МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

Посвящается профессору Евгению Михайловичу Шахову в связи с его 90-летием

О МОДЕЛИРОВАНИИ СТРУИ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ НА ОСНОВЕ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г.
М. В. Абгарян[1,*], А. М. Бишаев[2,], В. А. Рыков[3]**

[1] 125080 Москва, Ленинградское шоссе, 5, а/я 43, МАИ, Россия
[2] 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия
[3] 117333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия
**e-mail: abgmvk@gmail.com*
***e-mail: bishaev@bk.ru*

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.
Переработанный вариант 14.08.2023 г.
Принята к публикации 22.08.2023 г.

Рассматривается задача о струе разреженной плазмы, выходящей из стационарного плазменного двигателя. Рассмотрение проводится полностью на кинетическом уровне, а именно, для описания движения всех компонент плазмы вводятся функции распределения. Система кинетических уравнений должна решаться совместно с уравнениями Максвелла. Обсуждаются методы решения полученной задачи. Библ. 10. Фиг. 1.

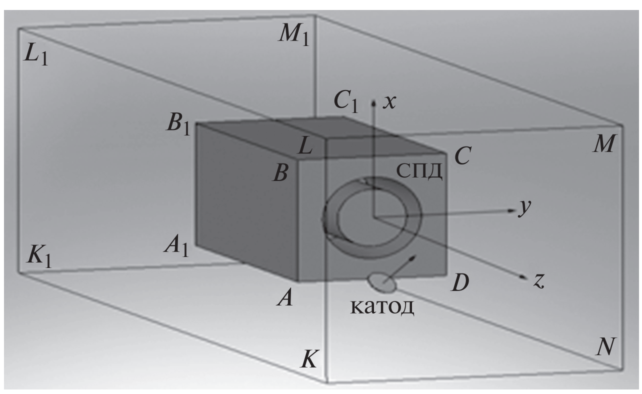
Ключевые слова: плазма, электронная, ионная и нейтральная компоненты плазмы, функции распределения электронной, ионной и нейтральной компонент плазмы, электрическое поле, длина Дебайя, уравнение Пуассона, ленгмюровские колебания, квазинейтральность.

DOI: 10.31857/S0044466923120025, **EDN:** ZVAIWT

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее полное решение задачи о струе, выходящей из стационарного плазменного двигателя (СПД), рассматривалось в работах [1] и [2]. Геометрические аспекты постановки этой задачи представлены на фиг. 1.

Из кольцевого отверстия двигателя, который моделируется параллелепипедом $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходят в окружающее пространство ионы и нейтралы. Электроны испускаются катодом (он изображен на фиг. 1) и поступают через кольцевое отверстие в двигатель. В названных выше ра-



Фиг. 1.

ботах приводятся результаты ранее сделанных оценок, которые показывают, что движущаяся среда есть квазинейтральная плазма и для ее адекватного описания необходим кинетический подход.

В [1] и [2] для описания движения ионов и нейтралов использовался кинетический подход, т.е. вводились функции распределения ионов и нейтралов и формулировались кинетические уравнения, откуда они находились. Для описания электронной компоненты использовались ее уравнения движения, откуда с помощью выдвинутой А.И. Морозовым гипотезы “термализованного потенциала” (см. [3]) получалось выражение для электрического поля. Это позволяло замкнуть систему кинетических уравнений для ионов и нейтралов.

В [1] был построен численный метод для решения получившейся системы кинетических уравнений и, используя его, сделать расчеты, результаты которых приведены в [2]. На фиг. 1 параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$ обозначает область (расчетную), где осуществлялись расчеты. Они производились как вверх, так и вниз по потоку.

