

## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.632

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФЕКТОВ И ПОСТРОЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ СЕТОК В ОБЛАСТЯХ С УГЛАМИ И ВЫЕМКАМИ<sup>1)</sup>

© 2023 г. С. И. Безродных<sup>1,\*</sup>, В. И. Власов<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

\*e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

\*\*e-mail: vlasovvi46@gmail.com

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.

Переработанный вариант 08.04.2023 г.

Принята к публикации 14.05.2023 г.

Представлен обзор ряда работ, посвященных трудностям построения гармонических сеток в плоских областях с углами и выемками, а также приведены некоторые новые результаты. Известно, что гармоническая сетка, построенная с помощью общепринятых методов в областях с выемками или входящими (т.е. большими  $\pi$ ) углами, может содержать такие дефекты, как ее самопересечение или выход за пределы области. Установлено, что вблизи вершины входящего угла эти дефекты вытекают из построенной в работе асимптотики используемого гармонического отображения, согласно которой изолиния, исходящая из этой вершины, касается в ней одной из сторон угла (т.е. возникает эффект “прилипания”), за исключением особого случая. Для трех типов областей  $\mathcal{L}$  с углами или выемками ( $L$ -образной, подковообразной и области с прямоугольным вырезом), применение к которым общепринятых методов построения гармонической сетки наталкивается на известные трудности, дан обзор известных результатов. Применение к этим областям метода мультиполей позволило получить их гармоническое отображение с высокой точностью: апостериорная оценка погрешности отображения в норме  $C(\mathcal{L})$  составила  $10^{-7}$  при использовании 120 аппроксимативных функций. Библ. 53. Фиг. 19.

**Ключевые слова:** гармонические отображения, области  $g$  с углами и выемками, асимптотика отображения вблизи вершин углов, аналитико-численный метод построения гармонического отображения, апостериорная оценка погрешности в норме  $C(\bar{g})$ , метод мультиполей.

DOI: 10.31857/S0044466923120062, EDN: RDOLTG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1. Общие замечания

Распространенный способ генерации регулярных четырехугольных расчетных сеток  $\mathfrak{Z}$  в плоских областях  $\mathcal{L}$  сложной формы, использующий гармоническое отображение (см. [1–8]), основан на подходе Уинслоу (см. [9]), который сводит построение такого отображения  $\mathcal{F}$  к решению квазилинейной эллиптической системы уравнений второго порядка в канонической области (например, в прямоугольнике). Для решения этой системы были предложены как конечно-разностные (см. [10, 11]), так и вариационные методы (см. [12–16]), получившие глубокое развитие и позволившие успешно применить генерируемую сетку к широкому кругу научно-технических проблем (см. [10–43]).

Вместе с тем в ряде случаев такой подход наталкивается на серьезные вычислительные трудности (см. [17–26, 33, 35–40]), которые проявляются в том, что генерируемая сетка имеет низкое качество или у нее возникают такие дефекты, как самоналегание или выход за пределы расчетной области, что делает такую сетку непригодной для использования.

Здесь рассмотрены некоторые из таких трудностей и проведен аналитический обзор работ, где они встречались. Одна из трудностей (см. [15, 22, 23–40]), возникающая вблизи вершины входящего угла (рассмотренная в подпункте 2.2.2), вызвана эффектом “прилипания”, когда изо-

<sup>1)</sup> В.И.Власовым работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

линия отображения, исходящая из вершины угла, касается в ней одной из сторон угла, за исключением особого случая. Дано теоретическое объяснение этого эффекта (см. подпункт 3.3.4), основанное на проведенном (см. разд. 3) исследовании сингулярного поведения отображения  $\mathcal{F}$  вблизи вершины угла, включающем получение соответствующих асимптотик; исследование является развитием работ [48, 49].

Такие же трудности при построении отображения  $\mathcal{F}$  (и, как следствие, дефекты сетки  $\mathfrak{Z}$ ) возникают и для областей с выемками (см. [14–17, 19, 20, 22–26, 33–39]).

Для известной области с полукруговой выемкой (такую область называют подковообразной) в работах [22, 33, 36–39] проводились исследования по изучению и преодолению трудностей, возникающих при построении в ней гармонической сетки (см. подпункты 2.3.1 и 2.3.2). Применение к этой задаче метода мультиполей (см. [44–46]), кратко изложенного в п. 4.1, позволило в работах [34, 47] получить ее решение (см. п. 4.3) с высокой точностью.

Применение этого метода в п. 4.2 к ряду областей  $L$ -образной формы (такие области широко используются в различных задачах) обеспечило генерацию их гармонического отображения с высокой точностью (см. подпункт 2.2.3) и позволило численно проиллюстрировать эффект “прилипания”, возникающий вблизи вершины входящего угла этих областей.

Те же трудности при построении гармонической сетки – ее самоналегание или выход за пределы исходной области – возникают, как показано в работах [15, 19, 22, 25], для областей, содержащих прямоугольный вырез. Применение и к этим областям метода мультиполей позволило, согласно результатам из [53] и их развитию в п. 4.4, построить высокоточное отображение: апостериорная оценка его погрешности в норме  $C(\overline{\mathcal{L}})$  составила, как и для рассмотренных  $L$ -образной и подковообразной областей, величину  $10^{-7}$  при использовании 120 аппроксимативных функций.

Отметим, что численные результаты, приведенные на фиг. 6–10, заимствованы из работ Б.Н. Азаренка, а часть других результатов и иллюстраций – из работ авторов.

### 1.2. Гармоническое отображение

Пусть жордановы области  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{W}$  расположены соответственно на комплексных плоскостях  $z = x + iy = re^{i\varphi}$  и  $w = u + iv = \rho e^{i\theta}$  (здесь  $i$ , как обычно, – мнимая единица), и пусть  $B : \partial\mathcal{L} \xrightarrow{\text{hom}} \partial\mathcal{W}$  есть заданный гомеоморфизм их границ, сохраняющий ориентацию. Если функция

$$\mathcal{F}(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in C(\overline{\mathcal{L}}) \quad (1.1)$$

представляет собой решение (векторной) задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta \mathcal{F}(z) = 0, \quad z \in \mathcal{L}; \quad \mathcal{F}(z) = B(z), \quad z \in \partial\mathcal{L}, \quad (1.2)$$

обеспечивающее гомеоморфизм замыканий областей,  $\mathcal{F} : \overline{\mathcal{L}} \xrightarrow{\text{hom}} \overline{\mathcal{W}}$  (достаточным условием для этого, согласно теореме Радó–Кнезера–Шоке (см. [1–4]), является выпуклость области  $\mathcal{W}$ ), то говорят, что эта функция  $w = \mathcal{F}(z)$  осуществляет гармоническое отображение области  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{W}$ , и пишут  $\mathcal{F} : \mathcal{L} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{W}$ .

Отметим, что в литературе имеются и несколько иные определения гармонического отображения, в том числе соответствующие более общим ситуациям (см. [5–8] и приведенную там библиографию). Заметим еще, что отображение  $\mathcal{F}$  является квазиконформным (см. [4, 8]).

На границах областей  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{W}$  можно ввести натуральную параметризацию координат точек через длины дуг ( $s(z)$  на  $\partial\mathcal{L}$  и  $\sigma(w)$  на  $\partial\mathcal{W}$ ) с направлением отсчета длин, соответствующим правильному порядку обхода областей (при котором они остаются слева). Связь между  $s$  и  $\sigma$  при граничном гомеоморфизме  $w = B(z)$  запишем в виде зависимости  $\sigma = \mathfrak{B}(s)$ .

### 1.3. Приложение гармонических отображений к построению сеток

Важным применением гармонических отображений является построение расчетных сеток  $\mathfrak{Z}$  в областях  $\mathcal{L}$  сложной конфигурации; созданные с помощью таких отображений сетки называют гармоническими. Подразумевается, что сетка  $\mathfrak{Z}$  соответствует форме области  $\mathcal{L}$ , т.е. она постро-

ена на основе такого отображения  $\mathcal{F}$  из (1.1), для которого граница  $\partial\mathcal{L}$  области состоит из линий уровня его вещественной или мнимой части. Отметим, что проблематике построения гармонических и адаптивно-гармонических сеток посвящено большое число работ (см. [9–40] и приведенную там библиографию).

В качестве образа области  $\mathcal{L}$  в таких приложениях часто берут прямоугольник

$$\Pi := \{w = u + iv : u \in (-L, L), v \in (0, H)\}, \quad L, H > 0, \quad (1.3)$$

либо квадрат  $\mathcal{Q} := \{u \in (0, 1), v \in (0, 1)\}$ , поскольку эти области являются выпуклыми, что по теореме Радó–Кнезера–Шоке обеспечивает гомеоморфизм  $\mathcal{F} : \mathcal{L} \xrightarrow{\text{hom}} \Pi$  используемого отображения. Кроме того, эти области удобны для реализации конечно-разностных схем, так как обладают естественной декартовой сеткой. Остановимся на случае прямоугольника  $\Pi$  (рассмотрение квадрата  $\mathcal{Q}$  проводится аналогично).

Декартова сетка  $\mathfrak{Z}$  в прямоугольнике  $\Pi$  образована узлами  $w_{m,n}$  с шагом  $h$ :

$$w_{m,n} = u_m + iv_n := h(m + in), \quad m = -M, -M + 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

и состоит из квадратных ячеек  $\pi_{m,n}$  (см. фиг. 1а) со сторонами

$$(w_{m,n}, w_{m+1,n}), \quad (w_{m+1,n}, w_{m+1,n+1}), \quad (w_{m+1,n+1}, w_{m,n+1}), \quad (w_{m,n+1}, w_{m,n}), \quad (1.5)$$

называемыми ребрами. Здесь и далее порядок перечисления точек в обозначениях граничных дуг соответствует правильному порядку обхода области — в данном случае ячейки  $\pi_{m,n}$ . Сетка  $\mathfrak{Z}$  играет роль базовой, т.е. на ее основе строится требуемая расчетная сетка  $\mathfrak{Z}$ . Полуширина  $L$  и высота  $H$  прямоугольника  $\Pi$  при заданных  $h$ ,  $M$  и  $N$ , очевидно, равны  $L = hM$ ,  $H = hN$ .

В задачах построения сетки граничный гомеоморфизм  $w = B(z)$ , входящий в краевое условие (1.2), обычно задают таким образом, что если его переписать (как сказано в п. 1.1) через текущие длины дуг в виде  $\sigma = \mathfrak{B}(s)$ , то производная  $d\mathfrak{B}/ds$  будет кусочно-постоянной на границе  $\partial\mathcal{L}$ , которая в этих задачах предполагается кусочно-гладкой. Иначе говоря,  $\partial\mathcal{L}$  состоит из конечного числа таких звеньев  $l_k$  (тогда  $\partial\mathcal{L} = \bigcup_k l_k$ ), что при равномерном движении точки  $z$  по каждому из них ее образ  $w = B(z)$  будет перемещаться по  $\partial\mathcal{W}$  с постоянной скоростью  $d\mathfrak{B}/ds$ , своей для каждого звена  $l_k$ .

Если отображение

$$\mathcal{F} : \mathcal{L} \xrightarrow{\text{hom}} \Pi \quad (1.6)$$

найденно, то требуемая (регулярная) расчетная сетка  $\mathfrak{Z}$  в области  $\mathcal{L}$  строится с помощью обратного отображения

$$z = \mathcal{F}^{-1}(w) = x(u, v) + iy(u, v) : \Pi \xrightarrow{\text{harm}^{-1}} \mathcal{L} \quad (1.7)$$

как совокупность четырехугольных ячеек  $\sigma_{m,n}$  (см. фиг. 1б) со следующими (прямолинейными) ребрами:

$$(z_{m,n}, z_{m+1,n}), \quad (z_{m+1,n}, z_{m+1,n+1}), \quad (z_{m+1,n+1}, z_{m,n+1}), \quad (z_{m,n+1}, z_{m,n}), \quad (1.8)$$

где узлы  $z_{m,n}$  генерируемой сетки  $\mathfrak{Z}$  задаются как образы узлов  $w_{m,n}$  базовой сетки  $\mathfrak{Z}$ , т.е.

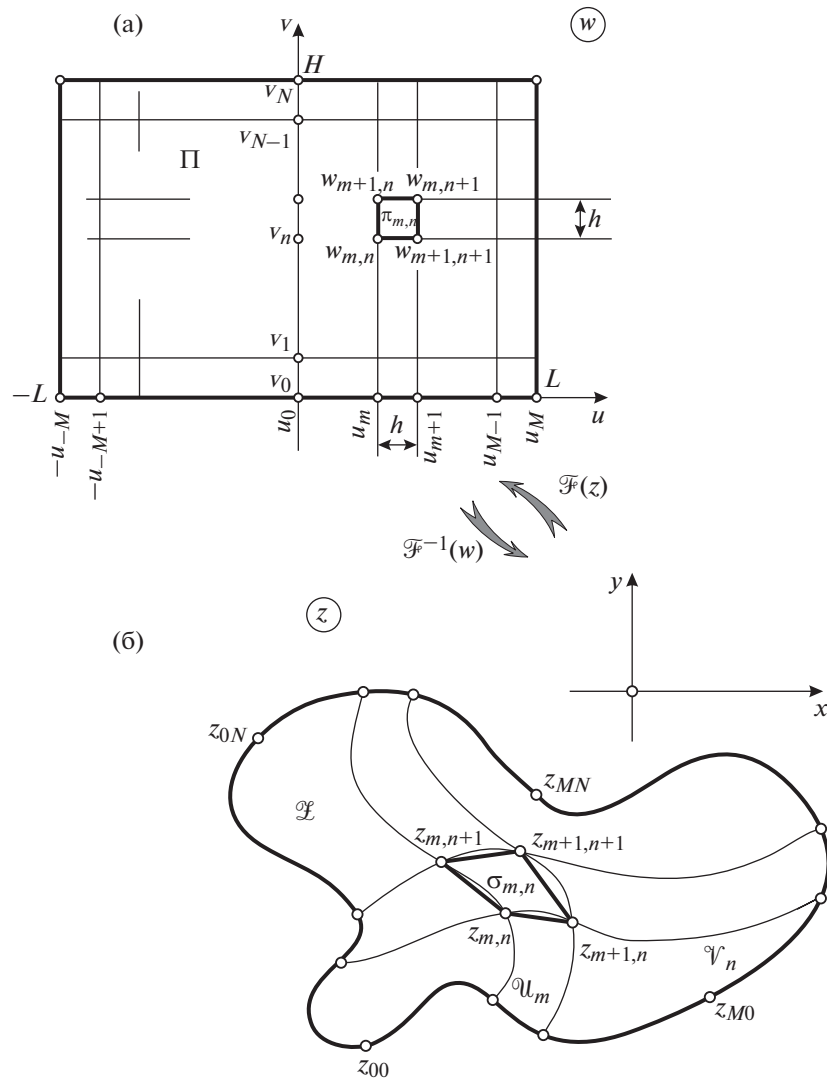
$$z_{m,n} := \mathcal{F}^{-1}(w_{m,n}), \quad m = -M, -M + 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Таким образом, изображенная на фиг. 1а ячейка  $\pi_{m,n}$  с ребрами (1.5) является базовой для изображенной на фиг. 1б ячейки  $\sigma_{m,n}$  с ребрами (1.8).

Если все ячейки  $\sigma_{m,n}$  построенной сетки

$$\mathfrak{Z} = \{\sigma_{m,n}\}_{m=-M, n=0}^{M-1, N-1}$$

не имеют наложений, самопересечений и не выходят за пределы исходной области  $\mathcal{L}$ , то такую сетку называют невырожденной (см. [17, 18]). Построенная таким образом регулярная четырехугольная сетка  $\mathfrak{Z}$  может служить основой для применения разностных или конечноэлементных методов (о них см., например, [17, 41–43]) к решению задач математической физики в области  $\mathcal{L}$ .



Фиг. 1

Очевидно, что узлы  $z_{m,n}$  сетки  $\mathfrak{Z}$  можно рассматривать и как точки пересечения  $u$ -изолиний  $\mathcal{U}_m$  с  $v$ -изолиниями  $\mathcal{V}_n$  гармонического отображения (1.6); эти линии определяются по формулам

$$\mathcal{U}_m := \{z = \mathcal{F}^{-1}(u + iv) : u = u_m, v \in [0, H]\}, \quad (1.9)$$

$$\mathcal{V}_n := \{z = \mathcal{F}^{-1}(u + iv) : u \in [-L, L], v = v_n\}, \quad (1.10)$$

где согласно (1.4)  $u_m = hm$ ,  $v_n = hn$ . На фиг. 1б (криволинейные) изолинии  $\mathcal{U}_m$ ,  $\mathcal{V}_n$  изображены тонкими, а (прямолинейные) ребра, ограничивающие ячейку  $\sigma_{m,n}$ , — более жирными линиями. Из (1.9), (1.10) ясно, что изолинии

$$\mathcal{V}_0 = (z_{-M,0}, z_{M,0}), \quad \mathcal{U}_M = (z_{M,0}, z_{M,N}), \quad \mathcal{V}_N = (z_{M,N}, z_{-M,N}), \quad \mathcal{U}_{-M} = (z_{-M,N}, z_{-M,0})$$

представляют собой образы (при отображении  $\mathcal{F}^{-1}$ ) сторон прямоугольника  $\Pi$  и являются последовательно соединенными звеньями границы  $\partial\mathcal{L}$ . Расположенные на ней узлы сетки  $\mathfrak{Z}$  называем, естественно, *граничными узлами*.

Заметим еще, что распределение по области  $\mathcal{L}$  изолиний  $\mathcal{U}_m, \mathcal{V}_n$  при  $m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1}$  дает наглядное представление о рассматриваемом отображении  $\mathcal{F} : \mathcal{L} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{W}$ ; это распределение будем называть *картиной отображения*  $\mathcal{F}$  в области  $\mathcal{L}$  (примеры приведены ниже).

## 2. НЕКОТОРЫЕ ТРУДНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ СЕТОК

### 2.1. Вычислительный подход Уинслоу и возникающие трудности

Итак, требуемое отображение  $\mathcal{F}$  может быть найдено как решение задачи (1.2) для уравнения Лапласа. Но так как область  $\mathcal{L}$  имеет сложную конфигурацию (ставится вопрос о построении сеток именно в таких областях), то для решения этой задачи пришлось бы применить численные методы, реализация которых, в свою очередь, требует наличия сетки, отражающей форму области. Получается, что для построения сетки, соответствующей данной области, нужно уже иметь такую сетку!

