to+\infty} I_{41}(n) = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\mathscr{E}(v)(s,y)\int\limits_s^T\mathscr{E}(\phi)(z(t;s,y))dydt. \tag{5.11}$$

Делая в (5.11) обратную замену переменной $y = z^n(s;t,x)$, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} I_{41}(n) = \int\limits_0^T\left(\int\limits_0^t\mathscr{E}(v)(s,z(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\phi)(x)\right)dt. \tag{5.12}$$

При $s < \tau(t,x)$ имеем $z(s;t,x) \not\in \Omega$, и так как $v(t,x) = 0$ при $x \not\in \Omega$, то $v(s,z(s;t,x)) = 0$. Следовательно, при $s < \tau(t,x)$ имеем $\mathscr{E}(v^n)(s,z^n(s;t,x)) = 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^t(\mathscr{E}(v)(s,z(s;t,x))ds = \int\limits_{\tau(t,x)}^t(\mathscr{E}(v)(s,z(s;t,x))ds.$$

Отсюда и из (5.6) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} I_{41}(n) = \int\limits_0^T\left(\int\limits_{\tau(t,x)}^t\mathscr{E}(v)(s,z(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\phi)(x)\right)dt. \tag{5.13}$$

Рассмотрим $I_{42}(n)$. Из сходимости при п.в. (t,y) $z^n(t;s,y)$ к $z(t;s,y)$ вытекает, что

$$\lim_{n\to+\infty} I_{42}(n) = 0. \tag{5.14}$$

Из (5.12) и (5.14) вытекает (5.5).

Лемма 5.1 доказана.

Доказательство соотношения

$$\lim_{n\to+\infty} I_5(n) = \int\limits_0^T\left(\int\limits_{\tau(t,x)}^t\mathscr{E}(a)(s,z(s;t,x)ds, \mathscr{E}(\phi)(x)\right)dt \tag{5.15}$$

проводится аналогично доказательству (5.5) с очевидными упрощениями.

Доказательство соотношений

$$\lim_{n\to+\infty} I_6(n) = \int\limits_0^T b(a,v,\phi)dt, \quad \lim_{n\to+\infty} I_7(n)_{n\to+\infty} = \int\limits_0^T b(v,a,\phi)dt, \quad \lim I_8(n) = \int\limits_0^T(f,\phi)ds \tag{5.16}$$

проводится стандартным образом (см., например, [13, с. 232]).

Из установленной сходимости слагаемых $I_i(n)$ вытекает справедливость

$$\begin{gathered}(v(T),\phi) - \int\limits_0^T(v_iv,\partial\phi/\partial x_i)dt + \mu_0\int\limits_0^T(\mathscr{E}(v)(t,x),\mathscr{E}(\phi(x)))dt + \mu_1\int\limits_0^T\int\limits_{\tau(t,x)}^t(\mathscr{E}(v)(s,z(s;t,x))ds,\mathscr{E}(\phi))dt + \\ + \mu_1\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\tau(t,x)}^t\mathscr{E}(a)(z(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\phi)(x)\right)dt + \int\limits_0^T b(a,v,\phi)dt + \int\limits_0^T(b(v,a,\phi)dt = \\ = \int\limits_0^T(f(t),\phi)dt - \int\limits_0^T b(a,a,\phi)dt - \mu_0\int\limits_0^T(\mathscr{E}(a)(s),\mathscr{E}(\phi))ds + (v^0,\phi)\end{gathered} \tag{5.17}$$

при любой $\phi \in H_m$.

Используя плотность множества функций $\phi \in H_m$, $m = 1,2,\ldots$ в V нетрудно показать, что (5.17) справедливо при любой $\phi \in V$.

Очевидно, что (5.17) справедливо и при любом $t \in (0,T)$ вместо T:

$$(v(t),\phi) - \int_0^t (v_i v, \partial\phi/\partial x_i)ds + \mu_0 \int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x), \mathcal{E}(\phi(x)))ds + \mu_1 \int_0^t \int_{\tau(\xi,x)}^{\xi} (\mathcal{E}(v)(s, z(s;\xi,x))ds, \mathcal{E}(\phi))d\xi +$$
$$+ \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau(\xi,x)}^{\xi} \mathcal{E}(a)(z(s;\xi,x))ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) d\xi + \int_0^t b(a,v,\phi)ds + \int_0^t b(v,a,\phi)ds = \int_0^t (f(s),\phi)ds - \tag{5.18}$$
$$- \int_0^t b(a,a,\phi)dt - \mu_0 \int_0^t (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi))ds + (v^0,\phi).$$

Дифференцируя (5.18) по t при почти всех t и учитывая $Z(v) = z$, получаем, что v удовлетворяет (3.4).