В данной статье предлагается описание движения электронной компоненты вести на кинетическом уровне, что позволит определить электрическое поле из совместного решения системы кинетических уравнений и уравнений Максвелла и, тем самым, освободиться от гипотезы “термолизованного потенциала”.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $f_i = f_i(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ – функция распределения ионов, где $\boldsymbol{\xi}$ – их скорость, а D_i ($\boldsymbol{\xi}\in D_i$) – скоростное пространство ионов. Соответственно, $f_e = f_e(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ – функция распределения электронов, а $\mathbf{v}$, D_e суть скорость и скоростное пространство электронов. Аналогично $f_n = f_n(t,\mathbf{x},\mathbf{w})$ является функцией распределения нейтралов, тогда как $\mathbf{w}$ – скорость нейтралов с $\mathbf{w}\in D_n$ их скоростным пространством. Предположим, что так введенные функции распределения подчиняются следующей системе кинетических уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_i}{\partial t} + \xi^k\frac{\partial f_i}{\partial x^k} + \frac{e}{m_i}E^k\frac{\partial f_i}{\partial \xi^k} = J_{in},\\ \frac{\partial f_e}{\partial t} + v^i\frac{\partial f_e}{\partial x^i} - \frac{e}{m_e}E^i\frac{\partial f_e}{\partial v^i} - = 0,\\ \frac{\partial f_n}{\partial t} + w^i\frac{\partial f_n}{\partial x^i} = J_{ni}.\end{gathered}\tag{1}$$

В (1) электрическое поле $\mathbf{E} = \left\{E^i\right\}$ предполагается потенциальным, т.е. $E_k = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, $k = 1,2,3$, где $\varphi = \varphi(t,\mathbf{x})$ есть потенциал электрического поля, для определения которого используется уравнение Максвелла

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n^e - n^i), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\tag{2}$$

e, как в (1), так и в (2) есть модуль заряда электрона, а m_i и m_e – массы иона и электрона соответственно. Фигурирующие в (2) n_e и n_i суть плотности электронов и ионов соответственно, и определяются следующими формулами:

$$n_e = \int\limits_{D_e} f_e(t,\mathbf{x},\mathbf{v})d\mathbf{v}, \quad n_i = \int\limits_{D_i} f_i(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}.$$

Плотность тока определяется в виде

$$\mathbf{j} = e(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_e), \quad \text{где} \quad \mathbf{j}_i = \int\limits_{D_i}\boldsymbol{\xi} f_i d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{j}_e = \int\limits_{D_e}\mathbf{v} f_e d\mathbf{v}$$

суть плотности ионного и соответственно электронного токов. Величины $\mathbf{u}_i = \dfrac{\mathbf{j}_i}{n_i}$, $\mathbf{u}_e = \dfrac{\mathbf{j}_e}{n_e}$ являются макроскопическими скоростями ионов и электронов. Выражения

$$\frac{3}{2}kT^i = \frac{m_i}{2}\int\limits_{D_i}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_i)^2 f_i d\boldsymbol{\xi}, \quad \frac{3}{2}kT^e = \frac{m_e}{2}\int\limits_{D_e}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_e)^2 f_e d\mathbf{v}$$

определяют такие величины, как температуры ионов и электронов. Правые части первого и третьего уравнения (1) суть интегралы столкновений ионов с нейтралами и нейтралами с ионами. В цитируемых выше работах указывалось, что основной вклад в них дает резонансная перезарядка (см. [4]) – взаимодействие, заключающееся в том, что ион отбирает электрон у нейтрала, становясь при этом нейтралом; а нейтрал, отдавая электрон, становится ионом. В [1] использовались для интегралов столкновений следующие выражения $J_{in} = \nu_{in}f_n - \nu_{ni}f_i$, $J_{ni} = \nu_{ni}f_i - \nu_{in}f_n$, где $\nu_{in} = n_i\nu$, $\nu_{ni} = n_n\nu$, а ν есть функция от макропараметров ионов и нейтралов (ее выражение имеется в [1]). Эти выражения будут использоваться в данной работе. В [2], применяя процедуру феноменологического вывода уравнения Больцмана, были получены более точные выражения для частот столкновений. Как показали тестовые расчеты, результаты численных решений систем кинетических уравнений в диапазоне используемых входных данных, слабо зависели от вида частоты в интегралах столкновений.

Предполагается, что электроны в струе двигаются в бесстолкновительном режиме. Отметим сразу, что в формулах (1), (2) и тех, которые будут приведены ниже, по повторяющимся индексам производится суммирование. Стоящие внизу индексы *i, e, n* используются исключительно для обозначения принадлежности соответствующей величины к ионам, электронам или нейтралам. Отметим также, что аналогичный подход к описанию плазмы был предложен А.А. Власовым в [5].