Выход из этого порочного круга был указан А. Уинслоу (см. [9]), который предложил строить не прямое  $w = \mathcal{F}(z)$ , а обратное гармоническое отображение  $\mathcal{F}^{-1}(w) = x(u, v) + iy(u, v)$  как решение в прямоугольнике  $\Pi$  следующей (квазилинейной) системы уравнений для его компонент:

$$\begin{aligned} (x_v^2 + y_v^2)x_{uu} - 2(x_u x_v + y_u y_v)x_{uv} + (x_u^2 + y_u^2)x_{vv} &= 0, \\ (x_v^2 + y_v^2)y_{uu} - 2(x_u x_v + y_u y_v)y_{uv} + (x_u^2 + y_u^2)y_{vv} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где нижние индексы  $u, v$  означают соответствующие частные производные. Система (2.1) получается путем обращения оператора Лапласа из постановки (1.2), примененного к векторной функции (1.1), а краевая задача в прямоугольнике  $\Pi$  для системы (2.1) включает граничное условие Дирихле

$$x(u, v) + iy(u, v) = B^{-1}(w), \quad w = u + iv \in \partial\Pi, \quad (2.2)$$

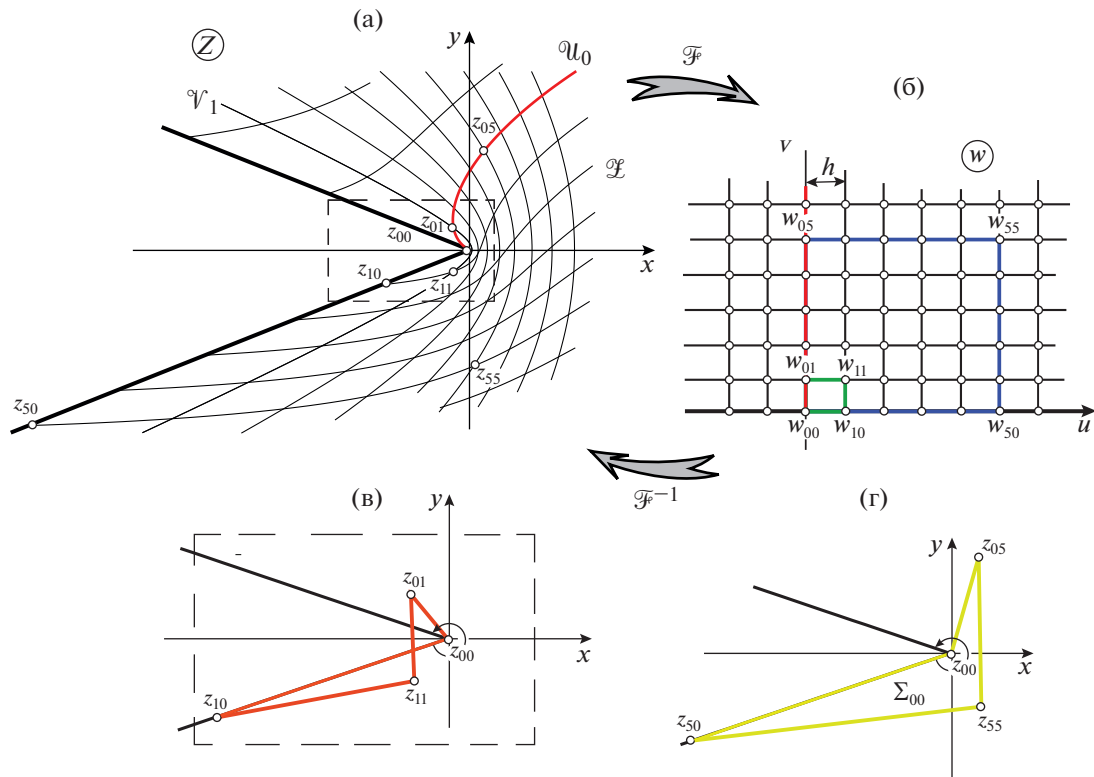
где  $B^{-1} : \partial\Pi \xrightarrow{\text{hom}} \partial\mathcal{L}$  есть граничный гомеоморфизм, обратный по отношению к гомеоморфизму  $B$ , фигурирующему в постановке (1.2).

Чтобы построить искомую расчетную сетку  $\mathfrak{Z}$ , достаточно найти ее узлы  $z_{m,n} = \mathcal{F}^{-1}(w_{m,n})$ , представляющие собой значения решения краевой задачи (2.1), (2.2) в узлах базовой сетки  $\mathfrak{B}$ . Используя удобство этой декартовой сетки для формирования численных схем, были разработаны две группы методов построения (дискретизированного приближенного) решения данной задачи: конечно-разностные методы, берущие начало в работах [10, 11], и вариационные (см. [12–16]), основанные на минимизции дискретизированного (на базовой сетке  $\mathfrak{B}$ ) функционала Дирихле для системы (2.1) или родственного функционала. Обе группы методов, развивающие описанный подход Уинслоу, получили широкое распространение и достигли значительного прогресса (см., в частности, монографии [17, 18, 19–26] и обзоры [27–34]).

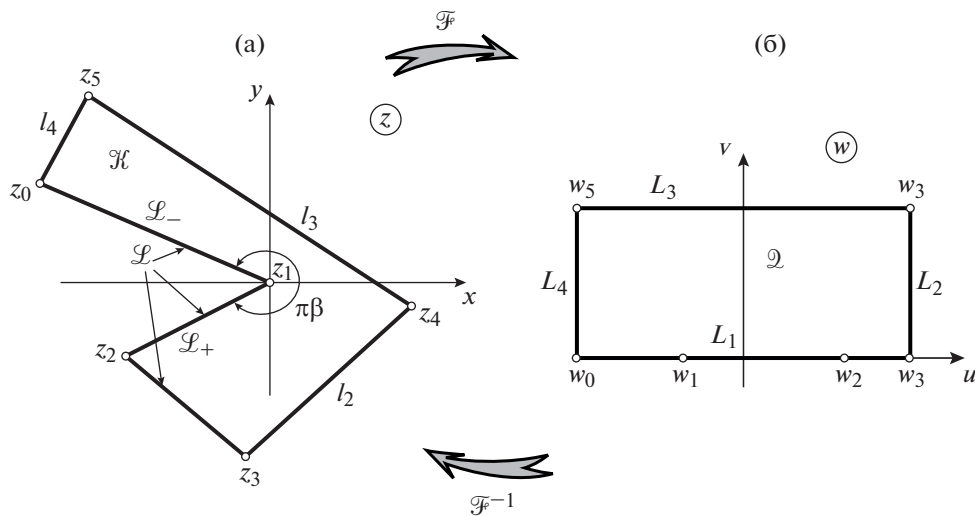
Вместе с тем было обнаружено, что в ряде случаев (см., например, [17, 22–26, 33, 35–40]) генерируемая сетка  $\mathfrak{Z}$  имеет низкое качество и может содержать такие серьезные дефекты, как самоналегание и выход за пределы расчетной области  $\mathcal{L}$ , что делает сетку  $\mathfrak{Z}$  непригодной для использования.

Появление этих затруднений часто связывают (см. [17, 10, 19–23, 35] и др.) с обращением в нуль якобиана или нарушением гомеоморфизма гармонического отображения (1.6), с помощью которого строится сетка. Оказывается, однако, что указанные трудности могут возникать и тогда, когда отображение обеспечивает гомеоморфизм замкнутых областей (т.е.  $\mathcal{F} : \mathcal{L} \xrightarrow{\text{hom}} \overline{\Pi}$ ), и даже тогда, когда дополнительно якобиан отображения положителен в замыкании  $\overline{\mathcal{L}}$  исходной области. Подчеркнем, что здесь речь идет не о дискретизированном приближенном решении задачи (2.1), (2.2), а об отображении  $\mathcal{F}$ , рассматриваемом теоретически. Различие между дискретизированным и континуальным представлениями в проблеме построения сеток обсуждается в [36].

В настоящей работе мы рассматриваем следующие три ситуации (на практике их гораздо больше, см. приведенную выше литературу), когда могут возникать указанные трудности:



Фиг. 2



Фиг. 3

1) граница области содержит входящий угол, т.е. превышающий  $\pi$ ; типичным примером является  $L$ -образная область (см. фиг. 3а);

2) область содержит полукруговую выемку, как в случае подковообразной области (см. фиг. 10а);

3) область имеет прямоугольный вырез (см. фиг. 14а).

Эти ситуации обсуждаются ниже соответственно в п. 2.2 (см. подпункты 2.3.1–2.3.3).

## 2.2. Дефекты гармонической сетки вблизи вершины входящего угла

**2.2.1. Эффект “прилипания”.** Возникновение вблизи вершины входящего угла таких негативных явлений, как невыпуклость ячеек гармонической сетки или их самоналегание, представляет собой следствие эффекта “прилипания”, характерного для отображения (1.6), используемого при построении сетки  $\mathfrak{Z}$ , вблизи входящих углов. Эффект заключается в том, что изолиния отображения, выходящая из указанной вершины, касается в ней одной из сторон угла, за исключением особого случая.

Пример проявления этого эффекта приведен на фиг. 2а, где изображен фрагмент области  $\mathcal{L}$ , содержащей входящий угол с контуром

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_- \cup \{0\} \cup \mathcal{L}_+, \quad \mathcal{L}_\pm := \{r \in (0, R_\pm), \varphi = \mp \pi\beta/2\}, \quad \beta \in (1, 2), \quad (2.3)$$

а также представлена картина гармонического отображения  $u(z) + iv(z) = \mathcal{F}(z)$  области  $\mathcal{L}$  на прямоугольник  $\Pi$ , подчиненного граничному гомеоморфизму

$$u(z) = -\sigma_- r, \quad z \in \mathcal{L}_-, \quad u(0) = 0, \quad u(z) = \sigma_+ r, \quad z \in \mathcal{L}_+, \quad v(z) = 0, \quad z \in \mathcal{L}, \quad (2.4)$$

где  $\sigma_-$  и  $\sigma_+$  — положительные числа.

На фиг. 2а видно, что изображенная красным цветом изолиния

$$\mathcal{U}_0 = \{z = \mathcal{F}^{-1}(u + iv) : u = 0, v \in [0, H]\}, \quad (2.5)$$

исходящая из вершины  $z = 0$ , касается в ней стороны  $\mathcal{L}_-$ . Соответствующий фрагмент базовой сетки  $\mathfrak{Z}$  дан на фиг. 2б, где красным цветом изображен образ  $\mathcal{F}(\mathcal{U}_0) = \{w : u = 0, v \in [0, H]\}$  этой изолинии на плоскости  $w$ .

Объяснение этого эффекта дано в подпункте 3.3.4 на базе предварительно проведенного в пп. 3.2 и 3.3 исследования сингулярного поведения отображения  $w = \mathcal{F}(z)$  вблизи указанной вершины, включая получение соответствующей асимптотики. С помощью этой асимптотики в подпункте 3.3.4 показано, что угол, под которым линия  $\mathcal{U}_0$  исходит из вершины входящего угла, дается формулой

$$\arg \mathcal{U}_0 = \begin{cases} \frac{\pi\beta}{2}, & \theta^* \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \varphi^*, & \theta^* = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi\beta}{2}, & \theta^* \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \end{cases} \quad (2.6)$$

где величины  $\theta^* \in (0, \pi)$  и  $\varphi^* \in (-\pi\beta/2)$  определены в пп. 3.2, 3.3 через характеристики отображения  $\mathcal{F}(z)$ . Забегая вперед, отметим, что если  $\varphi^*$  выражается через параметры  $\beta$ ,  $\sigma_-$ ,  $\sigma_+$  из (2.3) и (2.4), то  $\theta^*$  определяется общими характеристиками отображения  $\mathcal{F}(z)$  (см. п. 3.2).

Из формулы (2.6) вытекает, что действительно изолиния  $\mathcal{U}_0$  должна касаться одной из сторон входящего угла в его вершине, за исключением особого случая, наступающего при  $\theta^* = \pi/2$ . В этом особом случае угол наклона изолинии  $\mathcal{U}_0$ , исходящей из вершины входящего угла, будет равен  $\varphi^*$ . В таком поведении угла наклона изолинии  $\mathcal{U}_0$ , описываемом формулой (2.6), и заключается обсуждаемый эффект “прилипания”. Это свойство гармонического отображения отличает его от конформного, о чем более подробно сказано в п. 3.1.

**2.2.2. Дефекты сетки как следствие эффекта “прилипания”.** Продолжим рассмотрение картины отображения  $\mathcal{F}$  на фиг. 2. Узлы  $w_{00}$ ,  $w_{10}$ ,  $w_{11}$ ,  $w_{01}$  базовой ячейки  $\pi_{00}$  (очерченной на фиг. 2б красным-зеленым контуром) переходят при отображении (1.7) соответственно в узлы  $z_{00}$ ,  $z_{10}$ ,  $z_{11}$ ,  $z_{01}$  генерируемой ячейки  $\sigma_{00}$ , изображенные на фиг. 2а. Отдельно (и в увеличенном виде) эта ячейка (с оранжевым контуром) и ее узлы показаны на фиг. 2в. Тогда из данного рассмотрения с учетом следующих очевидных положений:

- 1)  $\arg z_{10} = -\pi\beta/2$ , где  $\beta > 1$ ,
- 2)  $\arg z_{01}$  близок к  $\pi\beta/2$  при достаточно малом  $h$ ,

вытекает тот факт, что ребра  $(z_{00}, z_{10})$  и  $(z_{11}, z_{01})$  пересекаются, т.е. возникает самоналегание ячейки  $\sigma_{00}$ ; это и подтверждает фиг. 2в.

Нетрудно убедиться, что угол между ребрами  $(z_{00}, z_{10})$  и  $(z_{01}, z_{00})$ , измеряемый по области  $\mathcal{L}$  и отмеченный дужкой со стрелкой на фиг. 2в, 2г, уменьшается при увеличении шага  $h$ , так что при достаточно большом  $h$  дефект самоналегания преодолевается, но при этом качество сетки остается неудовлетворительным. Например, узлы базовой ячейки  $(w_{00}, w_{50}, w_{55}, w_{05})$ , выделенной на фиг. 2б красным и голубым цветами, шаг которой увеличен по сравнению с предыдущим вариантом в 5 раз, перейдут в узлы  $z_{00}, z_{50}, z_{55}, z_{05}$  новой ячейки  $\Sigma_{00}$  (с желтым контуром), которая, как видно на фиг. 2г, хотя и избавлена от пересечения ребер  $(z_{00}, z_{50})$  и  $(z_{55}, z_{05})$ , но все равно неприемлема для использования, поскольку является невыпуклой.

Заметим, что явление самоналегания ячейки с узлом в вершине входящего угла впервые было отмечено, по-видимому, в работе [36], где был дан и рисунок пересечения противоположных ребер этой ячейки, аналогичный фиг. 2в (см. также [40]).

В следующем подпункте даются примеры построения гармонического отображения областей со входящим углом, демонстрирующие обсуждаемый эффект.

**2.2.3. Области  $L$ -образной формы.** Популярным тестовым примером (для многих задач математической физики) является  $L$ -образная область. Обычно берут простейший ее вариант, составленный из трех квадратов. Гармоническая сетка в такой области строилась, в частности, в работах [21–23, 40].

Здесь мы рассматриваем не отдельную область, а класс областей  $L$ -образной формы. Типичная область  $\mathcal{K}$  из этого класса шестиугольных областей изображена на фиг. 3а. Гармоническое отображение  $w = \mathcal{F}(z)$  области  $\mathcal{K}$  на прямоугольник  $\Pi$ ,

$$\mathcal{F} : \mathcal{K} \xrightarrow{\text{harm}} \Pi, \quad (2.7)$$

подчиним условию постоянства на звеньях  $l_n$ ,  $n = \overline{1, 6}$ , величины  $d\mathfrak{B}/ds$ , определенной в п. 1.2. Это условие согласуется с гомеоморфизмом (2.4), а с точки зрения техники построения сеток оно означает, что граничные узлы расставлены на каждом звене  $l_n$  равномерно по его текущей длине (как это обычно и принимается в практике сеточной генерации).

Отображение (2.7) построено в п. 4.2, где дана формулировка задачи для областей  $L$ -образной формы. Для получения отображения  $\mathcal{F}(z)$  применен аналитико-численный метод мультиполей (см. [46–48]), изложение которого дано в п. 4.1. Схема его использования для построения гармонического отображения областей  $\mathcal{K}$  кратко описана в п. 4.2. Результаты численной реализации метода мультиполей приведены для трех вариантов области  $\mathcal{K}$ , обозначенных через  $\mathcal{K}_{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , в виде картины их гармонического отображения, представленной соответственно на фиг. 4а–4в. Апостериорная оценка (относительной) погрешности построенных отображений в норме  $C(\overline{\mathcal{K}_{(j)}})$  составила менее  $10^{-7}$  при использовании 120 аппроксимативных функций.

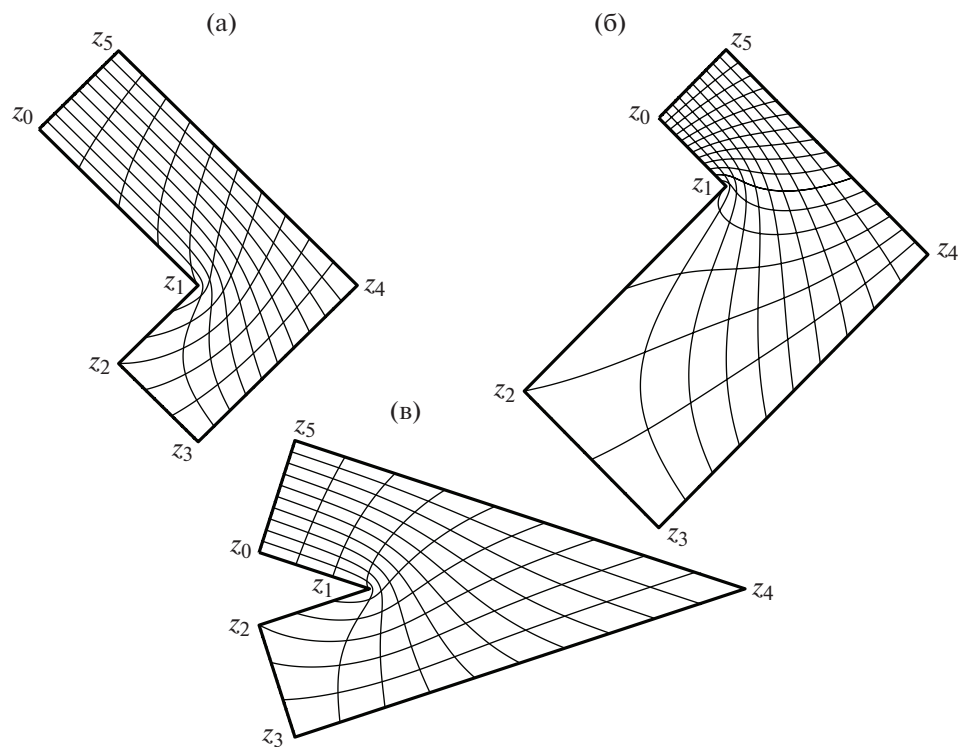
На фиг. 4а видно, что изолиния отображения, выходящая из вершины  $z = 0$ , касается в ней стороны  $\mathcal{L}_-$  угла, а из фиг. 4б — что эта изолиния касается в данной вершине стороны  $\mathcal{L}_+$  угла. Таким образом, помещенные на фиг. 4а, 4б численные результаты иллюстрируют положения, сформулированные в подпункте 2.2.1. Отметим, что на фиг. 4в (так же, как и на ряде других) этот эффект виден не так отчетливо, потому что для этой области “зона прилипания” около вершины невелика.