Покажем, что $v \in W_1$. Так как $v \in L_2(0,T;V)$, то достаточно показать, что $v' \in L_1(0,T;V^{-1})$.

Перепишем тождество (3.4) в виде $d\langle v,\phi\rangle/dt = \langle g(t),\phi\rangle$, где

$$\langle g(t),\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle + \sum_{i=1}^{N} (v_i v, \partial\phi/\partial x_i) - \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\phi)) - b(v,a,\phi) - b(a,v,\phi) -$$
$$- \mu_0(\mathcal{E}(a),\mathcal{E}(\phi)) - b(a,a,\phi) - \mu_1 \left(\int_{\tau(t,x)}^{t} \mathcal{E}(v+a)(\tau, z(\tau;t,x))d\tau, \mathcal{E}(\phi) \right) \equiv \sum_{i=1}^{8} \langle q_i(t),\phi\rangle. \tag{5.19}$$

Для доказательства $v' \in L_1(0,T;V^{-1})$ достаточно показать, что $q_i \in L_1(0,T;V^{-1})$, $i = 1, \ldots, 8$. При $i = 1, 2, 3$ этот факт доказан в [13, с. 201, с. 226], а при $i = 4, \ldots, 7$ очевиден.

Рассмотрим $q_8(t)$. Элементарные выкладки дают

$$|\langle q_8(t),\phi\rangle| \le M \int_{\Omega} \int_{\tau(t,x)}^{t} |\mathcal{E}(v+a)(\tau, z(\tau;t,x))d\tau| |\mathcal{E}(\phi)| dx \le$$
$$\le M \left(\int_{\Omega} \left(\int_{\tau(t,x)}^{t} |\mathcal{E}(v+a)(\tau,(\tau;t,x))| d\tau \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{E}(\phi)|^2 dx \right)^{1/2} \le \tag{5.20}$$
$$\le M \left(\int_{\Omega_0} \left(\int_0^T |\mathcal{E}(v+a)(\tau, z(\tau;t,x))|^2 d\tau dx \right)^{1/2} \right) |\phi(x)|_1.$$

Делая в интеграле по Ω_0 замену переменной $x = z(t;s,y)$ и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{\Omega_0} \int_0^T |\mathcal{E}(v+a)(\tau, z(\tau;t,x))|^2 d\tau dx = \int_{\Omega_0} \int_0^T |\mathcal{E}(v+a)(\tau,y)|^2 d\tau dy =$$
$$= \int_0^T \int_{\Omega_0} |\mathcal{E}(v+a)(\tau,y)|^2 dy d\tau \le \int_0^T |v_x(\tau,y)|^2 d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_0} |a_x(\tau,y)|^2 d\tau. \tag{5.21}$$

Из неравенств (4.18), (5.20), (5.21) вытекает неравенство $|\langle q_8(t),\phi\rangle| \le M|\phi(x)|_1$. Следовательно, $g_8 \in L_1(0,T;V^{-1})$.

Включение $v' \in L_1(0,T;V^{-1})$, а следовательно, и $v \in W_1$ установлено.

Таким образом, v является слабым решением задачи (3.1)–(3.3).

Теорема 3.1 доказана.

Замечания. Основной результат можно очевидным образом переформулировать в терминах задачи (1.1)–(1.4). При этом $u = v + a$, $u^0 = v^0 + a$, $u^0|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Заметим также, что мы считали φ следом на $\partial\Omega$ достаточно гладкой функции $a(x)$. Можно было бы, наоборот, построить $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_0)$ продолжение $a(x)$ граничной функции при естественном предположении $\varphi(x) \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, но это привело бы к техническим трудностям в доказательствах.