Приведем уравнения (1) и (2) к безразмерному виду. За масштаб длины примем полуширину квадрата ABCD – a (см. фиг. 1). За масштабные значения скоростных пространств примем следующие величины:

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_i}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2kT_e^0}{m_e}}, \quad w_0 = \sqrt{\frac{2kT_n^0}{m_n}},$$

где U_0 – разрядное напряжение (≈300 В), T_e^0, T_n^0 – суть характерные значения температуры электронов и нейтралов соответственно. Так как $m_e \ll m_i$, то, как правило, $v_0 > \xi_0$, $t_0 = \dfrac{a}{\xi_0}$, хотя в нашем случае $\dfrac{\xi_0}{v_0} \approx 10^{-2}$. Такой выбор временного масштаба связан с тем, что в задаче о струе, выходящей из СПД, основной интерес представляет поведение ионов. Электрическое поле в плазме (самосогласованное) определяется движением ее компонент, поэтому за его масштаб принимается величина $\varphi_0 = \dfrac{kT_e^0}{e}$, $E_0 = \dfrac{kT_e^0}{ae}$. Как обычно, величины

$$f_i^0 = \frac{n_0}{c_0^3}, \quad f_e^0 = \frac{n_0}{v_0^3}, \quad f_n^0 = \frac{n_n^0}{w_0^3}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{2kT_i^0}{m_i}},$$

где T_i^0 – характерное значение температуры ионов на выходе из отверстия, принимаются за характерные значения соответствующих функций распределения. Здесь n_0 – масштабное значение плотности тонов и электронов. Она принимается одной и той же для обоих компонент. В безразмерном виде система (1) будет следующей:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_i}{\partial t} + \xi^k\frac{\partial f_i}{\partial x^k} + BE^k\frac{\partial f_i}{\partial \xi^k} = \frac{1}{\mathrm{Kn}_{in}}J_{in},\\ \mathrm{Sh}_e\frac{\partial f_e}{\partial t} + v^k\frac{\partial f_e}{\partial x^k} - E^k\frac{\partial f_i}{\partial v^k} = 0,\\ \mathrm{Sh}_n\frac{\partial f_n}{\partial t} + w^k\frac{\partial f_n}{\partial x^k} = \frac{1}{\mathrm{Kn}_{ni}}J_{ni}.\end{gathered} \tag{3}$$

В (3) $\mathrm{Sh}_e = \frac{\xi_0}{v_0} = \sqrt{\frac{m_e U_0}{m_i T_e^0}} < 1$ – есть аналог числа Струхаля для электронов, а $\mathrm{Sh}_n = \frac{\xi_0}{w_0}$ для нейтралов, $B = \frac{eT_e^0}{2U_0} < 1$. Kn_{in}, Kn_{ni} – числа Кнудсена ион-нейтрального и нейтрал-ионного взаимодействий, а стоящие перед ними члены суть безразмерные значения интегралов столкновений. Они определяются в [1] и [2].

Безразмерный вид уравнения (2) задается формулой (5)

$$\varepsilon^2 \Delta\varphi = (n_e - n_i). \tag{4}$$

Причем $\varepsilon = \frac{r_d}{a}$, где $r_d = \sqrt{\frac{kT_e^0}{4\pi e^2 n_0}}$ есть длина Дебайя или дебаевский радиус. В задаче о струе его величина составляет где-то 3×10^{-3}, т.е. является малой.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Малость ε (дебаевского фактора) создает сложность для нахождения численного решения (3), (4). Она заключается в том, что из (4) следует, что, если электрическое поле в струе есть $O(1)$, то

$$n^i - n^e = O(\varepsilon^2). \tag{5}$$

Соотношение (5) называется условием квазинейтральности. Его обычно принимают за определение плазмы – как среды, состоящей из заряженных частиц, чья объемная плотность заряда равна нулю (как в магнитной гидродинамике (см. [6])) или “близка “ к нулю.

Экспериментальные данные свидетельствуют, что в плазме, если исключить дебаевские слои, нет сильных электрических полей $\left(O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right)$. Тогда из уравнения Максвелла (4) не определяется электрическое поле (оно дает только условие квазинейтральности), и поэтому возникает задача определения электрического поля в ходе совместного решения макроскопических уравнений сохранения, описывающих плазменную среду, и уравнений Максвелла.

Упомянутая выше, гипотеза “термализованного потенциала” является частным случаем способа определения электрического поля, когда предполагают, что $\varphi = f(n^i)$ (см. [7]).