### 2.3. Дефекты гармонической сетки в областях с выемками

Во многих работах (см. [14–17, 19, 20, 22–26, 33–39] и приведенную там библиографию) отмечалось, что если область содержит выемки, то гармоническая сетка, создаваемая в таких областях с помощью общепринятых методов (упомянутых в п. 2.1), нередко имеет низкое качество и содержит указанные выше дефекты.

В настоящем разделе — и в целом в работе — рассматриваются области с выемками двух типов: полукруговой (в подпунктах 2.3.1 и 2.3.2) и прямоугольной (в подпункте 2.3.3).





Фиг. 4

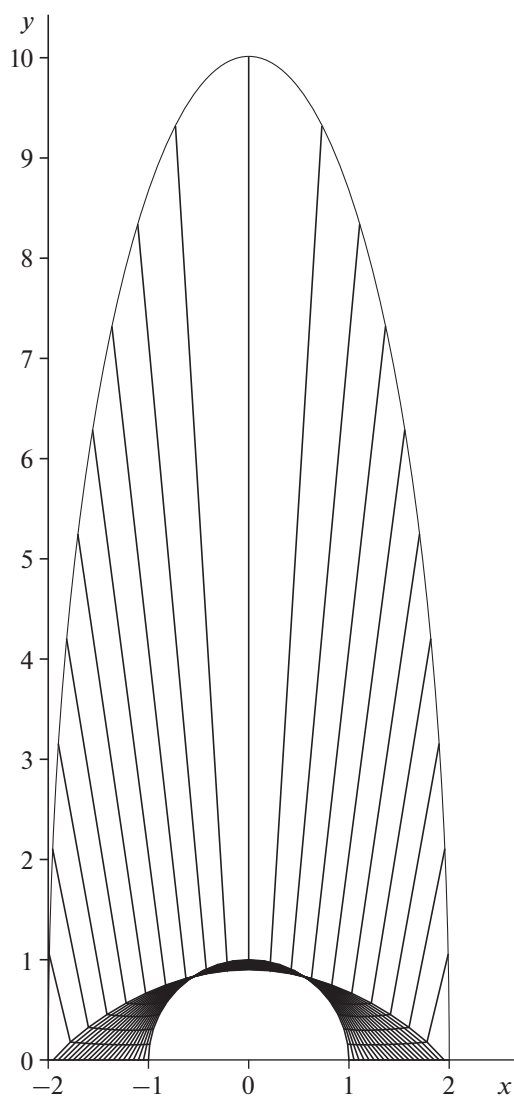
**2.3.1. Подковообразная область и ее гармоническое отображение.** Известным примером области с полукруговой выемкой является подковообразная область  $S_{(1)}$ , изображенная на фиг. 10а, где приведена и картина гармонического отображения, полученного в [34, 47]. Граница  $\partial S_{(1)}$  этой области состоит из двух отрезков  $l_1, l_3$  вещественной оси, а также из полуэллипса  $l_2$  и полуокружности  $l_4$ . Задачу (нередко используемую в качестве тестовой) о построении гармонической сетки  $\mathfrak{S}$  в этой области обычно решают на основе ее отображения на квадрат  $\mathcal{Q}$ :

$$F : S_{(1)} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{Q}, \quad F(l_n) = L_n, \quad n = \overline{1, 4}; \quad (2.8)$$

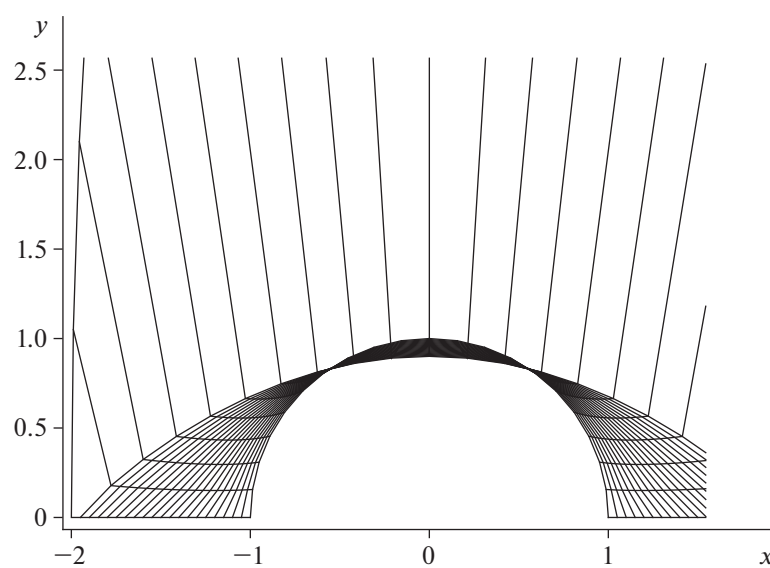
соответствие между границами  $\partial S_{(1)}$  и  $\partial \mathcal{Q}$ , видное на фиг. 10, подчинено условию постоянства величины  $d\mathfrak{B}/ds$  на  $l_n$ ; оно аналогично требованию, сформулированному в подпункте 2.2.3 для отображения (2.7).

Показательно, что данное отображение  $w = F(z)$  обеспечивает гомеоморфизм  $F : \overline{S_{(1)}} \xrightarrow{\text{hom}} \overline{\mathcal{Q}}$ , а его якобиан положителен в  $\overline{S_{(1)}}$ . Вопреки этим обстоятельствам, сетка  $\mathfrak{S}$ , полученная в [36, 38], имела участки, где наблюдались ее самоналегание и выход за границу  $\partial S_{(1)}$ , в целом же  $\mathfrak{S}$  характеризовалась неприемлемо низким качеством. В этих расчетах половина высоты подковообразной области  $S_{(1)}$  полагалась равной  $A = 4.5$ , а разбиение базовой сетки  $\mathcal{Q}$ , содержащейся в квадрате  $\mathcal{Q}$ , на которой решалась система (2.1), принималось равным  $31 \times 31$ .

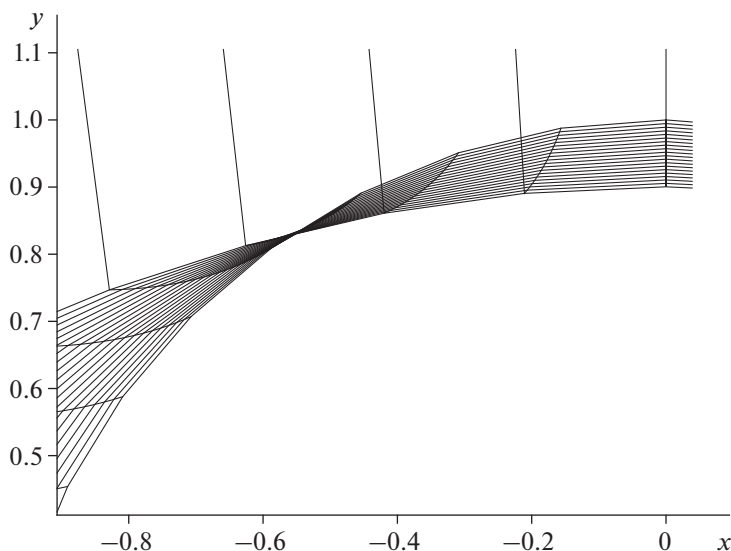
В работе Б.Н. Азаренка [39] была сделана попытка преодоления указанных трудностей. Поскольку их причиной была названа (в [37, 38]) потеря точности решения нелинейной системы (2.1), то автор статьи [39] предпринял усилия по повышению этой точности прежде всего за счет измельчения базовой сетки  $\mathcal{Q}$  в квадрате  $\mathcal{Q}$ , увеличив ее разбиение до  $101 \times 101$ ; при этом использовалась разностная схема (см. [10]) второго порядка, а половина высоты области  $S_{(1)}$  полагалась равной  $A = 5$ . Однако эта мера не привела к улучшению качества генерируемой сетки  $\mathfrak{S}$ , как показывают полученные им детальные изображения структуры этой сетки в местах ее самоналегания и выхода за пределы расчетной области  $S_{(1)}$ . Эти изображения, соответствующие постепенному увеличению масштаба, последовательно даны на фиг. 5–8.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Еще большее измельчение базовой сетки  $\mathcal{Q}$  до величины  $501 \times 501$ , выполненное в статье [39], позволило избавиться от самоналегания генерируемой в  $S_{(1)}$  сетки (результат приведен на фиг. 9) и от ее выхода за пределы области  $S_{(1)}$ , однако оно не обеспечило повышение качества сетки  $\mathcal{S}$  до уровня, пригодного для ее использования в приложениях, что подчеркнул и сам автор этой статьи.

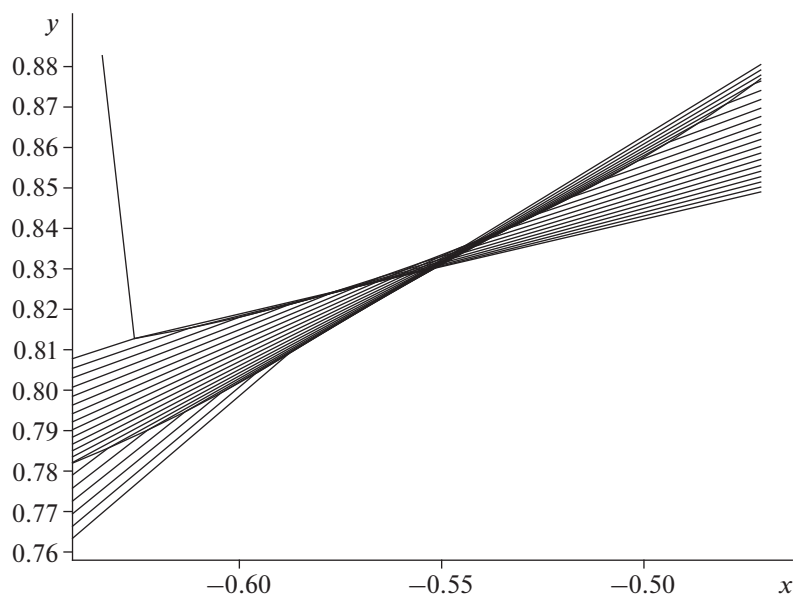
Последующие предпринятые им в работе [39] попытки улучшить качество генерируемой сетки  $\mathcal{S}$  (в рамках подхода Уинслоу) показали, что ни дальнейшее измельчение базовой сетки  $\mathcal{Q}$  в прямоугольнике, ни увеличение сеточного шаблона до 25-точечного и модификация разностной схемы с повышением порядка аппроксимации до четвертого и выше, ни привлечение вариационного метода из [16, 23] не привели ни к улучшению сетки  $\mathcal{S}$ , ни даже к сколько-нибудь заметному изменению положения ее узлов.

**2.3.2. Погрешность построения сетки в подковообразной области.** Из последнего замечания вытекает следующий интересный факт: два приближенных решения задачи о построении гармонического отображения в  $S_{(1)}$ , полученные двумя различными численными методами — конечно-разностным (см. [9, 10]) и вариационным (см. [16, 23]), — будучи ошибочными (как показано ниже), совпали с высокой точностью во всех узлах сетки  $\mathcal{Q}$ , соответствующей разбиению  $501 \times 501$ . Картина этого приближенного дискретизированного отображения  $F_{\text{dis}}(z)$ , полученного в [39] — вернее, соответствующая гармоническая сетка — представлена (как уже было отмечено выше) на фиг. 9, где изображена каждая 25-я сеточная линия по индексам  $m$  и  $n$ .

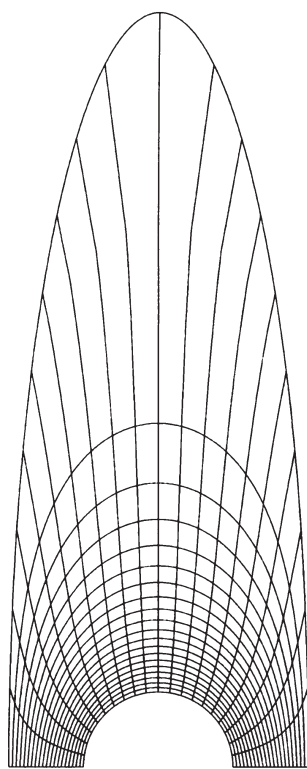
Чтобы вычислить погрешность этого приближенного гармонического отображения  $F_{\text{dis}}(z)$ , проведем его сравнение с высокоточным отображением  $F(z)$  области  $S_{(1)}$ , которое было построено в [34, 49] с помощью метода мультиполей. Результаты представлены на фиг. 10 в виде картины отображения  $F(z)$  области  $S_{(1)}$ .

Постановка и решение задачи о нахождении такого отображения изложены в п. 4.3; там же описан подход к созданию алгоритма вычисления отображения  $F(z)$  для класса областей  $S$  с полукруговой выемкой, включающего и подковообразную область; типичная область из этого класса изображена на фиг. 11.

Апостериорная оценка погрешности этого отображения в норме  $C(\bar{S}_{(1)})$  составила  $10^{-7}$  при использовании 120 аппроксимативных функций. Отметим еще, что затраченное при этом машинное время было на много порядков меньше, чем в [39], на компьютерах той же производительности.



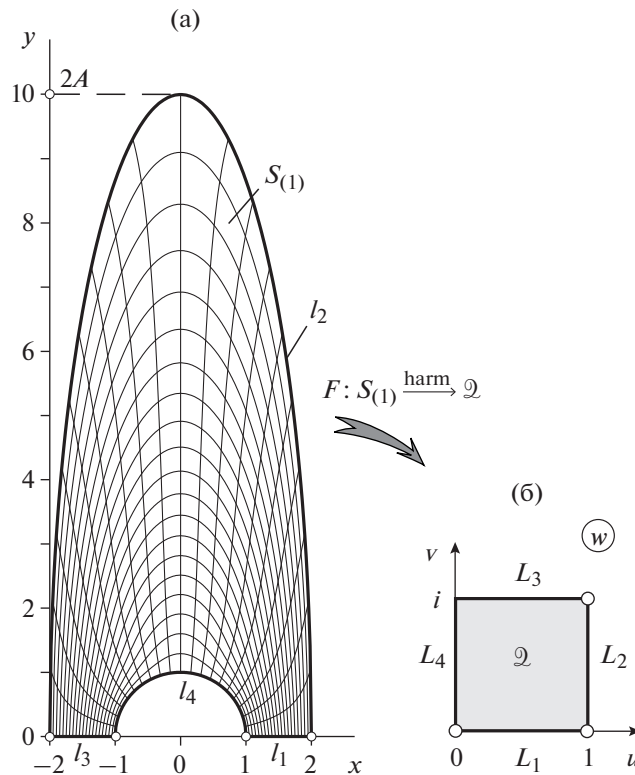
Фиг. 8



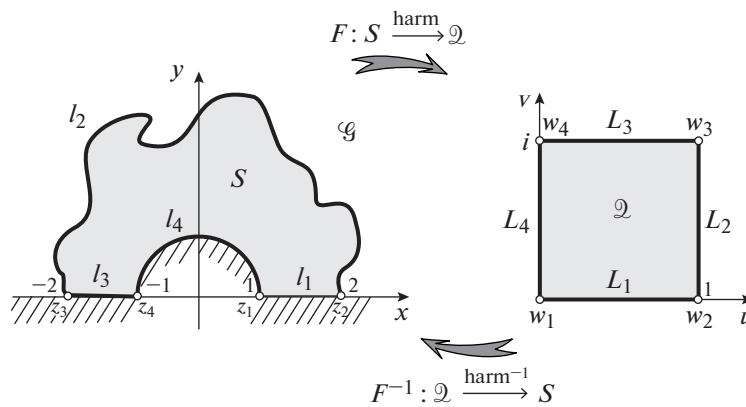
Фиг. 9

Принимая функцию  $F(z)$  из [34] в качестве “эталонного” отображения (на том основании, что оно получено с высокой и гарантированной точностью), введем для приближенного отображения  $F_{\text{dis}}(z)$  из [39] величину его поточечной относительной погрешности по формуле

$$\delta(x, y) = \frac{|F(z) - F_{\text{dis}}(z)|}{\max_{S(1)} |F(z)|}, \quad z = x + iy.$$



Фиг. 10



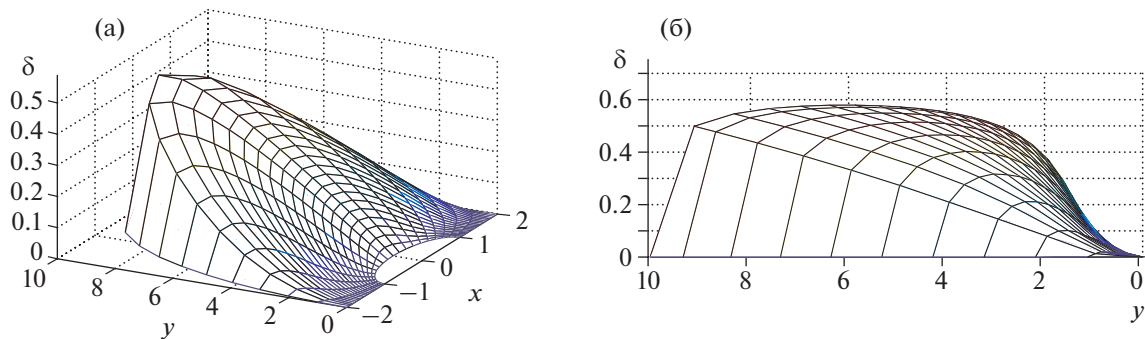
Фиг. 11

График величины  $\delta(x, y)$  как поверхности над областью  $S_{(1)}$ , расположенной на плоскости  $(x, y)$ , изображен на фиг. 12а, а проекция этой поверхности на плоскость  $(y, \delta)$  представлена на фиг. 12б.