АППЕНДИКС

Приведем используемые выше факты из теории РЛП. Рассмотрим в ограниченной области Ω_0 с гладкой границей $\partial\Omega_0$ задачу Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s;t,x))ds, \quad \tau \in [0,T], \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega_0. \tag{6.1}$$

Определение 6.1. *Пусть* $u \in L_1(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_0)^N)$, $1 \le p \le +\infty$, $\operatorname{div} u(t,x) = 0$ *и* $u|_{[0,T]\times\partial\Omega_0} = 0$. *Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным* u, *называется функция* $z(\tau;t,x)$, $(\tau;\, t, x) \in \in [0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}_0$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) *при п.в.* x *и любом* $t \in [0,T]$ *функция* $z(\tau;t,x)$ *абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению* (6.1); 2) *для любых* $t,\tau \in [0,T]$ *и произвольного измеримого по Лебегу множества* B *с мерой* $m(B)$ *справедливо соотношение* $m(z(\tau;t,B)) = m(B)$; 3) *при всех* $t_i, \in [0,T]$, $i = 1,2,3$, *и п.в.* $x \in \overline{\Omega}$ *справедливо* $z(t_3;t_1,x) = z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x))$.

Справедливы следующие результаты (см., например, [15, 16]):

Теорема 6.1. *Пусть* $u \in L_1(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_0)^N)$, $1 \le p \le +\infty$, $\operatorname{div} u(t,x) = 0$ *и* $u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. *Тогда существует единственный РЛП* z, *порожденный* v. *Более того,* $\partial z(\tau;t,x)/\partial\tau = u(\tau, z(\tau;t,x))$ *при* $t \in [0,T]$, *п.в.* $\tau \in [0,T]$, *п.в.* $x \in \Omega_0$.

Теорема 6.2. *Пусть* v, $v^m \in L_1(0,T;\overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega_0)^N)$, $m = 1,2,\dots$ *при некотором* $p > 1$. *Пусть* $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{div} v^m = 0$, $v^m|_{[0,T]\times\partial\Omega_0} = 0$, $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. *Пусть выполняются неравенства*

$$\|v_x\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega_0)^{N\times N})} + \|v\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega_0)^N)} \le M, \quad \|v_x^m\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega_0)^{N\times N})} + \|v^m\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega_0)^N)} \le M.$$

Пусть v^m *сходится к* v *в* $L_1([0,T]\times\Omega_0)^N$ *при* $m \to +\infty$. *Пусть* $z^m(\tau;t,x)$ *и* $z(\tau;t,x)$ *РЛП, порожденные* v^m *и* v *соответственно. Тогда последовательность* z^m *сходится (с точностью до последовательности) к* z *по мере Лебега на множестве* $[0,T]\times\Omega_0$ *равномерно по* $t \in [0,T]$.

Отметим, что в случае гладкой $u(t,x)$ классическое решение $z(\tau;t,x)$ задачи Коши задает порожденный $u(t,x)$ РЛП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
2. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 2. С. 215–220.
3. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory // Nonlin. Analys: TMA. 2018. V. 172. P. 73–98.
4. *Zvyagin V., Orlov V.* On one problem of viscoelastic fluid dynamics with memory on an infinite time interval // Disc. Cont. Dyn. Syst., Ser. B. 2018. V. 23. № 9. P. 3855–3877.
5. *Орлов В.П.* Об одной неоднородной регуляризованной задаче динамики вязкоупругой среды // Изв. вузов. Матем. 2012. № 8. С. 58–64.
6. *Звягин А.В., Звягин В.Г., Поляков Д.М.* О диссипативной разрешимости альфа-модели движения жидкости с памятью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1243–1257.

7. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О регулярности слабых решений обобщенной модели вязкоупругости Фойгта // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1933–1949.
8. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* Об одной модели термовязкоупругости Джеффриса-Олдройда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1821–1830.
9. *Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A.* Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 2008. P. 230.
10. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сб. 1961. Т. 53(95). № 4. С. 393–428.
11. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970, С. 204.
12. *Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р.* // Задача протекания для уравнений Навье–Стокса. Успехи матем. наук. 2014. Т. 69. С. 115–176.
13. *Темам Р.* Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1987, С. 408.
14. *Крейн С.Г.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. С. 544.
15. *DiPerna R.J., Lions P.L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 511–547.
16. *Crippa G., de Lellis C.* Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // J. Reine Angew. Math. 2008. V. 616. P. 15–46.
17. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1981. С. 232.