В некоторых работах проблему определения электрического поля решают так: полагают, что $n_i = n_e$. Подставляя это соотношение в (4), получают, что $\Delta\varphi = 0$. Откуда и получают электрическое поле. В основе такого подхода лежит непонимание того, что (5) есть не изначально заданный факт, а есть результат движения плазменной среды, подчиняющейся уравнениям сохранения и уравнениям Максвелла, в ходе которого получается $n^i - n^e = \varepsilon^2 g(t, \mathbf{x})$. Подставляя этот результат в (4), получим $\Delta\varphi = g(t, \mathbf{x})$. Это соотношение и будет определять электрическое поле в плазме, которое называется самосогласованным.

Целью данной работы является получение конкретного выражения $g(t, \mathbf{x})$ в написанном выше соотношении. Из системы кинетических уравнений (1) получим уравнение неразрывности и уравнения сохранения импульса для электронной и ионной компонент. Для этого проинтегрируем первое и второе уравнение (1) каждое по своему пространству скоростей, а затем умножим первое $\boldsymbol{\xi}$, второе на $\mathbf{v}$, и снова проинтегрируем каждое по своему скоростному пространству (см. [8]). Получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial j_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial j_e^k}{\partial x^k} = 0, \\
\frac{\partial j_i^s}{\partial t} + M_i^s - \frac{e}{m_i} n_i E^s = n_i \nu j_n^s - n_n \nu j_i^s, \\
\frac{\partial j_e^s}{\partial t} + M_e^s + \frac{e}{m_e} n_e E^s = 0, \quad s = 1, 2, 3,
\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$M_i^s = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\int\limits_{D_i} \xi^s \xi^k f_i d\boldsymbol{\xi}\right), \quad M_e^s = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\int\limits_{D_e} v^s v^k f_e d\mathbf{v}\right),$$

$$\text{а} \quad n_n = \int\limits_{D_n} f_n d\mathbf{w}, \quad j_n^s = \int\limits_{D_n} w^s f_n \mathbf{w}, \quad s = 1,2,3.$$

Обозначим через $N = (n^i - n^e)$ и вычтем из уравнения неразрывности для ионов уравнение неразрывности для электронов. Получим $\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0$. Вычтем из уравнений сохранения импульса ионов соответствующие уравнения для электронов. После соответствующей манипуляции, которая заключается в переносе соответствующих членов из одной части уравнения в другую и вычитанию величины $n_n \nu j_e^s$ из обеих частей уравнения, получим

$$\frac{\partial j^s}{\partial t} + n_n \nu j^s - \frac{\overline{n}}{m_e} E^s = R^s, \quad R^s = M_e^s - M_i^s - n_n \nu j_e^s + n_i \nu j_n^s,$$
$$\overline{n} = n_e + \frac{m_e}{m_i} n_i, \quad s = 1,2,3. \tag{7}$$

Возьмем дивергенцию от левой и правой частей (7). Воспользовавшись тем, что $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi e N$, а $\operatorname{div}\overline{\mathbf{j}} = -\frac{\partial N}{\partial t}$, после переноса в правую часть некоторых членов получим

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + n_n \nu \frac{\partial N}{\partial t} + 4\pi \overline{n} \frac{e^2}{m_e} N = Q,$$

где

$$Q = \frac{\partial}{\partial x^s}(M_i^s - M_e^s) + (\nabla(n_n \nu)\cdot \mathbf{j}) + (\nabla(n_n \nu)\cdot \mathbf{j}_e) - (\nabla(n_i \nu)\cdot \mathbf{j}_n) - \left(\nabla\left(\frac{\overline{n}}{m_e}\right)\cdot \mathbf{E}\right),$$
$$\nabla(f) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^s}\right\}, \quad s = 1,2,3.$$

Приведем полученную выше формулу к безразмерному виду. Будем использовать тот факт, что фигурирующая в (1) величина $n_n \nu$ есть (см. [1]) $n_n \nu = n_n^0 \xi_0 \sigma \overline{n}_n \overline{\nu}$, где σ есть сечение столкновений резонансной перезарядки (в расчетах $\sigma = 10^{-14}$ см^2), а величины с чертой наверху обозначают безразмерные переменные. Чтобы иметь возможность анализа наиболее быстро протекающих процессов, происходящих в плазме, за временной масштаб примем самое короткое время – $\overline{t}_0 = \frac{a}{\mathrm{v}_0}$. Рассмотрим подробнее переход к безразмерным переменным в левой части уравнения. Имеем