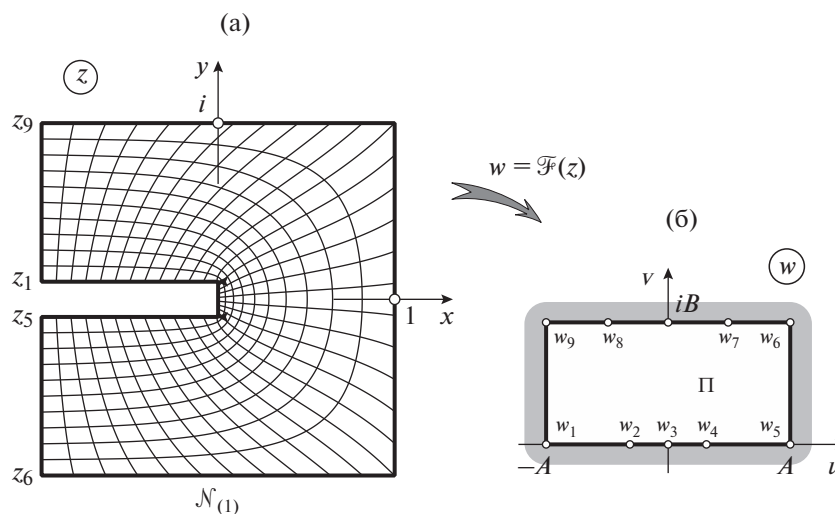
Из этих графиков видно, что величина относительной погрешности  $\delta(z)$  составляет около 50% в большей части области  $S_{(1)}$ , а ее максимум достигает примерно 60%.

Столь высокая величина погрешности говорит о серьезных вычислительных трудностях, которые могут возникать при использовании подхода Уинслоу в сочетании с разностными схемами, примененными в [36, 38, 39].

**2.3.3. Область с прямоугольным вырезом.** Другим примером области, проблемной для тематики сеточной генерации, является единичный квадрат с прямоугольным вырезом, обозначенный



Фиг. 12



Фиг. 13

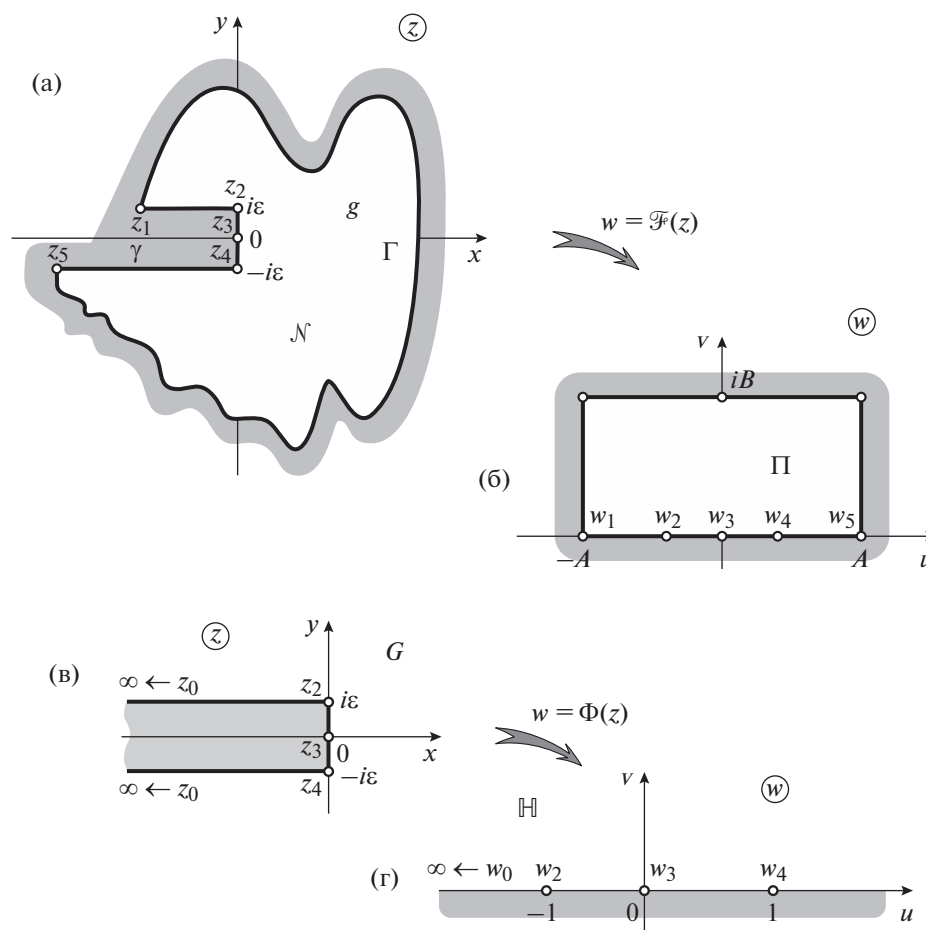
через  $\mathcal{N}_{(1)}$  и изображенный на фиг. 13а. В монографии [22], где область  $\mathcal{N}_{(1)}$  принималась в качестве тестовой, показано, что построение гармонической сетки в ней на основе подхода Уинслоу наталкивается на вычислительные трудности, аналогичные указанным выше; такие трудности были отмечены и в [16, 19], где строились другие области с подобным вырезом.

Мы рассматриваем здесь не одну область с прямоугольным вырезом, а некоторый класс таких областей, который включает и область  $\mathcal{N}_{(1)}$  (фиг. 13а). Произвольную область из этого класса обозначим через  $\mathcal{N}$ ; ее пример изображен на фиг. 14а. Для областей из этого класса мы даем в п. 4.4 общую схему решения задачи о построении отображения

$$\mathfrak{F} : \mathcal{N} \xrightarrow{\text{harm}} \Pi \quad (2.9)$$

такой области на прямоугольник (см. фиг. 14), где отражено также соответствие между границами  $\partial\mathcal{N}$  и  $\partial\Pi$ .

Решение задачи о построении отображения (2.9) получено в п. 4.4 с помощью метода мультиполей (там же дана и точная постановка задачи). Результаты численной реализации этого решения представлены для двух вариантов области с прямоугольным вырезом — областей  $\mathcal{N}_{(1)}$  и  $\mathcal{N}_{(2)}$  — в виде картин соответствующих отображений  $\mathfrak{F}_{(1)}(z)$  и  $\mathfrak{F}_{(2)}(z)$ , приведенных на фиг. 13, 15. Априорная оценка погрешности этих отображений в норме  $C(\overline{\mathcal{N}})$  составила  $10^{-7}$  при использовании 120 аппроксимативных функций.



Фиг. 14

### 3. ПОВЕДЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ УГЛА И ОБРАТНОГО К НЕМУ ВБЛИЗИ ЕЕ ОБРАЗА

#### 3.1. Рассматриваемые характеристики отображения

Пусть область  $\mathcal{L}$ , расположенная на плоскости  $z$ , содержит на своей границе угол  $\mathcal{L}$ , определяемый формулой (2.3), который может быть как выходящим, т.е.  $\beta \in (0, 1)$ , так и входящим, т.е.  $\beta \in (1, 2)$ . Рассмотрим схематически представленное на фиг. 16 гармоническое отображение

$$\mathcal{F} : \mathcal{L} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{H} \quad (3.1)$$

области  $\mathcal{L}$  на подобласть  $\mathcal{H}$  полуплоскости  $\{\text{Im } w > 0\}$ , примыкающую к интервалу  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_- \cup \{0\} \cup \mathcal{J}_+$  вещественной оси  $\mathbb{R}$ , со следующим соответствием:

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}_+) =: \mathcal{J}_+ \subset \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{F}(\mathcal{L}_-) =: \mathcal{J}_- \subset \mathbb{R}_-, \quad \mathcal{F}(0) = 0. \quad (3.2)$$

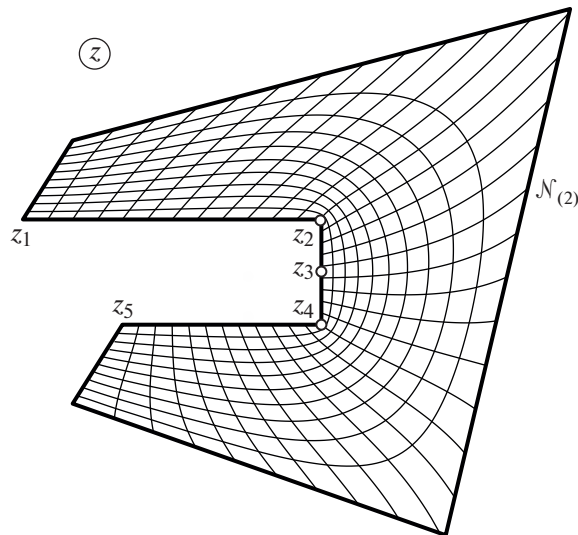
Областью  $\mathcal{H}$  может быть, например, прямоугольник (1.3), а соответствие (3.2) может быть на контуре  $\mathcal{L}$  уточнено в виде (2.4).

Важной характеристикой поведения этого отображения вблизи вершины угла является зависимость  $\varphi = \varphi(\theta)$  между углом  $\theta$  наклона луча

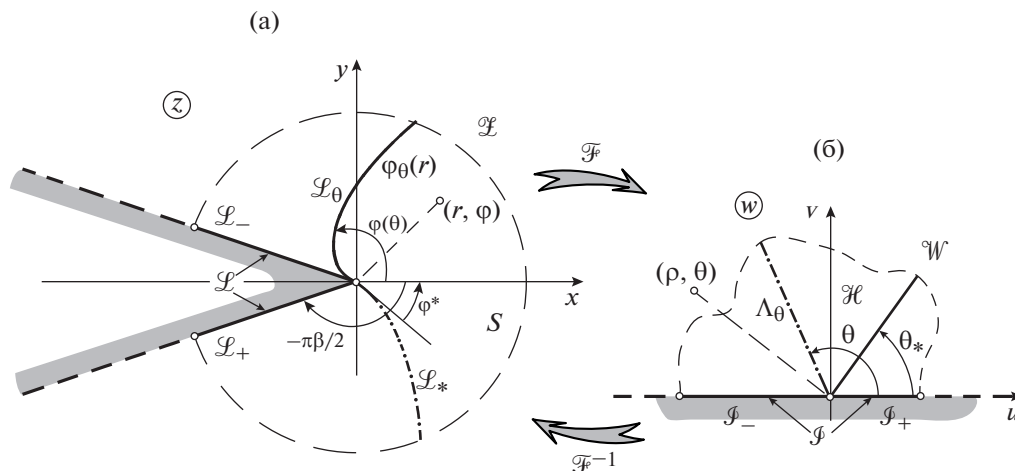
$$\Lambda_\theta := \{|w| > 0, \arg w = \theta\}, \quad (3.3)$$

исходящего из точки  $w = 0$  (см. фиг. 16б), и углом  $\varphi$ , под которым его прообраз

$$\mathcal{L}_\theta := \mathcal{F}^{-1}(\Lambda_\theta) \quad (3.4)$$



Фиг. 15



Фиг. 16

(точнее, касательная к  $\mathcal{L}_\theta$ ) выходит из вершины  $z = 0$  (см. фиг. 16a); величины углов отмечены на рисунках дужками со стрелками. Напомним, что  $(r, \varphi)$  и  $(\rho, \theta)$  суть полярные координаты соответственно на плоскостях  $z$  и  $w$ .

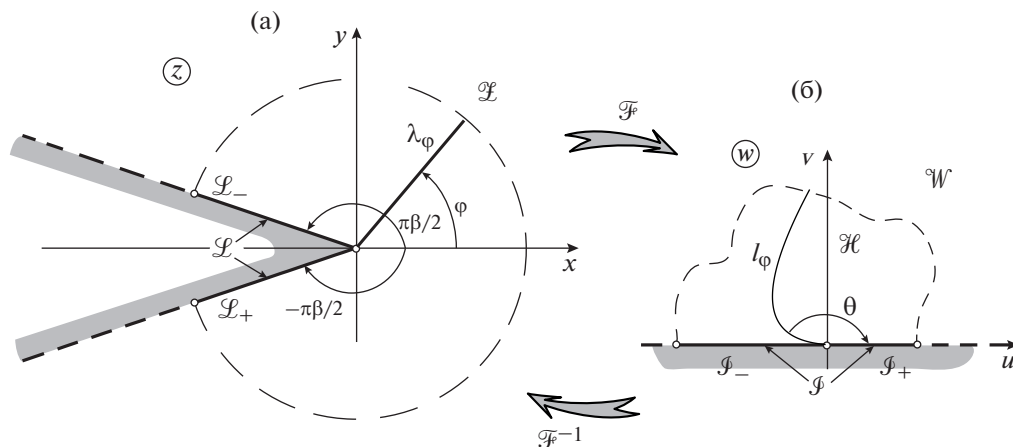
Для случая, когда  $\mathcal{L}$  — входящий угол, именно из зависимости  $\varphi(\theta)$  и следует эффект “прилипания” изолинии  $\mathcal{U}_0$  отображения  $\mathcal{F}$ , исходящей из вершины  $z = 0$ , к одной из сторон угла  $\mathcal{L}$ . Этот эффект рассмотрен в подпунктах 2.2.1 и 3.3.4, а в подпункте 2.2.2 и на фиг. 2 показано, каким образом это “прилипание” приводит к негативным последствиям для гармонической сетки, генерируемой с помощью отображения (3.1).

Обсуждаемая зависимость  $\varphi(\theta)$  вытекает из полученной в п. 3.3 асимптотики линии  $\mathcal{L}_\theta$ , определяемой равенством (3.4), вблизи вершины  $z = 0$  (см. фиг. 16a).

В следующем п. 3.4 установлен вид обратной зависимости  $\theta = \theta(\varphi)$ , т.е. вид формулы связи между углом  $\varphi$  наклона луча

$$\lambda_\varphi := \{ |z| > 0, \arg z = \varphi \}, \quad (3.5)$$





Фиг. 17

исходящего из вершины  $z = 0$  (см. фиг. 17a), и углом  $\theta$ , под которым его образ

$$l_\varphi := \mathcal{F}(\lambda_\varphi) \quad (3.6)$$

(точнее, касательная к  $l_\varphi$ ) выходит из точки  $w = 0$  (см. фиг. 17b). В п. 3.4 найден также вид асимптотики линии  $l_\varphi$  вблизи точки  $w = 0$ , из которой вытекает зависимость  $\theta = \theta(\varphi)$ .

Говоря о соотношениях, характеризующих поведение гармонического отображения  $\mathcal{F}(z)$  вблизи вершины угла  $z = 0$  и обратного к нему вблизи ее образа  $\mathcal{F}(0)$ , мы имеем в виду прежде всего зависимости  $\varphi(\theta)$ ,  $\theta(\varphi)$ , а также служащие основой для них асимптотики линий  $\mathcal{L}_\theta$ ,  $l_\varphi$  и асимптотику отображения (3.1) вблизи вершины угла. Все эти результаты получены ниже в настоящем разд. 3; они являются развитием результатов из [48, 49].

Необходимо отметить, что обе найденные функции,  $\varphi(\theta)$  и  $\theta(\varphi)$ , носят разрывный характер, тогда как соответствующие зависимости для аналогичного конформного отображения — обозначим их соответственно через  $\varphi_{\text{conf}}(\theta)$  и  $\theta_{\text{conf}}(\varphi)$  — являются линейными. Действительно, для конформного отображения  $f: \mathcal{Z} \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{H}$ ,  $f(0) = 0$ , справедлива асимптотика вблизи вершины угла

$$w = f(z) = Aiz^{1/\beta} + \mathcal{O}(z^{2/\beta}), \quad |z| \rightarrow 0, \quad A > 0,$$

из которой вытекает следующий, линейный вид указанных функций:

$$\varphi = \varphi_{\text{conf}}(\theta) = \beta(\theta - \pi/2), \quad \theta = \theta_{\text{conf}}(\varphi) = \pi/2 + \varphi/\beta.$$

Отмеченное отличие в поведении гармонического и конформного отображений вблизи угловых точек границы области является проявлением общего существенного различия между этими типами отображений (см. также [4–8, 34]).

### 3.2. Асимптотика гармонического отображения вблизи вершины угла

Приведенное в п. 3.1 определение отображения (3.1) дополним условием, что оно устанавливает гомеоморфизм  $w = B(z)$  между контуром угла  $\mathcal{Z}$  и интервалом  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_- \cup \{0\} \cup \mathcal{J}_+$  по правилу (2.4), которое согласуется с условием (3.2). Очевидно, что область  $\mathcal{Z}$  включает сектор

$$\Upsilon = \{r \in (0, R), \quad \varphi \in (-\pi\beta/2, \pi\beta/2)\} \quad (3.7)$$

некоторого радиуса  $R > 0$ , т.е.  $\Upsilon \subset \mathcal{Z}$ .