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = \frac{v_0^2}{a^2} n_0 \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial \overline{t}^2}, \quad n_n \nu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{v_0^2}{a^2} n_0 \left(\frac{a\xi_0}{r_d v_0} n_n^0 r_d \sigma\right) \overline{n}_n \overline{\nu} \frac{\partial \overline{N}}{\partial \overline{t}} = \frac{v_0^2}{a^2} n_0 \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Sh}_e R, \quad R = n_n^0 \sigma r_d = \frac{1}{\mathrm{Kn}_d}$$

где Kn_d есть число Кнудсена, определенное по дебаевскому радиусу r_d:

$$4\pi \overline{n} \frac{e^2}{m_e} N = \frac{v_0^2}{a^2} n_0 \left(\frac{4\pi a^2 e^2 n_0}{m_e v_0^2}\right) \overline{n}^d \overline{N} = \frac{v_0^2}{a^2} n_0 \left(a^2 \frac{2\pi e^2 n_0}{k T_e^0}\right) \overline{n}^d \mathbf{N} = \frac{v_0^2}{2a^2} n_0 \left(\frac{a}{r_d}\right)^2 \overline{n}^d \overline{N} = \frac{v_0^2}{a^2} n_0 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\overline{n}^d \overline{N}}{2}.$$

Если, как это принято, опустить штрихи в безразмерных переменных и индекс у величины $\overline{n}^d$, то приведенное выше уравнение в безразмерном виде будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + \frac{R\mathrm{Sh}_e}{\varepsilon} n_n \nu \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\overline{n}}{2\varepsilon^2} \overline{N} = Q, \tag{8}$$

где

$$Q = \frac{\partial}{\partial x^s}(\mathrm{Sh}_e^2 M_i^s - M_e^s) + \frac{\mathrm{Sh}_e}{\mathrm{Kn}_{in}}((\nabla(n_n\nu)\cdot\mathbf{j}) + (\nabla(n_n\nu)\cdot\mathbf{j}_e) - (\nabla(n_i\nu)\cdot\mathbf{j}_n)) - \left(\nabla\left(\frac{\overline{n}}{2}\right)\cdot\mathbf{E}\right).$$

В последней формуле $\mathbf{j} = \mathrm{Sh}_e\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_e$, $\mathrm{Kn}_{in} = \dfrac{1}{n_n^0\sigma a}$.

Наличие малого параметра ε в левой части (8) указывает на то, что макроскопическое движение заряженных компонент плазмы будет происходить в двух временных масштабах: а именно — в режиме “ быстрого времени”, когда $\dfrac{\partial N}{\partial t} = O\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, и в масштабе, когда $\dfrac{\partial^2 N}{\partial t^2} \approx \dfrac{\partial N}{\partial t} = O(1)$. Для исследования возникающего движения воспользуемся разработанными в [9] асимптотическими методами.

Введем “быстрое время” формулой $\overline{t} = \dfrac{(t - t_0)}{\varepsilon}$. Нетрудно видеть, что по порядку величины это — время, которое требуется электронам, чтобы переместиться на расстояние порядка дебаевского радиуса. Будем искать решение (8) в виде разложения по параметру ε:

$$N = \overline{N}(\overline{t},\mathbf{x}) + \varepsilon N_1(\overline{t},\mathbf{x}) + \varepsilon^2 N_2(\overline{t},\mathbf{x}) + O(\varepsilon^3). \tag{9}$$

Подставим (9) в уравнение

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + \varepsilon R\,\mathrm{Sh}_e\, n_n\nu\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\overline{n}}{2}\overline{N} = \varepsilon^2 Q.$$

Учитывая, что

$$n_n(t_0 + \varepsilon\overline{t},\mathbf{x})\nu(t_0 + \varepsilon\overline{t},\mathbf{x}) = n_n(t_0,\mathbf{x})\nu(t_0,\mathbf{x}) + O(\varepsilon),$$
$$\overline{n}(t_0 + \varepsilon\overline{t},\mathbf{x}) = \overline{n}(t_0,\mathbf{x}) + O(\varepsilon), \quad Q(t_0 + \varepsilon\overline{t},\mathbf{x}) = Q(t_0,\mathbf{x}) + O(\varepsilon),$$

получим

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2\overline{N}}{\partial\overline{t}^2} + \alpha\frac{\partial\overline{N}}{\partial\overline{t}} + \frac{\overline{n}(t_0,\mathbf{x})}{2}\overline{N}\right) + \varepsilon\left(\left(\frac{\partial^2 N_1}{\partial\overline{t}^2} + \alpha\frac{\partial N_1}{\partial\overline{t}} + \frac{\overline{n}(t_0,\mathbf{x})}{2}N_1\right)\right) + \\ + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 N_2}{\partial\overline{t}^2} + \alpha\frac{\partial N_2}{\partial\overline{t}} + \frac{\overline{n}(t_0,\mathbf{x})}{2}N_2\right) = \varepsilon^2 Q(t_0,\mathbf{x}), \quad \alpha = R\cdot n_n(t_0,\mathbf{x})\nu(t_0\mathbf{x}).\end{gathered} \tag{10}$$

Откуда получим, что

$$\frac{\partial^2\overline{N}}{\partial\overline{t}^2} + \alpha\frac{\partial\overline{N}}{\partial\overline{t}} + \frac{\overline{n}(t_0,\mathbf{x})}{2}\overline{N} = 0, \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial\overline{t}^2} + \alpha\frac{\partial N_1}{\partial\overline{t}} + \frac{\overline{n}(t_0,\mathbf{x})}{2}N_1 = 0,$$

и

$$\frac{\partial^2 N_2}{\partial\overline{t}^2} + \alpha\frac{\partial N_2}{\partial\overline{t}} + \frac{\overline{n}(t_0,\mathbf{x})}{2}N_2 = Q(t_0,\mathbf{x}).$$

Пусть $N(t_0) \neq 0$, что означает отсутствие квазинейтральности в момент времени t_0. Тогда

$$\overline{N}(\overline{t},\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{l} Ae^{-\propto\overline{t}}\cos(\omega\overline{t} + \varphi), \quad \omega^2 = \dfrac{\overline{n}}{2} - \dfrac{\alpha^2}{4} > 0, \\ Ae^{-\alpha_1\overline{t}} + Be^{-\alpha_2\overline{t}}, \quad \alpha_1 = \dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{\overline{n}}{2}}, \quad \alpha_2 = \dfrac{\alpha}{2} - \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{\overline{n}}{2}}. \end{array}\right. \tag{11}$$

Не ограничиваясь общностью, положим $N_1(\overline{t},\mathbf{x}) = 0$, а $N_2(\overline{t},\mathbf{x}) = \dfrac{2}{\overline{n}(t_0,\mathbf{x})}Q(t_0,\mathbf{x})$. Тогда с точностью до $O(\varepsilon^3)$ решение (10) записывается в виде

$$N(\overline{t},\mathbf{x}) = \overline{N}(\overline{t},\mathbf{x}) + \frac{2\varepsilon^2}{\overline{n}(t_0,\mathbf{x})}Q(t_0,\mathbf{x}). \tag{12}$$

Из (12) следует, что если в какой-то момент времени нарушается квазинейтральность, то в режиме быстрого времени квазинейтральность устанавливается или в режиме обычной экспоненциальной релаксации.

При получении решения (9) в режиме времени t решение также раскладывается в ряд по параметру ε. Опуская несложные выкладки, можно получить, что в этом случае

$$N(t-t_0,\mathbf{x}) = \varepsilon^2\frac{2Q(t-t_0,\mathbf{x})}{\overline{n}(t-t_0,\mathbf{x})} + O(\varepsilon^3).$$

В [9] указано, что разложения, полученные в разных масштабах, согласуются при помощи процедуры сращивания. Если сращивание разложений можно осуществить, то можно построить равномерно пригодное разложение. В нашем случае равномерно пригодное разложение есть

$$N\left(t-t_0,\mathbf{x}\right) = \bar{N}\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon},\mathbf{x}\right) + \frac{2\varepsilon^2}{\overline{n}\left((t-t_0),\mathbf{x}\right)}Q\left((t-t_0),\mathbf{x}\right) + O(\varepsilon^3). \quad (13)$$

Из (13) следует, что, если вдруг в плазме нарушится квазинейтральность, т.е. $N\left(t_0\right) \neq O(\varepsilon^2)$, то в течение времени $\Delta t = (t-t_0) \approx \varepsilon$ возникнут процессы, которые приведут к установлению квазинейтральности.