В области  $\mathcal{Z}$  при  $\beta \in (0, 1) \cup (1, 2)$  зададим (вещественную) гармоническую функцию  $Q(z)$  с помощью выражения

$$Q(re^{i\varphi}) := -\mu r \sin(\varphi - \varphi^*) \quad (3.8)$$

с параметрами  $\mu$ ,  $\varphi^*$ , определяемыми раствором  $\pi\beta$  угла и “скоростями”  $\sigma_-$  и  $\sigma_+$  гомеоморфизма (2.4) по формулам

$$\mu := |\sin \pi\beta|^{-1} \sqrt{\sigma_+^2 + \sigma_-^2 + 2\sigma_+\sigma_- \cos \pi\beta}, \quad \varphi^* := \operatorname{arctg} \left( \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\sigma_+ + \sigma_-} \operatorname{tg} \frac{\pi\beta}{2} \right). \quad (3.9)$$

Отсюда с учетом положительности величин  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  вытекают соотношения

$$\mu > 0, \quad \varphi^* \in (-\pi\beta/2, \pi\beta/2). \quad (3.10)$$

Нетрудно убедиться с помощью непосредственной проверки, что при всех  $\beta \in (0,1) \cup (1,2)$  функция (3.8) удовлетворяет условию (2.4) на контуре  $\mathcal{L}$  угла, т.е.

$$Q(re^{i\varphi}) = \begin{cases} \sigma_+ r, & \varphi = -\pi\beta/2, \\ -\sigma_- r, & \varphi = \pi\beta/2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Поэтому гармоническая в секторе (3.7) и непрерывная в  $\bar{\Upsilon}$  функция  $\mathcal{F} - Q$  обращается в нуль на  $\mathcal{L}$  и, следовательно, представима на множестве  $\bar{\Upsilon}$  в виде сходящегося на нем ряда

$$\mathcal{F}(z) - Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \operatorname{Im}(iz^{1/\beta})^n. \quad (3.12)$$

Правая часть этого равенства представляет собой, очевидно, ряд Фурье левой части с подстановкой

$$z = z(t) := r \exp[i(t - \pi\beta/2)] \quad (3.13)$$

на отрезке  $t \in [0, \pi\beta]$  по функциям  $r^{n/\beta} \sin nt/\beta$ . Тогда числа  $a_k + ib_k$  суть его коэффициенты Фурье, вещественная и мнимая часть которых вычисляется по формуле

$$a_n = \frac{2r^{-n/\beta}}{\pi\beta} \int_0^{\pi\beta} \operatorname{Re} [\mathcal{F}(z) - Q(z)]|_{z=z(t)} \sin \frac{nt}{\beta} dt. \quad (3.14)$$

Из однолистности отображения  $\mathcal{F}$  и сохранения им ориентации следует, что

$$a_1 \neq 0, \quad b_1 > 0. \quad (3.15)$$

Переносим функцию  $Q$ , определяемую равенством (3.8), в правую часть (3.12) и обрывая в ней ряд на первых двух его членах, находим асимптотику рассматриваемого гармонического отображения  $w = \mathcal{F}(z)$  вблизи вершины  $z = 0$  угла. При  $\beta \in (0,1)$  она дается формулой

$$\mathcal{F}(re^{i\varphi}) = -\mu \sin(\varphi - \varphi^*) \cdot r + (a_1 + ib_1) \cos \frac{\varphi}{\beta} \cdot r^{1/\beta} - (a_2 + ib_2) \sin \frac{2\varphi}{\beta} \cdot r^{2/\beta} + \mathcal{O}(r^{3/\beta}), \quad r \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

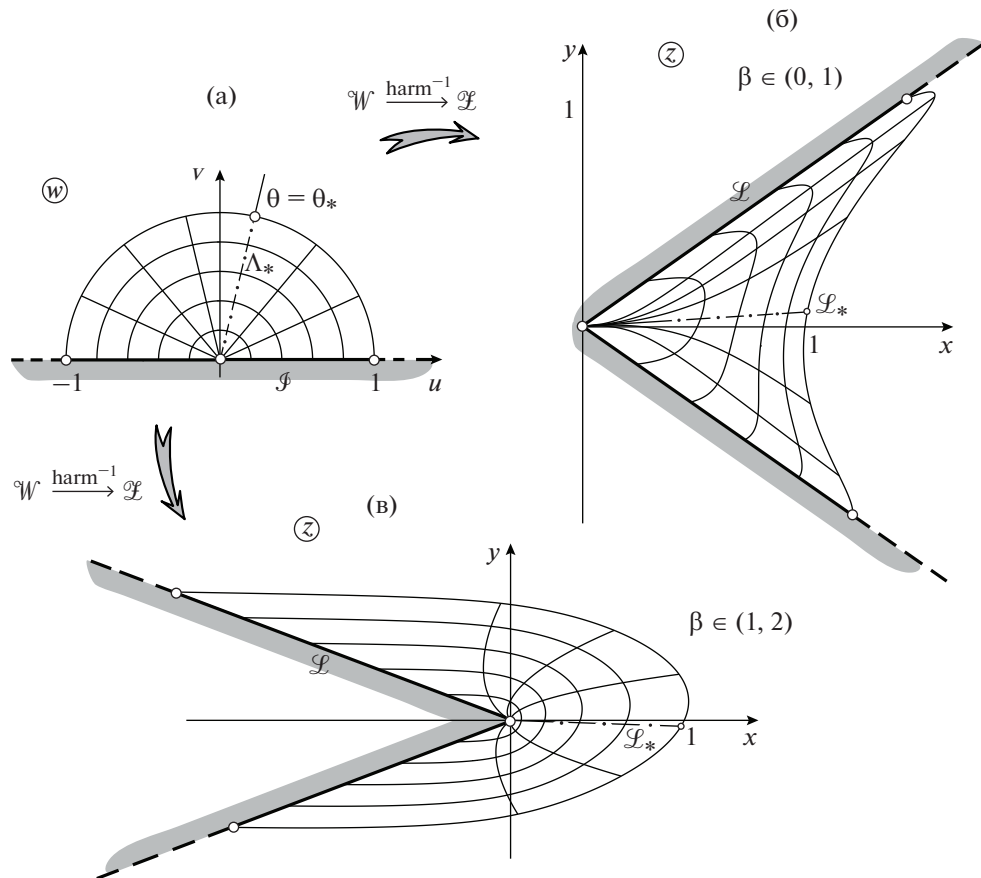
Эта же формула справедлива и при  $\beta \in (1,2)$ , но с переменой мест первых двух слагаемых, так чтобы они были расположены в порядке убывания.

### 3.3. Асимптотика линий $\mathcal{L}_\theta$ , исходящих из вершины угла

**3.3.1. Уравнение для функции  $\varphi_\theta(r)$ .** Обозначим через  $\varphi = \varphi_\theta(r)$  уравнение в полярных координатах  $(r, \varphi)$  линии  $\mathcal{L}_\theta$ , определяемой равенством (3.4) (см. фиг. 16а). Асимптотику этой линии вблизи вершины  $z = 0$  угла  $\mathcal{L}$ , понимаемую как асимптотику функции  $\varphi_\theta(r)$  при  $r \rightarrow 0$ , найдем, исходя из уравнения для  $\varphi_\theta(r)$ .

Для его вывода запишем тождество  $\operatorname{Im}[\mathcal{F}(z)e^{-i\theta}] = 0$ ,  $z \in \mathcal{L}_\theta$ , которому линия  $\mathcal{L}_\theta$  отвечает по определению. Выражая в этом тождестве координату точек на дуге  $\mathcal{L}_\theta$  в виде  $z = re^{i\varphi_\theta(r)}$ , получим для функции  $\varphi_\theta(r)$  следующее равенство:

$$\operatorname{Im}[\mathcal{F}(re^{i\varphi_\theta(r)})e^{-i\theta}] = 0, \quad (3.17)$$



Фиг. 18

а подставляя сюда соотношение (3.16) для отображения  $\mathcal{F}(z)$ , придем к асимптотическому уравнению относительно искомой функции  $\varphi_\theta(r)$ :

$$0 = -\mu \sin(\varphi_\theta(r) - \varphi^*) \cdot r + (a_1 - b_1 \operatorname{ctg} \theta) \cos \frac{\varphi_\theta(r)}{\beta} \cdot r^{1/\beta} - (a_2 - b_2 \operatorname{ctg} \theta) \sin \frac{2\varphi_\theta(r)}{\beta} \cdot r^{2/\beta} + \mathcal{O}(r^{3/\beta}), \quad r \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

При  $\beta \in (0, 1)$  здесь слагаемые в правой части расположены в порядке убывания. Для соблюдения этого же принципа при  $\beta \in (1, 2)$  необходимо в формуле (3.18) переставить два первых члена.

**3.3.2. Особый случай,  $\theta = \theta^*$ .** Анализ уравнения (3.18) показывает, что прежде всего следует выделить особый случай, когда величина угла наклона луча  $\Lambda_\theta$  принимает такое значение, что выражение во вторых скобках правой части (3.18) обращается в нуль, т.е. выполняется равенство

$$a_1 - b_1 \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (3.19)$$

Удовлетворяющий ему угол обозначим через

$$\theta^* = \frac{\operatorname{arctg} b_1}{a_1}, \quad (3.20)$$

соответствующую этому случаю кривую  $\mathcal{L}_\theta$  — через  $\mathcal{L}^*$ , а уравнение для нее — через  $\varphi = \varphi^*(r)$ ; ниже показано, что по своим геометрическим свойствам она отличается от кривых  $\mathcal{L}_\theta$  при  $\theta \neq \theta^*$ . Другие величины и объекты, соответствующие особому случаю, будем также отмечать “звездочкой” (знаком \*).

Подставив (3.19) в формулу (3.18) и разделив обе части на  $\mu r$ , приходим к асимптотическому уравнению для  $\varphi^*(r)$ :

$$\sin(\varphi^*(r) - \varphi^*) = -\frac{(a_2 - b_2 \operatorname{ctg} \theta)}{\mu} \sin \frac{2\varphi^*(r)}{\beta} \cdot r^{2/\beta-1} + \mathcal{O}(r^{3/\beta-1}), \quad r \rightarrow 0.$$

Если учесть, что правая часть здесь стремится к нулю при  $r \rightarrow 0$ , так как  $\beta < 2$ , то получим асимптотику для  $\varphi^*(r)$  в виде

$$\beta \in (0,1) \cup (1,2), \quad \theta = \theta^*: \quad \varphi^*(r) = \varphi^* + E^* \cdot r^{2/\beta-1} + \mathcal{O}(r^{3/\beta-1}), \quad r \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

где

$$E^* := -\mu^{-1}(a_2 - b_2 \operatorname{ctg} \theta^*) \sin \frac{2\varphi^*}{\beta}. \quad (3.22)$$

Асимптотика (3.21) определяет поведение “особой” линии  $\mathcal{L}^*$  вблизи вершины  $z = 0$  угла  $\mathcal{L}$ .

**3.3.3. Общий случай,  $\theta \neq \theta^*$ .** Предположим теперь, что угол  $\theta$ , под которым луч (3.3) выходит из точки  $w = 0$ , принимает произвольные значения  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\theta \neq \theta^*$ . Здесь, в свою очередь, следует выделить два случая:

$$\text{I) } \beta \in (0,1), \quad \text{II) } \beta \in (1,2). \quad (3.23)$$

Рассмотрим первый из них.

I) Пусть  $\beta \in (0,1)$ . Разделив обе части (3.18) на  $\mu r$ , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_\theta(r) - \varphi^*) &= \mu^{-1}(a_1 - b_1 \operatorname{ctg} \theta) \cos \frac{\varphi_\theta(r)}{\beta} \cdot r^{1/\beta-1} - \\ &- \mu^{-1}(a_2 - b_2 \operatorname{ctg} \theta) \sin \frac{2\varphi_\theta(r)}{\beta} \cdot r^{2/\beta-1} + \mathcal{O}(r^{3/\beta-1}), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Его правая часть стремится к нулю при  $r \rightarrow 0$ , а следовательно,  $\varphi_\theta(r)$  стремится к  $\varphi^*$  при  $r \rightarrow 0$ . Используя этот факт, находим требуемую асимптотику для рассматриваемого случая I в следующем виде:

$$\beta \in (0,1), \quad \theta \in (0, \pi) \setminus \{\theta^*\}: \quad \varphi_\theta(r) = \varphi^* + E_1(\theta) \cdot r^{1/\beta-1} + \mathcal{O}(r^{2/\beta-1}), \quad r \rightarrow 0, \quad (3.25)$$

где

$$E_1(\theta) = \mu^{-1}(a_1 - b_1 \operatorname{ctg} \theta) \cos \frac{\varphi^*}{\beta}.$$

Используя представление (3.12) для отображения  $\mathcal{F}(z)$ , нетрудно увидеть, что при всех  $r > 0$  справедливы соотношения  $\mathcal{F}(re^{-i\pi\beta/2}) > 0$ ,  $\mathcal{F}(re^{i\pi\beta/2}) < 0$ , и, таким образом, линии  $\varphi = -\pi\beta/2$  и  $\varphi = \pi\beta/2$  переходят соответственно в линии  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Поэтому вместо асимптотики (3.24) имеем точные равенства

$$\varphi_0(r) = -\frac{\pi\beta}{2}, \quad \varphi_\pi(r) = \frac{\pi\beta}{2}, \quad r \in (0, +\infty). \quad (3.26)$$

Таким образом, зависимость  $\varphi(\theta)$  между углом  $\theta$ , под которым луч  $\Lambda_\theta$  выходит из образа  $w = 0$  вершины угла, и углом  $\varphi$ , под которым прообраз  $\mathcal{L}_\theta = \mathcal{F}^{-1}(\Lambda_\theta)$  луча  $\Lambda_\theta$  выходит из вершины  $z = 0$ , имеет при  $\beta \in (0,1)$  следующий вид:

$$\beta \in (0,1): \quad \varphi(\theta) = \begin{cases} -\pi\beta/2, & \theta = 0, \\ \varphi^*, & \theta \in (0, \pi), \\ \pi\beta/2, & \theta = \pi. \end{cases} \quad (3.27)$$

II) Пусть теперь  $\beta \in (1, 2)$ , т.е. угол  $\mathcal{L}$  является входящим. Будем при этом по-прежнему считать, что  $\theta \neq \theta^*$ . Для получения асимптотики функции  $\varphi_\theta(r)$ , описывающей кривую  $\mathcal{L}_\theta$ , разделим уравнение (3.18) на отличную от нуля величину  $(a_1 - b_1 \operatorname{ctg} \theta) r^{1/\beta}$  и перепишем его следующим образом:

$$\cos \frac{\varphi_\theta(r)}{\beta} = F_1(\theta) \sin(\varphi_\theta(r) - \varphi^*) \cdot r^{1-1/\beta} + \mathcal{O}(r^{1/\beta}), \quad r \rightarrow 0; \quad \theta^* \neq \theta \in (0, \pi), \quad (3.28)$$

где введено обозначение

$$F_1(\theta) = \mu(a_1 - b_1 \operatorname{ctg} \theta)^{-1}. \quad (3.29)$$

Поскольку правая часть равенства (3.28) стремится к нулю при  $r \rightarrow 0$ , то  $\cos(\varphi_\theta(r)/\beta)$  также стремится к нулю, а следовательно, главным членом асимптотики функции  $\varphi_\theta(r)$  может быть либо  $\pi\beta/2$ , либо  $-\pi\beta/2$ . Согласно сказанному получаем, что

$$\varphi_\theta(r) = \mp \pi\beta/2 \pm \varepsilon(r), \quad 0 < \varepsilon(r) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0.$$

Подставляя эту формулу в (3.28) и учитывая, что

$$\cos(\mp \pi/2 + \varepsilon) = \pm \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

находим асимптотику функции  $\varphi_\theta(r)$ ,  $r \rightarrow 0$ , при  $\theta \neq \theta^*$ . Добавляя еще соотношение (3.21), устанавливаем требуемую асимптотику для  $\varphi_\theta(r)$  при  $\beta \in (1, 2)$  во всем диапазоне  $\theta \in (0, \pi)$ :

$$\beta \in (1, 2): \quad \varphi_\theta(r) = \begin{cases} -\frac{\pi\beta}{2} - \left[ \beta F_1(\theta) \sin\left(\frac{\pi\beta}{2} + \varphi^*\right) \right] r^{1-1/\beta} + \mathcal{O}(r^\gamma), & \theta \in (0, \theta^*), \\ \varphi^* + E^* r^{2/\beta-1} + \mathcal{O}(r^{3/\beta-1}), & \theta = \theta^*, \\ \frac{\pi\beta}{2} - \left[ \beta F_1(\theta) \sin\left(\frac{\pi\beta}{2} - \varphi^*\right) \right] r^{1-1/\beta} + \mathcal{O}(r^\gamma), & \theta \in (\theta^*, \pi), \quad r \rightarrow 0; \end{cases} \quad (3.30)$$

здесь показатель  $\gamma$  дается формулой  $\gamma = \min\{1/\beta, 2(1-1/\beta)\}$ , а коэффициенты  $E^*$  и  $F_1(\theta)$  определяются соответственно равенствами (3.22) и (3.29).

Из асимптотики (3.30) вытекает зависимость  $\varphi(\theta)$  между углом  $\theta$ , под которым луч  $\Lambda_\theta$  выходит из образа  $w = 0$  вершины угла, и углом  $\varphi$ , под которым прообраз луча  $\mathcal{L}_\theta := \mathcal{F}^{-1}(\Lambda_\theta)$  выходит из вершины  $z = 0$  (см. фиг. 18). Эта зависимость, являющаяся первым членом асимптотики (3.30), дается при  $\beta \in (1, 2)$  формулой

$$\beta \in (1, 2): \quad \varphi(\theta) = \begin{cases} -\pi\beta/2, & \theta \in (0, \theta^*), \\ \varphi^*, & \theta = \theta^*, \\ \pi\beta/2, & \theta \in (\theta^*, \pi). \end{cases} \quad (3.31)$$

Объединяя соотношения (3.30), (3.31), справедливые для случая II, с аналогичными результатами (3.25), (3.27) для случая I, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.** 1) Асимптотика функции  $\varphi = \varphi_\theta(r)$ , описывающей в полярных координатах линию  $\mathcal{L}_\theta := \mathcal{F}^{-1}(\Lambda_\theta)$ , имеет при  $\beta \in (0, 1)$  вид (3.25), а при  $\beta \in (1, 2)$  – вид (3.30).

2) Зависимость  $\varphi(\theta)$  между углом  $\theta$ , под которым луч  $\Lambda_\theta$  выходит из образа  $w = 0$  вершины угла, и углом  $\varphi$ , под которым его прообраз  $\mathcal{L}_\theta$  выходит из вершины  $z = 0$ , имеет при  $\beta \in (0, 1)$  вид (3.27), а при  $\beta \in (1, 2)$  – вид (3.31).

Иллюстрацией к этой теореме служит фиг. 18. На фиг. 18а изображена полярная сетка  $\Xi$  на плоскости  $w = re^{i\theta}$ , определяемая по формуле

$$\Xi = \left\{ \rho = \frac{n}{5}, n = \overline{1, 5}; \theta = \frac{\pi n}{7}, n = \overline{0, 7} \right\};$$

на фиг. 18б дан ее прообраз  $\mathcal{F}^{-1}(\Xi)$  на плоскости  $z$  при некотором  $\beta < 1$ , т.е. для случая I, когда  $\mathcal{L}$  — выходящий угол, а на фиг. 18в дан ее прообраз при некотором  $\beta > 1$ , т.е. для случая II, когда угол  $\mathcal{L}$  — входящий.

Из фиг. 18б видно, что при  $\beta < 1$  прообразы  $\mathcal{L}_\theta := \mathcal{F}^{-1}(\Lambda_\theta)$  всех лучей  $\Lambda_\theta$ , за исключением лежащих на контуре угла  $\mathcal{L}$  (соответствующих  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ), “прилипают” в вершине  $z = 0$  к особой линии  $\mathcal{L}^*$ . С другой стороны, из фиг. 18б следует, что при  $\beta > 1$  все линии  $\Lambda_\theta$ , соответствующие  $\theta \in (0, \theta^*)$ , “прилипают” к стороне  $\mathcal{L}_-$  угла, а все  $\Lambda_\theta$ , соответствующие  $\theta \in (\theta^*, \pi)$ , — к стороне  $\mathcal{L}_+$ .

Эти численные иллюстрации подтверждают положения теоремы 1.