Полученный результат является обобщением результатов, имеющихся в [7]. Там, когда рассматривался вопрос, связанный с затуханием Ландау, после ряда допущений было получено, что если квазинейтральности нет, то возникают колебания с частотой $\omega^2 = \dfrac{n^e}{4\pi e^2 m^e}$. В (8) именно этот член в безразмерной форме определяет частоту возникающих колебаний. В [7] также отмечается, что возникающие колебания будут затухающими, и на примере диффузионного приближения показывается, что если $N(t_0) \neq 0$, то $N(t)$ будет за время $\Delta t = (t-t_0) \gg \varepsilon$ будет приближаться к квазинейтральному режиму. В нашем случае этот результат также получается. Действительно, если в (11) $\dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{\overline{n}}{2} > 0$, то решение определяется формулой (12), и α_2 будет соответствовать полученной в [7] константе в показателе экспоненты. Идея проведенного выше анализа возникла именно тогда, когда авторы ознакомились с проведенным в [7] анализом диффузионного приближения. Собственно, проведенный выше анализ есть обобщение изложенного в [7] метода на систему уравнений сохранения, которые были получены из приведенных кинетических уравнений. Нетрудно видеть, что фигурирующая в (9) α пропорциональна числу столкновений, которые испытают носители заряда на длине Дебайя в единицу времени, поэтому ее величина будет определяться числом Kn_d.

Следует отметить, что (9) было получено без условия потенциальности электрического поля. Кинетическое уравнение для электронов в случае учета ионизации будет другим. Это приведет к тому, что изменятся выражения для частот столкновений в левой части уравнения, а также $Q(t,\mathbf{x})$. Но тип уравнения (8) не изменится, поэтому выше приведенный результат имеет достаточно общий характер.

Можно предложить естественную схему численного решения (3), (4). Пусть в момент времени t_i известны функции распределения и электрическое поле. Методом, описанным в [1], можно найти все функции распределения в момент времени $[t_i, t_i + \Delta t]$, а значит, все макропараметры, в том числе $N(t_i + \Delta t)$.

Потенциал электрического поля определится тогда из уравнения Пуассона

$$\varepsilon^2\Delta\varphi = N(t_i + \Delta t, \mathbf{x}). \quad (14)$$

Так и делается во всех работах, где решалась задача о движении плазмы в канале ускорителя. Только в этих работах $N(t_i + \Delta t, \mathbf{x})$ находилась методом статистического моделирования (метод Берда). Для получения решения уравнения Пуассона (14) необходимо корректно поставить граничные условия, которые ниоткуда не следуют (речь идет о граничных условиях для потенциала электрического поля в плазме). В упомянутых выше работах для решения этой проблемы приходилось идти на ряд существенно ограничивающих полученные результаты допущений. Например, предполагалось, что электрическое поле $\mathbf{E} = (z, \varphi)$, где z – длина канала, а φ – полярный угол (движение в канале предполагалось осесимметричным), а до этого делались абсурдные предположения, что моделирование происходит для плазмы с другой диэлектрической проницаемостью. Нужно отметить также, что величина шага интегрирования должна выбираться так, чтобы $\min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} < \varepsilon^2$. Последнюю проблему удается как-то решить, так как за последнее время существенно возросли возможности ЭВМ. Следует также отметить, что в описанной выше схеме никак не учитывается процесс установления квазинейтральности в плазме, а это может привести к возникновению в численном решении незатухающих плазменных колебаний.

Чтобы ввести в численную схему учет процесса установления квазинейтральности, на промежутке $[t_i, t_i + \Delta t]$ будем решать уравнение (8). Для получения его решения запишем явную схему, т.е.