**3.3.4. Объяснение эффекта “прилипания”.** Из сравнения определения (2.5) изолинии  $\mathcal{U}_0$  и определения (3.4), (3.3) линии  $\mathcal{L}_\theta$  (см. также фиг. 2 и фиг. 16) очевидно, что

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{L}_\theta \quad \text{при} \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда из равенства (3.31) для угла наклона линии  $\mathcal{L}_\theta$  в вершине  $z = 0$  следует, что изолиния  $\mathcal{U}_0$  не касается ни одной из сторон угла, только если ее образ  $\{w : u = 0, v \in [0, H]\}$  исходит из вершины под углом  $\theta^*$ , иначе говоря, только если  $\theta^* = \pi/2$ , и в этом “особом” случае угол наклона нашей изолинии в вершине будет равен  $\arg \mathcal{U}_0 = \varphi^*$ . Если же  $\theta^* \neq \pi/2$ , то согласно формуле (3.31) изолиния  $\mathcal{U}_0 = \mathcal{L}_{\pi/2}$  будет касаться одной из сторон угла, а именно, стороны  $\mathcal{L}_-$  при  $\theta^* \in (0, \pi/2)$  и стороны  $\mathcal{L}_+$  при  $\theta^* \in (\pi/2, \pi)$ . Эти положения отражены в формуле (2.6).

Отметим, что величины  $\varphi^*$  и  $\theta^*$  определяются через параметры отображения соответственно по второй формуле (3.9) и формуле (3.20), где  $a_1$  и  $b_1$  вычисляются с помощью (3.14) при  $n = 1$ .

### 3.4. Асимптотика линий $l_\varphi$ , исходящих из образа вершины угла

Напомним, что  $\lambda_\varphi$  — луч на плоскости  $z$ , исходящий из вершины  $z = 0$  под углом  $\varphi$ , а линия  $l_\varphi = \mathcal{F}(\lambda_\varphi)$  — его образ на плоскости  $w = u + iv = \rho e^{i\theta}$  (см. фиг. 17). Уравнение линии  $l_\varphi$  в декартовых координатах обозначим через  $v = v_\varphi(u)$ , в полярных координатах — через  $\theta = \theta_\varphi(\rho)$  при  $\theta \neq \theta^*$  и через  $\theta = \theta^*(\rho)$  при  $\theta = \theta^*$ , а декартовы координаты  $u, v$  линии  $l_\varphi$ , рассматриваемые как функции радиальной координаты  $r$  на прообразе — луче  $\lambda_\varphi$ , обозначим соответственно через  $u = u_\varphi(r)$  и  $v = v_\varphi(r)$ .

Найдем асимптотику линии  $l_\varphi$  вблизи точки  $w = 0$ , понимаемую как асимптотику одной из функций  $v_\varphi(u)$  или  $\theta_\varphi(\rho)$ . Получим также зависимость  $\theta(\varphi)$  между углом  $\varphi$ , под которым луч  $\lambda_\varphi$  выходит из вершины  $z = 0$ , и углом  $\theta$ , под которым его образ  $l_\varphi$  выходит из точки  $w = 0$ . Вывод этих соотношений так же, как изученных в подпункте 3.3.3, следует проводить отдельно для двух случаев (3.23).

#### 3.4.1. Случай I. Пусть выполняется условие $\beta \in (0, 1)$ .

Асимптотики для  $u_\varphi(r)$  и  $v_\varphi(r)$  получаем, отделяя в формуле (3.16) вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} u_\varphi(r) &= -\mu \sin(\varphi - \varphi^*) \cdot r + a_1 \cos \frac{\varphi}{\beta} \cdot r^{1/\beta} - a_2 \sin \frac{2\varphi}{\beta} \cdot r^{2/\beta} + O(r^{3/\beta}), \\ v_\varphi(r) &= b_1 \cos \frac{\varphi}{\beta} r^{1/\beta} - b_2 \sin \frac{2\varphi}{\beta} \cdot r^{2/\beta} + O(r^{3/\beta}), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Из первого уравнения находим

$$u_\varphi(r) = -\mu r \sin(\varphi - \varphi^*) \left[ 1 - \frac{a_1 \cos \varphi / \beta}{\mu \sin(\varphi - \varphi^*)} \cdot r^{1/\beta-1} + O(r^{2/\beta-1}) \right], \quad r \rightarrow 0. \quad (3.33)$$

Здесь, в свою очередь, следует выделить три подслучая:

$$1) \quad \varphi \in (-\pi\beta/2, \varphi^*), \quad 2) \quad \varphi \in (\varphi^*, \pi\beta/2), \quad 3) \quad \varphi = \varphi^*. \quad (3.34)$$

1) Рассмотрим первый из них, т.е. предположим, что  $\varphi < \varphi^*$ . Тогда, замечая, что в этом случае  $u_\varphi(r) > 0$  при малых  $r$ , получаем из (3.33)

$$[u_\varphi(r)]^{1/\beta} = [\mu r \sin(\varphi^* - \varphi)]^{1/\beta} \cdot r^{1/\beta} \left[ 1 + \frac{a_1 \cos \varphi / \beta}{\beta \mu \sin(\varphi^* - \varphi)} \cdot r^{1/\beta-1} + \mathcal{O}(r^{2/\beta-1}) \right], \quad r \rightarrow 0.$$

Выражая отсюда величину  $r^{1/\beta}$  через  $u$ :

$$r^{1/\beta} = \frac{u^{1/\beta}}{[\mu \sin(\varphi^* - \varphi)]^{1/\beta}} + \mathcal{O}(u^{2/\beta-1}), \quad u \rightarrow 0,$$

и подставляя ее во второе равенство (3.32), получаем асимптотику функции  $v_\varphi(u)$ :

$$\beta \in (0, 1), \quad \varphi \in (-\pi\beta/2, \varphi^*) : \quad v_\varphi(u) = \frac{b_1 \cos \varphi / \beta}{[\mu \sin(\varphi^* - \varphi)]^{1/\beta}} u^{1/\beta} + \mathcal{O}(u^{2/\beta-1}), \quad u \rightarrow 0. \quad (3.35)$$

2) Рассмотрим второй случай (3.34), т.е. предположим, что  $\varphi > \varphi^*$ . Замечая, что в этом случае величина  $[-u_\varphi(r)] > 0$  при малых  $r$ , выражаем через нее, используя (3.33), степень радиальной координаты:

$$r^{1/\beta} = \frac{(-u)^{1/\beta}}{[\mu \sin(\varphi - \varphi^*)]^{1/\beta}} + \mathcal{O}(|u|^{2/\beta-1}), \quad |u| \rightarrow 0;$$

подставляя ее во второе равенство (3.32), получаем асимптотику функции  $v_\varphi(u)$ :

$$\beta \in (0, 1), \quad \varphi \in (\varphi^*, \pi\beta/2) : \quad v_\varphi(u) = \frac{b_1 \cos \varphi / \beta}{[\mu \sin(\varphi - \varphi^*)]^{1/\beta}} (-u)^{1/\beta} + \mathcal{O}(|u|^{2/\beta-1}), \quad |u| \rightarrow 0. \quad (3.36)$$

3) Рассматривая теперь третий случай (3.34), полагаем  $\varphi = \varphi^*$  в представлениях (3.32). Обозначая для этого случая функции  $u_\varphi(r)$  и  $v_\varphi(r)$  соответственно через  $u^*(r)$  и  $v^*(r)$ , имеем

$$u^*(r) = \left( a_1 \cos \frac{\varphi^*}{\beta} \right) r^{1/\beta} + \mathcal{O}(r^{2/\beta}), \quad v^*(r) = \left( b_1 \cos \frac{\varphi^*}{\beta} \right) r^{1/\beta} + \mathcal{O}(r^{2/\beta}), \quad r \rightarrow 0.$$

Отсюда, исключая зависимость от  $r$ , находим

$$v^*(u) = \frac{b_1}{a_1} u + \mathcal{O}(u^2). \quad (3.37)$$

Отметим, что  $b_1/a_1 = \theta^*$ .

Итак, объединяя (3.35), (3.36) и (3.37), мы получили для функции  $v_\varphi(u)$  следующую асимптотику, описывающую поведение линии  $l_\varphi$  вблизи точки  $w = 0$ :

$$\beta \in (0, 1) : \quad v_\varphi(u) = \begin{cases} \frac{b_1 \cos \varphi / \beta}{[\mu \sin(\varphi^* - \varphi)]^{1/\beta}} u^{1/\beta} + \mathcal{O}(u^{2/\beta-1}), & \varphi \in (-\pi\beta/2, \varphi^*), \\ \frac{b_1}{a_1} u + \mathcal{O}(u^2), & \varphi = \varphi^*, \\ \frac{b_1 \cos \varphi / \beta}{[\mu \sin(\varphi - \varphi^*)]^{1/\beta}} (-u)^{1/\beta} + \mathcal{O}(|u|^{2/\beta-1}), & \varphi \in (\varphi^*, \pi\beta/2), \quad |u| \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Приведем вывод зависимости  $\theta(\varphi)$ . Нетрудно увидеть, что

$$\rho(u) = |u| + \mathcal{O}(|u|^{2/\beta-1}), \quad |u| \rightarrow 0,$$

откуда следует  $|u(\rho)| = \rho + \mathcal{O}(\rho^{2/\beta-1})$ . Подставляя эту асимптотику в (3.38), переходя к полярным координатам и устремляя  $\rho \rightarrow 0$ , находим следующие соотношения для предельного значения  $\theta_\varphi(\rho)$ ,  $\rho \rightarrow 0$ , которое и представляет собой зависимость  $\theta(\varphi)$ :

$$\beta \in (0,1): \quad \theta(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \in (-\pi\beta/2, \varphi^*), \\ \theta^*, & \varphi = \varphi^*, \\ \pi, & \varphi \in (\varphi^*, \pi\beta/2). \end{cases} \quad (3.39)$$

**3.4.2. Случай II.** Пусть выполняется условие  $\beta \in (1,2)$ . Введем повернутую систему декартовых координат  $\mathcal{U} + i\mathcal{V} = e^{-i\theta^*}(u + iv)$  и рассмотрим отображение

$$\mathcal{U} + i\mathcal{V} := e^{-i\theta^*}\mathcal{F}(z) = (a_1 + ib_1)e^{-i\theta^*}r^{1/\beta} \cos \frac{\varphi}{\beta} - \mu r e^{-i\theta^*} \sin(\varphi - \varphi^*) + \mathcal{O}(r^{2/\beta}),$$

вещественная и мнимая часть которого имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(r, \varphi) &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos \frac{\varphi}{\beta} \cdot r^{1/\beta} \mu \sin(\varphi - \varphi^*) \cos \theta^* \cdot r + \mathcal{O}(r^{2/\beta}), \quad r \rightarrow 0, \\ \mathcal{V}(r, \varphi) &= -\mu \sin(\varphi - \varphi^*) \cos \theta^* \cdot r + \mathcal{O}(r^{2/\beta}), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Уравнение линии  $l_\varphi$  в повернутых декартовых координатах обозначим через  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\varphi(\mathcal{U})$ .

Рассмотрим диапазон изменения  $\varphi \in (-\pi\beta/2, \pi\beta/2) \setminus \{\varphi^*\}$ . Из первого равенства (3.40) находим

$$\mathcal{U}^\beta(r, \varphi) = (\sqrt{a_1^2 + b_1^2})^\beta r \left[ 1 - \beta \frac{\mu \sin(\varphi - \varphi^*) \cos \theta^*}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos(\varphi/\beta)} r^{1-1/\beta} \right] + \mathcal{O}(r^{1/\beta}), \quad r \rightarrow 0, \quad (3.41)$$

откуда получаем асимптотику

$$r = (\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos \varphi/\beta)^{-\beta} + \mathcal{O}(\mathcal{U}^{2\beta-1}), \quad \mathcal{U} \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Подставляя (3.42) во второе соотношение (3.40) и учитывая равенство  $\sin \theta^* = b_1/\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ , находим требуемую асимптотику

$$\mathcal{V}_\varphi(\mathcal{U}) = \frac{\mu b_1 \sin(\varphi - \varphi^*)}{(a_1^2 + b_1^2)^{(1+\beta)/2} (\cos(\varphi/\beta))^\beta} \mathcal{U}^\beta + \mathcal{O}(\mathcal{U}^{2\beta-1}), \quad \mathcal{U} \rightarrow 0. \quad (3.43)$$

Построим теперь асимптотику для  $\tilde{\theta}(\rho) := \theta(\rho) - \theta^*$ . Нетрудно показать, что

$$\rho(\mathcal{U}) = \mathcal{U} + \mathcal{O}(\mathcal{U}^{2\beta-1}), \quad \mathcal{U} \rightarrow 0,$$

откуда следует  $\mathcal{U}(\rho) = \rho + \mathcal{O}(\rho^{2\beta-1})$ . Подставляя это соотношение в (3.43) и переходя к полярным координатам

$$\tilde{\theta} = \arg(\mathcal{U} + i\mathcal{V}), \quad \rho = \sqrt{\mathcal{U}^2 + \mathcal{V}^2},$$

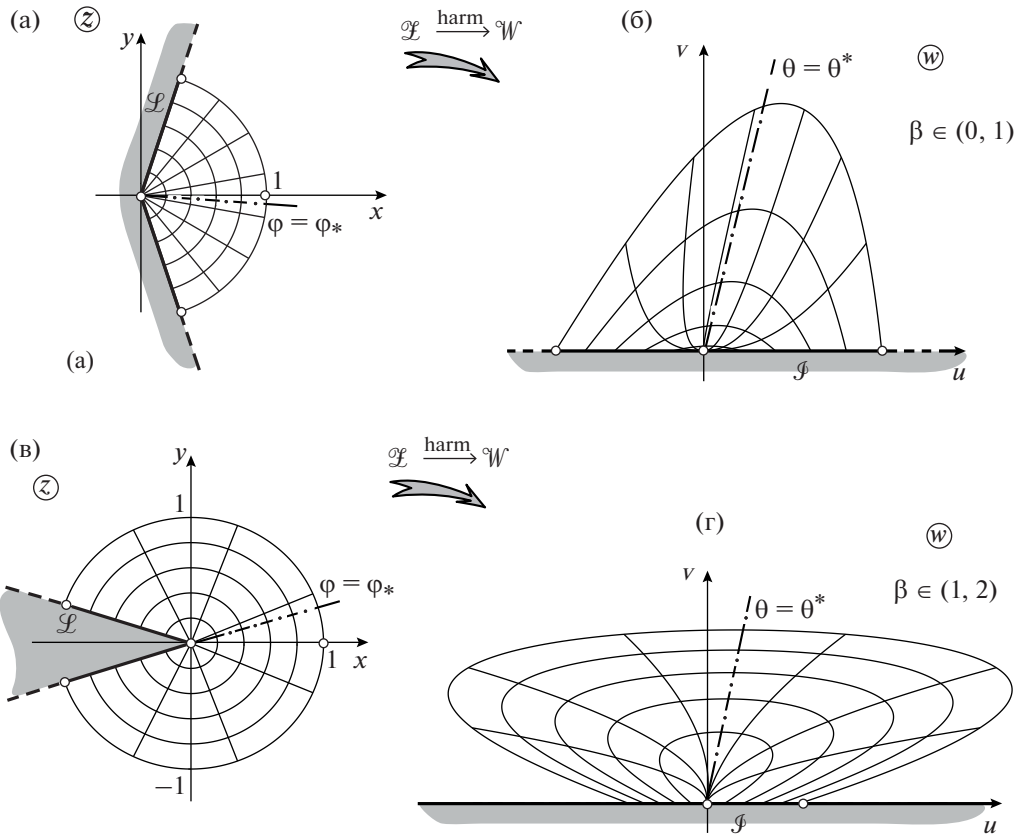
находим асимптотику для  $\theta = \theta^* + \tilde{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \beta \in (1,2), \quad \varphi \in (-\pi\beta/2, \pi\beta/2) \setminus \{\varphi^*\}: \\ \theta_\varphi(\rho) = \theta^* + \frac{\mu b_1 \sin(\varphi - \varphi^*)}{(a_1^2 + b_1^2)^{(1+\beta)/2} (\cos(\varphi/\beta))^\beta} \rho^{\beta-1} + \mathcal{O}(\rho^{2\beta-1}), \quad \rho \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Рассмотрим теперь случай  $\varphi = \varphi^*$ . Проводя аналогичные рассуждения, основанные на анализе асимптотик (3.40), приходим к следующему соотношению:

$$\mathcal{V}_\varphi(\mathcal{U}) = 2 \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{(a_1^2 + b_1^2)^{3/2}} \frac{\varphi^*}{\beta} \mathcal{U}^2 + \mathcal{O}(\mathcal{U}^3), \quad \mathcal{U} \rightarrow 0. \quad (3.45)$$





Фиг. 19

Отсюда, переходя к полярным координатам, получаем требуемую асимптотику для  $\theta^*(\rho)$ :

$$\beta \in (1, 2), \quad \varphi = \varphi^*: \quad \theta^*(\rho) = \theta^* + 2 \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{(a_1^2 + b_1^2)^{3/2}} \operatorname{tg} \frac{\varphi^*}{\beta} \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.46)$$

Из нее с учетом граничного гомеоморфизма (2.4) вытекает следующий вид зависимости  $\theta(\varphi)$ :

$$\beta \in (1, 2): \quad \theta(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi = -\pi\beta/2, \\ \theta^*, & \varphi \in (-\pi\beta/2, \pi\beta/2), \\ \pi, & \varphi = \pi\beta/2. \end{cases} \quad (3.47)$$

Объединяя соотношения (3.38), (3.39), справедливые для случая I, с аналогичными результатами (3.44), (3.46), (3.47) для случая II, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.1** Если  $\beta \in (0, 1)$ , то асимптотика функции  $v = v_\varphi(u)$ , описывающей линию  $l_\varphi = \mathcal{F}(\lambda_\varphi)$  в декартовых координатах, имеет вид (3.38); если же  $\beta \in (1, 2)$ , то асимптотика функции  $\theta = \theta_\varphi(\rho)$ , описывающей линию  $l_\varphi$  в полярных координатах, имеет при  $\theta \neq \theta^*$  вид (3.44), а при  $\theta = \theta^*$  – вид (3.46).

2) Зависимость  $\theta(\varphi)$  между углом  $\varphi$ , под которым луч  $\lambda_\varphi$  выходит из вершины  $z = 0$ , и углом  $\theta$ , под которым его образ  $l_\varphi$  выходит из точки  $w = 0$ , имеет при  $\beta \in (0, 1)$  вид (3.39), а при  $\beta \in (1, 2)$  – вид (3.47).

Иллюстрацией к этой теореме служит фиг. 19. Полярная сетка  $T$  на плоскости  $z = re^{i\varphi}$  вблизи контура угла  $\mathcal{L}$ , определяемая по формуле

$$T = \left\{ r = \frac{n}{5}, n = \overline{1, 5}; \varphi = \frac{\pi\beta}{2} \left( \frac{2n}{7} - 1 \right), n = \overline{0, 7} \right\},$$

изображена на фиг. 19а и фиг. 19в соответственно для некоторых значений  $\beta < 1$  и  $\beta > 1$ . Для этих же случаев I и II даны образы (при отображении  $\mathcal{F}$ ) этой сетки соответственно на фиг. 19б и фиг. 19г.

На фиг. 19б видно, что при  $\beta < 1$  образы  $l_\varphi = \mathcal{F}(\lambda_\varphi)$  всех лучей  $\lambda_\varphi$ , соответствующих  $(-\pi\beta/2, \varphi^*)$ , “прилипают” к граничному отрезку  $\mathcal{J}_+$ , особая линия  $l^*$  — образ луча, соответствующего  $\varphi = \varphi^*$ , выходит из точки  $w = 0$  под углом  $\theta^*$ , а образы  $l_\varphi$  всех лучей  $\lambda_\varphi$ , соответствующих  $(\varphi^*, \pi\beta/2)$ , “прилипают” к граничному отрезку  $\mathcal{J}_-$ . На фиг. 19г видно, что при  $\beta > 1$  все  $l_\varphi$ , за исключением лежащих на граничном отрезке  $\mathcal{J}$  (т.е. соответствующих  $\varphi = -\pi\beta/2$  или  $\varphi = \pi\beta/2$ ), “прилипают” в вершине  $z = 0$  к особой линии  $l^*$ .

Эти численные иллюстрации подтверждают положения теоремы 2.

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

### 4.1. Метод мультиполей

**4.1.1. Предварительные замечания.** Для решения краевых задач типа (1.2), к которым сводится построение гармонического отображения рассматриваемых областей, т.е.  $L$ -образной области  $\mathcal{K}$  (фиг. 1), области  $S$  с полукруглой выемкой (фиг. 2) и области  $\mathcal{N}$  с прямоугольным вырезом (фиг. 3), в работе применяется метод мультиполей (см. [46–48]).

Характерной чертой метода является выделение той части границы области, вблизи которой решение имеет сложный (резко переменный или сингулярный) характер, и где требуется получение решения (а часто и его дифференциальных характеристик) с высокой точностью.

Называя  $g$  любую из рассматриваемых областей  $\mathcal{K}$ ,  $S$  или  $\mathcal{N}$ , обозначим выделенный участок границы через  $\gamma$ . Для  $L$ -образной области  $\mathcal{K}$  таким участком естественно считать контур  $\mathcal{L}$  угла (см. фиг. 3а), для области  $S$  — дугу  $l_3 \cup l_4 \cup l_1$ , содержащую полукруговую выемку (фиг. 10а и 11а), а для области  $\mathcal{N}$  — контур прямоугольного выреза  $(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5)$  (см. фиг. 14а и 15). Оставшийся участок границы  $\partial g \setminus \gamma$  назовем  $\Gamma$ .

Эффективность применения метода мультиполей для рассматриваемых задач основана на том, что для данных областей  $g$  легко указать такое их расширение  $G$  через дугу  $\Gamma$ , для которого можно в явном аналитическом виде найти его конформное отображение  $\Phi$  на верхнюю полуплоскость. Ниже показано, что с помощью этого отображения легко строится система функций  $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел, обладающая хорошими аппроксимативными свойствами. (Эти аппроксимативные функции родственны мультиполям из комплексного анализа и теории потенциала (см. [51]), откуда и название метода.) С помощью данной системы находятся решения соответствующих краевых задач и в итоге строится требуемое гармоническое отображение.

**4.1.2. Общая схема метода.** Общая схема этого метода заключается в следующем. Пусть граница  $\partial g$  односвязной области  $g$  на комплексной плоскости  $z$  состоит из двух дуг,  $\Gamma$  и  $\gamma$ , из которых первая является жордановой кусочно-гладкой, а для области  $g$  существует ее расширение  $G$  через дугу  $\Gamma$ , т.е. такая односвязная область  $G$ , что выполняются условия: 1)  $G \supset g$ , 2)  $\partial G \supset \gamma$ , 3)  $G \supset \text{Int } \Gamma$ . Точки дуги  $\Gamma$  обозначаем через  $z'$ , а (произвольную) жорданову дугу  $\lambda$  без концевых точек — через  $\text{Int } \lambda$ .

В области  $g$  рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta \psi(z) = 0, \quad z \in g, \quad (4.1)$$

$$\psi(z) = 0, \quad z \in \gamma, \quad (4.2)$$

$$\psi(z') = h(z'), \quad z' \in \Gamma, \quad (4.3)$$

где функция  $h(z')$  принадлежит  $L_2(\Gamma)$ ; однозначная разрешимость этой задачи в функциональном пространстве типа Харди установлена в [47].

Пусть выполняются указанные выше геометрические условия для областей  $G$  и  $g$ . Выберем на  $\text{Int } \gamma$  точку  $N$ , а на дополнительной (открытой) дуге  $\partial G \setminus \gamma$  — точку  $M$  и введем конформное

отображение  $w = \Phi(z)$  расширения  $G$  на верхнюю полуплоскость  $\mathbb{H}$ , удовлетворяющее нормировке

$$\Phi(N) = 0, \quad \Phi(M) = \infty. \quad (4.4)$$

Определим функции  $\Omega_k(z)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , по формуле

$$\Omega_k(z) = \text{Im}[\Phi(z)]^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

В [47] доказано следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Функции  $\Omega_k(z)$  являются гармоническими в области  $g$ , удовлетворяют на  $\gamma$  однородному условию  $\Omega_k(z) = 0$  и образуют полную и минимальную систему в  $L_2(\Gamma)$ .*

В соответствии с этой теоремой решение задачи (4.1)–(4.3) ищем в виде предела последовательности  $\{\psi^N\}$  приближенных решений (здесь и далее  $N$  – верхний индекс)

$$\psi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi^N(z), \quad \psi^N(z) := \sum_{k=1}^N a_k^N \Omega_k(z), \quad (4.6)$$

где коэффициенты  $a_k^N$  определяются из условия минимальности отклонения приближенного решения  $\psi^N$  от граничной функции  $h$  в норме  $L_2(\Gamma)$ , т.е.  $\|\psi^N - h; L_2(\Gamma)\| = \min$ . Это условие приводит к следующей системе линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^N (\Omega_n, \Omega_k) a_k^N = (\Omega_n, h), \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.7)$$

где через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено скалярное произведение в  $L_2(\Gamma)$ , т.е.

$$(\Omega_n, \Omega_k) = \int_{\Gamma} \Omega_n(z') \Omega_k(z') |dz'|, \quad (\Omega_n, h) = \int_{\Gamma} \Omega_n(z') h(z') |dz'|. \quad (4.8)$$

Обозначим верхний полукруг и его полуокружность соответственно через

$$\mathbb{U}^+ := \{|\zeta| < 1, \text{Im} > 0\}, \quad \mathbb{T}^+ := \{|\zeta| = 1, \text{Im} > 0\},$$

а через  $z = \omega(\zeta)$  – конформное отображение полукруга  $\mathbb{U}^+$  на  $g$ , переводящее полуокружность  $\mathbb{T}^+$  в дугу  $\Gamma$ . Сходимость описанного метода обеспечивает установленная в [47] следующая

**Теорема 4.** *Справедливы утверждения*

$$1) \lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^N - h; L_2(\Gamma)\| = 0;$$

2) *последовательность приближенных решений  $\{\psi^N(z)\}_N$  равномерно сходится при  $N \rightarrow \infty$  к решению  $\psi(z)$  задачи (4.1)–(4.3) на любом компакте  $\mathcal{E} \subset (g \cup \text{Int } \gamma)$ , и выполняется оценка*

$$\max_{z \in \mathcal{E}} |\psi(z) - \psi^N(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta} \left\| \frac{1}{\omega}; L_1(\mathbb{T}^+) \right\|^{1/2} \|h - \psi^N; L_2(\Gamma)\|, \quad (4.9)$$

где  $\delta$  – расстояние от  $\omega^{-1}(\mathcal{E})$  до  $\mathbb{T}^+$ .

Если граничная функция  $h(z')$  в граничном условии (4.3) непрерывна, тогда как точное  $\psi(z)$ , так и приближенное  $\psi^N(z)$  решения задачи (4.1)–(4.3) являются гармоническими в  $g$  и непрерывными в  $\bar{g}$ , а значит, такой же является и их разность, и к ней применим принцип максимума. Отсюда получаем апостериорную оценку погрешности приближенного решения в норме  $C(\bar{g})$ :

$$\max_{z \in \bar{g}} |\psi(z) - \psi^N(z)| \leq \max_{z' \in \Gamma} |h(z') - \psi^N(z')|; \quad (4.10)$$

очевидно, что правая часть этого неравенства легко вычисляется после нахождения приближенного решения.

#### 4.2. Построение гармонического отображения $L$ -образных областей

Под областью  $L$ -образной формы мы понимаем шестиугольник  $\mathcal{H}$ , изображенный на фиг. 3а, со входящим углом  $\mathcal{L}$  раствора  $\pi\beta$ ,  $\beta \in (1, 2)$ , определяемым формулой (2.3) и имеющим вершину  $z_1 = 0$ . Контур угла  $\mathcal{L}$  переобозначим через  $\gamma$ , а оставшуюся часть границы  $\partial\mathcal{H}$  — через  $\Gamma$ .

Согласно сказанному в п. 1.1, построение функции  $w = \mathcal{F}(z)$ , осуществляющей отображение  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \xrightarrow{\text{harm}} \Pi$ , сводится к решению задачи Дирихле

$$\Delta \mathcal{F}(z) = 0, \quad z \in \mathcal{H}; \quad \mathcal{F}(z) = B(z), \quad z \in \partial\mathcal{H}, \quad (4.11)$$

где для граничного гомеоморфизма  $B(z)$ , переписанного через текущие длины в виде  $\mathfrak{B}(s)$ , производная  $d\mathfrak{B}/ds$  постоянна на каждой из сторон шестиугольника  $\mathcal{H}$ , причем

$$d\mathfrak{B}/ds = \begin{cases} \sigma_-, & z \in \mathcal{L}_-, \\ \sigma_+, & z \in \mathcal{L}_+. \end{cases}$$

Тогда, обозначая

$$u(z) + iv(z) = \mathcal{F}(z) - Q(z),$$

где  $Q$  определяется формулой (3.8), и учитывая (4.11) и (3.11), получаем для непрерывных в  $\overline{\mathcal{H}}$  компонент  $u(z)$ ,  $v(z)$  отображения следующие краевые задачи:

$$\Delta u(z) = 0, \quad z \in \mathcal{H}, \quad u(z) = 0, \quad z \in \gamma, \quad u(z') = \operatorname{Re} B(z') - Q(z'), \quad z' \in \Gamma, \quad (4.12)$$

$$\Delta v(z) = 0, \quad z \in \mathcal{H}, \quad v(z) = 0, \quad z \in \gamma, \quad v(z') = \operatorname{Im} B(z'), \quad z' \in \Gamma. \quad (4.13)$$

Задачи (4.12), (4.13) решаем методом мультиполей, изложенным в п. 4.1, для которого принимаем  $\Phi(z) = z^{1/\beta}$ , так что

$$\Omega_k(z) = \operatorname{Im}(iz^{1/\beta})^k.$$

Далее применяем алгоритм метода мультиполей, изложенный в подпункте 4.1.2. Численная реализация осуществлена для трех вариантов  $L$ -образной области,  $\mathcal{H}_{(1)}$ ,  $\mathcal{H}_{(2)}$ ,  $\mathcal{H}_{(3)}$ . На фиг. 4а–4в даны соответствующие картины их гармонического отображения. При этом апостериорная оценка погрешности в норме  $C(\overline{\mathcal{H}_{(j)}})$  составила менее  $10^{-7}$  при использовании 120 аппроксимативных функций.

#### 4.3. Построение гармонического отображения подковообразной области

Для того чтобы определить общий вид области  $S$  с полукруговой выемкой, частным случаем которой является изображенная на фиг. 10 подковообразная область  $S_{(1)}$ , введем вначале область

$$\mathcal{G} := \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\},$$

являющуюся расширением области  $S$ ; на фиг. 11 заштриховано дополнение к  $\mathcal{G}$ .

Выберем на границе  $\partial\mathcal{G}$  точки  $z_2 \in (1, \infty)$  и  $z_3 \in (-\infty, -1)$  и соединим их (кусочно-гладкой) дугой  $l_2$ , целиком, кроме концевых точек  $z_2$  и  $z_3$ , лежащей в области  $\mathcal{G}$ . Тогда в качестве области  $S$  примем внутренность контура  $l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$ , образованного отрезками  $l_1 = [1, 2]$  и  $l_3 = [-2, -1]$  границы  $\partial\mathcal{G}$ , лежащими на вещественной оси  $\mathbb{R}$ , а также дугой  $l_2$ , введенной выше, и полуокружностью  $l_4 = \{z : |z| = 1, y \geq 0\}$ . Типичная область  $S$  из описанного класса областей с полукруговой выемкой изображена (затенена) на фиг. 11.

Генерируемое гармоническое отображение

$$F : S \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{Q}, \quad F(l_n) = L_n, \quad n = \overline{1, 4}, \quad (4.14)$$

области  $S$  на квадрат  $\mathcal{Q}$  (см. фиг. 11) подчиним граничному гомеоморфизму  $w = B(z)$ , при котором “граничная производная” этого гомеоморфизма, переписанного через текущие длины дуг, постоянна на  $l_n$ , точнее

$$d\mathfrak{B}/ds = |l_n|^{-1}, \quad z \in l_n.$$

Тогда задача Дирихле (1.2), к решению которой согласно п. 1.1 сводится построение отображения  $F$ , приобретает следующий вид:

$$\Delta F(z) = 0, \quad z \in S, \quad (4.15)$$

$$B(z) = z_n - (i)^{n+1} |l_n|^{-1} [s(z) - \sigma_n], \quad z \in l_n, \quad n = \overline{1, 4}; \quad (4.16)$$

здесь  $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n-1} |l_k|$ , а  $z_n$  суть вершины квадрата  $\mathcal{Q}$ , определяемые равенствами  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = 1 + i$ ,  $z_4 = i$  (см. фиг. 11б). Задача (4.15), (4.16), в свою очередь, приводится к двум задачам Дирихле отдельно для вещественной  $u(z)$  и мнимой  $v(z)$  частей отображения  $u(z) + iv(z) = F$  с граничными условиями, вытекающими из формулы (4.16).

Построим с помощью метода мультиполей гармоническое отображение конкретной области из рассматриваемого класса, а именно, подковообразной области  $S_{(1)}$  на квадрат  $\mathcal{Q}$ . Для этого зададим дугу  $l_2$  как полуэллипс:

$$l_2 = \{z = x + iy : y = A\sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2]\}.$$

Тогда граничный гомеоморфизм (4.16) переписывается для вещественной  $u(z)$  и мнимой  $v(z)$  частей отображения в виде

$$\begin{aligned} u(z) &= x - 1, \quad z \in l_1; & u(z) &= 1, \quad z \in l_2; \\ u(z) &= -x - 1, \quad z \in l_3; & u(z) &= 0, \quad z \in l_4; \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} v(z) &= 0, \quad z \in l_1; & v(z) &= \mathcal{V}(z), \quad z \in l_2; \\ v(z) &= 1, \quad z \in l_3; & v(z) &= \pi^{-1} \arccos x, \quad z \in l_4. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь  $\mathcal{V}(z)$  определяется по формуле

$$\mathcal{V}(z) = \begin{cases} \mathcal{E}(2^{-1}y/A, k), & z \in l_2 \cap \{\operatorname{Re} z \geq 0\}, \\ 1 - \mathcal{E}(2^{-1}y/A, k), & z \in l_2 \cap \{\operatorname{Re} z \leq 0\}, \end{cases} \quad (4.19)$$

где  $\mathcal{E}(\xi, k)$  дается равенством  $\mathcal{E}(\xi, k) := 2^{-1} E(\xi, k)/E(k)$ , в котором  $E(\xi, k)$  и  $E(k)$  суть соответственно неполный и полный эллиптические интегралы второго рода (см. [51]), т.е.

$$E(\xi, k) := \int_0^\xi \sqrt{(1 - k^2 t^2)/(1 - t^2)} dt, \quad E(k) := E(1, k), \quad (4.20)$$

с модулем  $k = \sqrt{1 - A^{-2}}$ .

Переобозначим дугу  $l_3 \cup l_4 \cup l_1$  через  $\gamma$ , дугу  $l_2$  — через  $\Gamma$ , а область  $S_{(1)}$  — через  $g$ , так что  $\partial S_{(1)} = \gamma \cup \Gamma$ . Область  $\mathcal{G}$  является расширением области  $g$  через дугу  $\Gamma$ , и, таким образом, геометрические условия применимости метода мультиполей выполняются (см. подпункт 4.1.2).

Определим две функции,  $u_0(z)$  и  $v_0(z)$ , используемые для того чтобы на дуге  $\gamma$  получить однородное условие Дирихле, что является необходимым для применения метода мультиполей:

$$u_0(z) = 1 + \operatorname{Re} \left( \frac{2}{\pi i} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{z^2-1}{2z} - \frac{z^2+1}{\pi i z} \ln \frac{z^2-1}{2z} \right), \quad (4.21)$$

$$v_0(z) = \pi^{-1} \arg z. \quad (4.22)$$

Представляя компоненты  $u(z)$  и  $v(z)$  отображения в виде

$$u(z) = u_0(z) + U(z), \quad v(z) = v_0(z) + V(z), \quad (4.23)$$

получаем с учетом (4.17), (4.18) следующие постановки задач для функций  $U$  и  $V$ :

$$\Delta U = 0, \quad z \in \mathcal{G}; \quad U = 0, \quad z \in \gamma; \quad U = 1 - u_0, \quad z \in l_2; \quad (4.24)$$

$$\Delta V = 0, \quad z \in \mathcal{G}; \quad V = 0, \quad z \in \gamma; \quad V = \mathcal{V} - v_0, \quad z \in l_2. \quad (4.25)$$

Решения задач (4.24) и (4.25) будем строить с помощью модификации метода мультиполей, который, применительно к указанным задачам, использует систему аппроксимативных функций  $\tilde{\Omega}_k(z)$ , определяемых по формуле

$$\tilde{\Omega}_k(z) := \operatorname{Im}(z^k + z^{-k}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Система этих функций, являющихся модификацией мультиполей  $\Omega_k(z)$ , определяемых по формуле (4.5) через функцию Жуковского  $\Phi(z) = (z + z^{-1})/2$ , обладает теми же аппроксимативными свойствами, что и система  $\{\Omega_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , так как каждая функция  $\tilde{\Omega}_k(z)$  является линейной комбинацией функций  $\Omega_l(z)$ ,  $l = 1, k$ , и, значит, система  $\{\tilde{\Omega}_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$  может служить основой для метода. С его помощью было получено отображение (4.14), картина которого представлена на фиг. 11. Апостериорная оценка допущенной погрешности составила  $10^{-7}$  при использовании 120 аппроксимативных функций (4.26).