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + \varepsilon R \mathrm{Sh}_e n_n(t_i, \mathbf{x}) \nu(t_i, \mathbf{x}) \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\overline{n}(t_i, \mathbf{x})}{2} N = \varepsilon^2 Q(t_i, \mathbf{x}). \tag{15}$$

Решение уравнения (15) есть $N(t_i + \Delta t, \mathbf{x}) = g(t_i, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 Q(t_i, \mathbf{x})$, где

$$g(t_i, \mathbf{x}) = \begin{cases} A\cos(\omega \Delta t + \varphi), & \omega^2 = \dfrac{\overline{n}(t_i, \mathbf{x})}{2} - \left(\dfrac{n_n(t_i, \mathbf{x})\nu(t_i, \mathbf{x})}{2\mathrm{Kn}_d}\right)^2 > 0, \\ Ae^{-\alpha_1 \Delta t} + Be^{-\alpha_2 \Delta t}, & \alpha_{1,2} = \dfrac{n_n(t_i, \mathbf{x})\nu(t_i, \mathbf{x})}{\mathrm{Kn}_d} \pm \sqrt{\left(\dfrac{n_n(t_i, \mathbf{x})\nu(t_i, \mathbf{x})}{2\mathrm{Kn}_d}\right)^2 - \dfrac{\overline{n}(t_i, \mathbf{x})}{2}}. \end{cases}$$

Отсутствие числа Струхаля Sh_e объясняется тем, что шаг Δt берется в режиме решения кинетических уравнений.

Подставляя найденное решение в правую часть (14), получим $\Delta\varphi = \dfrac{g(t_i, \mathbf{x})}{\varepsilon^2} + Q(t_i, \mathbf{x})$. Откуда находится

$$\varphi(t_i + \Delta t, \mathbf{x}) = \int\limits_V \frac{\dfrac{g(t_i, \mathbf{y})}{\varepsilon^2} + Q(t_i, \mathbf{y})}{4\pi\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}} d\mathbf{y} + \varphi_{oot}. \tag{16}$$

В (16) интегрирование ведется по всей счетной области V, а параметр φ_{oot} есть значение потенциала электрического поля, в котором находится двигатель. Предполагается, что он известен, и удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi_{oot} = 0$. Такой способ действия решает проблему граничных условий, которые должны быть установлены, чтобы получить решение (14). С этим электрическим полем на шаге промежутка $[t_i, t_i + \Delta t]$ находится решение системы кинетических уравнений. По найденным функциям распределения находятся все макропараметры в момент времени $t_i + \Delta t$, и процесс, если нужно, повторяется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение полностью кинетического подхода к исследованию плазменной струи позволило получить систему уравнений сохранения, которым подчиняется это движение. Проведенный анализ уравнений сохранения позволил изучить процесс установления квазинейтральности в движущейся плазменной среде, что позволило построить численный метод совместного решения кинетических уравнений и уравнения Максвелла. Этот метод основывается на том, что некоторые макропараметры находятся из решения уравнений сохранения, замкнутых с помощью соответствующих функций распределения. Такой метод решения кинетических уравнений был разработан в [10] и показал свою эффективность. Подводя итог приведенному выше анализу, надо отметить, что он позволил вскрыть механизм установления квазинейтральности в плазме и установить временные масштабы этого процесса, что является основным результатом данной статьи.

Следует отметить, что описанный выше метод исследования предполагается использовать для моделирования процессов, происходящих в ускорительных каналах электроракетных двигателей. При этом ясно, что движение электронов уже не будет свободномолекулярным, так как необходим учет ионизации. Необходимо также будет каким-то образом, рассмотрев задачу о взаимодействии электронов с твердой поверхностью, решить проблему формулирования граничных условий для функции распределения электронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абгарян М.В., Бишаев А.М.* Модернизация метода расщепления для решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение струи разреженной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 39. № 7. С. 1132–11146.
2. *Абгарян М.В., Бишаев А.М.* Нестационарная модель струи разреженной плазмы, истекающей из Стационарного плазменного двигателя // Физ. пламы. 2018. Т. 4. № 2. С. 238–249.
3. *Жевандров П.И., Морозов А.И., Якунин С.А.* Динамика плазмы, образующейся при ионизации разреженного газа // Физ. плазмы. 1984. Т. 10. Вып. 2. С. 353–365.
4. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Физматлит, 1987. 592 с.
5. *Власов А.А.* Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1976. 264 с.
6. *Франк-Каменецкий Д.А.* Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1968. 285 с.
7. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика.Т. Х. М.: Наука, 1987. 527 с.
8. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука,1967. 440 с.
9. *Коул. Дж.* Методы возмущения в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
10. *Бишаев А.М., Рыков В.А.* Решение стационарных задач кинетической теории газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 1. С. 172–182.