Все основные положения изложенного алгоритма построения отображения переносятся на произвольную область  $S$  с полукруговой выемкой при определении  $\gamma$  как дуги  $(z_3 z_4 z_1 z_2)$ , а  $\Gamma$  как дуги  $l_2$ .

#### 4.4. Построение гармонического отображения области с прямоугольным вырезом

**4.4.1. Постановка задачи.** Для определения области  $\mathcal{N}$  с прямоугольным вырезом введем область  $G$ , изображенную на фиг. 14в, представляющую собой внешность полуполосы шириной  $2\varepsilon$ :

$$G := \mathbb{C} \setminus \{z = x + y : x \in (-\infty, 0), y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}, \quad (4.27)$$

где  $\mathbb{C}$  — комплексная плоскость. Бесконечно удаленную точку границы  $\partial G$  обозначим через  $z_0$ , середину торца — через  $z_3 := 0$ , а вершины области — через  $z_2 := i\varepsilon$  и  $z_4 := -i\varepsilon$ .

Выберем некоторые точки  $z_1$  и  $z_5$  соответственно на сторонах  $(z_0 z_2)$  и  $(z_4 z_0)$  области  $G$ . Дугу  $(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5)$  границы  $\partial G$  назовем  $\gamma$  (см. фиг. 14). Соединим  $z_5$  и  $z_1$  жордановой кусочно-гладкой дугой  $\Gamma$ , целиком (кроме концевых точек) лежащей в области  $G$ , и составим замкнутый жорданов контур  $\gamma \cup \Gamma$ . Его внутренность назовем областью  $g = \mathcal{N}$  и примем ее в качестве общего вида области с выемкой, для построения гармонического отображения  $w = \mathcal{F}(z)$  которой на прямоугольник

$$\Pi := \{w = u + iv : u \in (-A, A), v \in (0, B)\} \quad (4.28)$$

дан вычислительный метод.

Согласно разд. 1, построение гармонического отображения  $w = \mathcal{F}(z)$  области  $\mathcal{N}$  на  $\Pi$  сводится, как и выше, к решению задачи Дирихле

$$\Delta \mathcal{F}(z) = 0, \quad z \in \mathcal{N}; \quad \mathcal{F}(z) = B(z), \quad z \in \partial \mathcal{N}.$$

Здесь заданный граничный гомеоморфизм  $B : \partial \mathcal{N} \xrightarrow{\text{hom}} \partial \Pi$  осуществляет соответствие

$$B(z_n) = w_n, \quad n = \overline{1, 5},$$

между точками границ области  $\mathcal{N}$  и вершинами прямоугольника  $\partial \Pi$  (см. фиг. 14). Таким образом, гомеоморфизм  $B$  переводит контур  $\gamma$  выемки в нижнюю сторону прямоугольника.

Кроме того, данный гомеоморфизм, переписанный через текущую длину дуг (тогда его переобозначаем как  $\mathfrak{B}$ ), отвечает требованию, что его производная  $d\mathfrak{B}/ds$  равна

$$\frac{d\mathfrak{B}(s)}{ds} = \begin{cases} V_1, & z \in (z_1 z_2), \\ V_2, & z \in (z_2 z_3 z_4), \\ V_3, & z \in (z_4 z_5). \end{cases} \quad (4.29)$$

Тогда размеры  $A$ ,  $B$  прямоугольника  $\Pi$  и точка  $w_3 := B(z_3)$  — прообраз начала координат  $z_3 := 0$  — выражаются через параметры формулы (4.29) и координаты точек  $x_k + iy_k = z_k = B^{-1}(w_k)$  границы  $\partial\mathcal{N}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{V_1}{2}x_1 + V_2\varepsilon + \frac{V_3}{2}(x_4 - x_5), \\ B &= \int_{z_5}^{z_6} \frac{d\mathcal{B}(s)}{ds} ds, \quad w_3 = -\frac{V_1}{2}x_1 - \frac{V_3}{2}(x_4 - x_5). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Нетрудно убедиться, что гармоническая функция

$$\mathcal{P}(x, y) := \frac{V_1 + V_3}{2\varepsilon}xy + \frac{V_1 - V_3}{2}x - V_2y + w_3 \quad (4.31)$$

удовлетворяет условию

$$\mathcal{P}(x, y) := \mathcal{B}(z), \quad z \in \gamma, \quad (4.32)$$

где параметризованный по текущим длинам  $s$  и  $S$  гомеоморфизм  $\mathcal{B}$  отвечает требованиям (4.29). Тогда, представляя искомое отображение  $\mathcal{F} : \mathcal{N} \xrightarrow{\text{harm}} \Pi$  в виде суммы

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{P}(z) + U(z) + iV(z), \quad (4.33)$$

где  $U(z)$  и  $V(z)$  — вещественные, гармонические в  $\mathcal{N}$  и непрерывные в  $\overline{\mathcal{N}}$  функции, приходим к следующим двум задачам Дирихле для этих функций в области  $\mathcal{N}$ :

$$\Delta U(z) = 0, \quad z \in \mathcal{N}, \quad U(z) = 0, \quad z \in \gamma, \quad U(x', y') = \operatorname{Re} \mathcal{B}(z') - \mathcal{P}(x', y'), \quad z' \in \Gamma, \quad (4.34)$$

$$\Delta V(z) = 0, \quad z \in \mathcal{N}, \quad V(z) = 0, \quad z \in \gamma, \quad V(x', y') = \operatorname{Im} \mathcal{B}(z'), \quad z' \in \Gamma; \quad (4.35)$$

где  $z'$  — точки дуги  $\Gamma$ .

**4.4.2. Вычисление мультиполей через конформное отображение.** Аппроксимативная система функций определяется с помощью равенства

$$\Omega_k(z) = \operatorname{Im}[\Phi(z)]^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.36)$$

через конформное отображение

$$\Phi : G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}, \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\infty) = \infty. \quad (4.37)$$

Обратное отображение

$$\Phi^{-1} : \mathbb{H} \xrightarrow{\text{conf}} G \quad (4.38)$$

может быть записано через интеграл Кристоффеля–Шварца (см. [51]) или в элементарном виде

$$z = \Phi^{-1}(w) = e^{-i\pi} \frac{4\varepsilon}{\pi} \int_1^w \sqrt{t^2 - 1} dt - i\varepsilon = \quad (4.39)$$

$$= e^{-i\pi} \frac{2\varepsilon}{\pi} [w\sqrt{w^2 - 1} - \ln(w + \sqrt{w^2 - 1})] - i\varepsilon. \quad (4.40)$$

С помощью представления (4.39) мы выводим для искомого прямого отображения  $w = \Phi(z)$  степенные разложения вблизи вершин  $z_2 := i\varepsilon$  и  $z_4 := -i\varepsilon$ , представляющие это отображение соответственно в секторах

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_2 &:= \left\{ z : |z - z_2| \leq 2\varepsilon, \arg(z - z_2) \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \pi \right] \right\}, \\ \mathbb{S}_4 &:= \left\{ z : |z - z_4| \leq 2\varepsilon, \arg(z - z_4) \in \left[ -\pi, \frac{\pi}{2} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (4.41)$$

где эти разложения сходятся. При этом достаточно получить одно из этих разложений, например, вблизи точки  $z_4 := -i\varepsilon$ . Тогда второе разложение получается из него применением преобразования симметрии. В остальной части области  $G$  отображение  $w = \Phi(z)$  строится с помощью метода Ньютона (см. [52]) с использованием формул (4.39), (4.40).

Найдем разложение отображения  $w = \Phi(z)$  вблизи вершины  $z_4$ . Разлагая подынтегральное выражение (4.39) в биномиальный ряд по степеням  $(t-1)$  и интегрируя, получим для обратного отображения  $z = \Phi^{-1}(w)$  следующее представление вблизи образа  $w_4 = 1$  вершины  $z_4 = -i\varepsilon$ :

$$z = \Phi^{-1}(w) = e^{-i\pi\mu} \left[ (w-1) + \sum_{m=2}^{\infty} A_m (w-1)^m \right]^{3/2} - i\varepsilon, \quad (4.42)$$

где  $\mu := \frac{8\sqrt{2}\varepsilon}{3\pi}$ , а коэффициенты  $A_m$  выражаются через величины

$$a_k := \left( \frac{1}{2} \right) \frac{2^{-k} 3}{3 + 2k}$$

по формуле

$$A_{m+1} = \sum_{\pi(m)} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3} - k\right) k_1! k_2! \dots k_m!} \prod_{j=1}^m (a_j)^{k_j}; \quad (4.43)$$

здесь  $\binom{a}{b}$  — биномиальные коэффициенты,  $k = k_1 + \dots + k_m$ , а сумма в (4.43) берется по всем решениям  $(k_1, \dots, k_m)$  уравнения  $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$  в неотрицательных целых числах, иначе говоря, по всем разбиениям  $\pi(m)$  числа  $m$ .

Обращая представление (4.42) с помощью формул Бюрмана–Лагранжа (см. [51]) и Фаа ди Бруно (см. [53]), получаем представление для отображения  $w = \Phi(z)$  вблизи вершины  $z_4 = -i\varepsilon$ :

$$w = \Phi(z) = 1 + \left( \frac{e^{i\pi} z + i\varepsilon}{\mu} \right)^{2/3} + \sum_{p=2}^{\infty} C_p \left( \frac{e^{i\pi} z + i\varepsilon}{\mu} \right)^{2p/3}. \quad (4.44)$$

Множеством сходимости разложения в (4.44) является сектор  $\mathbb{S}_4$ , а коэффициенты  $C_p$  даются формулой

$$C_p = \frac{1}{p} \sum_{\pi(p-1)} \frac{(-1)^k \binom{p+k-1}{k}}{k_1! k_2! \dots k_{p-1}!} \prod_{j=1}^{p-1} (A_{j+1})^{k_j}, \quad (4.45)$$

где  $k = k_1 + \dots + k_{p-1}$ , а сумма берется по всем решениям  $(k_1, \dots, k_{p-1})$  в неотрицательных целых числах уравнения  $k_1 + 2k_2 + \dots + (p-1)k_{p-1} = p-1$ , иначе говоря, по всем разбиениям числа  $(p-1)$ .

Вычислив с помощью изложенного алгоритма отображение  $\Phi(z)$ , находим требуемые мультиполи  $\Omega_k(z)$  по формуле (4.36), после чего получаем с помощью изложенного в п. 4.1 метода мультиполей отображение  $\mathcal{F} : \mathcal{N} \xrightarrow{\text{harm}} \Pi$  для любой области  $\mathcal{N}$  из описанного класса, в том числе и для областей  $\mathcal{N}_{(1)}$  и  $\mathcal{N}_{(2)}$ , изображенных на фиг. 13, 15.

**4.4.3. Численные результаты.** Результаты численной реализации полученного решения задачи о построении гармонического отображения представлены для двух вариантов области с прямоугольным вырезом — областей  $\mathcal{N}_{(1)}$  и  $\mathcal{N}_{(2)}$  — в виде картин соответствующих отображений  $\tilde{\gamma}_{(1)}(z)$  и  $\tilde{\gamma}_{(2)}(z)$ , приведенных на фиг. 13, 15. Апостериорная оценка погрешности этих отображений в норме  $C(\bar{\mathcal{N}})$  составила  $10^{-7}$  при использовании 120 аппроксимативных функций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Radó T. Aufgabe 41 // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. 1926. V. 35. P. 49.
2. Kneser H. Lösung der Aufgabe 41 // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. 1926. V. 35. P. 123–124.



3. *Choquet G.* Sur un type de transformation analytiques généralisant la représentation conforme et définie au moyen de fonctions harmoniques // *Bull. Sci. Math.* 1945. V. 69. № 2. P. 156–165.
4. *Duren P.* Harmonic mappings in the plane, “Cambridge Tracts in Mathematics”. V. 156. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
5. *Кудрявцев Л.Д.* О свойствах гармонических отображений плоских областей // *Матем. сб.* 1955. Т. 36 (4.12). № 2. С. 201–208.
6. *Hamilton R.* Harmonic maps of manifolds with boundary. In: “Lecture Notes in Computer Science”. VI. 471. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975.
7. *Clunie J., Sheil-Small T.* Harmonic univalent functions // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* 1984. V. 9. P. 3–25.
8. *Jost J.* Lectures on harmonic maps. “Lecture Notes in Mathematics”. V. 1161, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1985.
9. *Winslow A.M.* Numerical solution of the quasilinear Poisson equations in a nonuniform triangle mesh // *J. Comp. Phys.* 1966. V. 1. № 2. P. 149–172.
10. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1972. Т. 12. № 2. P. 429–440.
11. *Thompson J.F., Thames C.W., Mastin C.W.* Automatic numerical generation of body fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies // *J. Comput. Phys.* 1974. V. 15. P. 299–319.
12. *Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д.* О вариационном методе построения сеток // *Численные методы в механике сплошной среды.* Новосибирск. 1977. Т. 8. № 4. С. 157–163.
13. *Brackbill J.U., Saltzman J.S.* Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // *J. Comput. Phys.* 1982. V. 46. № 3. P. 342–368.
14. *Castillo J.E., Steinberg S., Roache P.J.* Mathematical aspects of variational grid generation II // *J. Comp. and Appl. Math.* 1987. V. 20. P. 127–135.
15. *Иваненко С.А.* Построение невырожденных сеток // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1988. Т. 28. № 10. С. 1498–1506.
16. *Иваненко С.А., Чарахчян А.А.* Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1988. Т. 28. № 4. С. 503–514.
17. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Прокопов Г.П., Крайко А.М.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
18. *Лисейкин В.Д., Шокин Ю.И., Васева И.А., Лиханова Ю.В.* Технология построения разностных сеток. Новосибирск: Наука, 2009.
19. *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.* Numerical grid generation. Foundations and Applications N.-Y.: North-Holland, 1985.
20. *Sengupta S., Hauser J., Eiseman P.R., Thompson J.F.* (Eds.) Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics’88. N.-Y.: Pineridge Press Ltd, 1988.
21. *Castillo J.E. (Ed.)* Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation. Philadelphia: SIAM, 1991.
22. *Knupp P., Steinberg S.* Fundamentals of Grid Generation. Florida: CRC Press. Boca Raton, 1992.
23. *Иваненко С.А.* Адаптивно-гармонические сетки. М.: Изд-во ВЦ РАН, 1997.
24. *Ivanenko S.A.* Harmonic Mappings. In: Thompson J.E., Soni B.K., Weatherill N.P. (Eds.) Handbook of Grid Generation. Boca Raton, London, N.Y., Washington, D.C.: RCR Press LLC, 1999.
25. *Marcum D.L.* Unstructured Grid Generation Using Automatic Point Insertion and Local Reconnection. In: Thompson J.E., Soni B.K., Weatherill N.P. (Eds.) Handbook of Grid Generation. Boca Raton, London, N.Y., Washington, D.C.: RCR Press LLC, 1999.
26. *Liseikin V.D.* Grid generation methods. N.-Y.: Springer-Verlag, 2017.
27. *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.* Boundary-fitted coordinate systems for numerical solutions of partial differential equations // *J. Comput. Phys.* 1982. V. 47. № 2. P. 1–109.
28. *Лисейкин В.Д.* Технология конструирования трехмерных сеток для задач аэрогидродинамики (обзор) // *Вопр. атомной науки и техн. Матем. моделирование физ. процессов.* 1991. Вып. 3. С. 31–45.
29. *Софронов И.Д., Рассказова В.В., Нестеренко Л.В.* Нерегулярные сетки в методах расчета нестационарных задач газовой динамики // *Вопр. матем. моделирования, вычисл. матем. и информатики.* М.: Арзамас-16, Мин. РФ Атомной энергии, 1994. С. 131–183.
30. *Лисейкин В.Д.* Обзор методов построения структурированных адаптивных сеток // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1996. Т. 36. № 1. С. 3–41.
31. *Иваненко С.А., Прокопов Г.П.* Методы построения адаптивно-гармонических сеток // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1997. Т. 37. № 6. С. 643–662.
32. *Прокопов Г.П.* Методология вариационного подхода к построению квазиортогональных сеток // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделир. физ. процессов.* 1998. № 1. С. 37–46.

33. *Иваненко С.А.* Управление формой ячеек в процессе построения сетки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 11. С. 1662–1684.
34. *Безродных С.И., Власов В.И.* Об одной проблеме конструктивной теории гармонических отображений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 46. С. 5–30.
35. *Roache P.J., Steinberg S., Moeny W.M.* Interactive electric field calculations for lasers // AIAA Paper No. 84-1655, Proc. AIAA 17-th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, and Lasers Conference, Snomass. Colorado, June, 1984.
36. *Roache P.J., Steinberg S.* A new approach to grid generation using a variational formulation // AIAA Paper No. 85-1527-CP, Proc. AIAA 7-th Computational Fluid Dynamics Conference, Cincinnati OH, July, 1985. P. 360–370.
37. *Castillo J.E., Steinberg S., Roache P.J.* On the folding of numerically generated grids: use of a reference grid // Comm. Appl. Numer. Method. 1988. V. 4. P. 471–481.
38. *Knipp P., Luczak R.* Truncation error in grid generation: a case study // Numer. Meth. Part. Differ. Equats. 1995. V. 11. P. 561–571.
39. *Азаренок Б.Н.* О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 5. С. 826–839.
40. *Азаренок Б.Н., Чарахчян А.А.* О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений // Матем. моделирование. 2014. Т. 26. № 12. С. 48–64.
41. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
42. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
43. *Марчук Г.И., Алошков В.И.* Введение в проекционно-разностные методы. М.: Наука, 1981.
44. *Безродных С.И., Власов В.И.* О поведении гармонического отображения в углах // Матем. заметки. 2017. Т. 101. № 3. С. 474–480.
45. *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Singular behavior of harmonic maps near corners // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. V. 64. № 5. P. 838–851.
46. *Власов В.И.* Об одном методе решения некоторых смешанных задач для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 5. С. 1012–1015.
47. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
48. *Vlasov V.I.* Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains // Zeitschr. Angew. Math. Mech. 1996. V. 76. Suppl. 1. P. 279–282.
49. *Безродных С.И., Власов В.И.* Об одной вычислительной проблеме двумерных гармонических отображений // Научные ведомости БелГУ. 2009. № 13 (4.2). Вып. 17/2. С. 30–44.
50. *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* The method of harmonic mapping of regions with a notch // Math. Notes. 2022. V. 112. № 6. P. 831–844.
51. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
52. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
53. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.А.* Лекции по математическому анализу. М.: Изд. Московского университета, 2004.