
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

Посвящается 90-летию моего коллеги и друга Евгения Михайловича Шахова

УСКОРЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА С ПОМОЩЬЮ КОНТРОЛЯ ВЕЛИЧИНЫ ВКЛАДОВ В ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ

© 2023 г. Ф. Г. Черемисин^{1,*}

¹ 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: felix.tcher@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.07.2023 г.

Переработанный вариант 12.08.2023 г.

Принята к публикации 22.08.2023 г.

Предлагается способ уменьшения объема требуемых для вычисления интеграла столкновений Больцмана консервативным проекционным методом арифметических операций с помощью исключения вкладов, меньших некоторого заданного порогового уровня. Дается оценка максимальной величины такого уровня. Для четырех уровней, отличающихся на порядок, проведены расчеты течений разреженного газа при числах Маха от 0.5 до 10 и сравнение с решениями базовым методом. Во всех случаях имеются незначительные, в пределах нескольких процентов, отличие результатов для самого высокого порогового уровня и практически полное совпадение для остальных. Получено многократное ускорение решения уравнения Больцмана, наиболее значительное для больших чисел Маха. Библ. 35. Фиг. 20. Табл. 1.

Ключевые слова: решение уравнения Больцмана, консервативный проекционный метод, метод дискретных скоростей.

DOI: 10.31857/S0044466923120098, **EDN:** BQTKOD

ВВЕДЕНИЕ

При решении уравнения Больцмана основная нагрузка приходится на расчет многомерного интеграла столкновений. На раннем периоде развития вычислительной техники единственным способом преодоления огромного объема требуемых для этого вычислений было применение упрощенных моделей интеграла столкновений (см. [1–3]). Методы вычисления интеграла столкновений на основе техники Монте-Карло и решения точного уравнения Больцмана для простейших задач были представлены в [4–6]. Методы не были консервативными и не позволяли решать задачи, требующие большого числа итераций или шагов по времени. Впервые консервативный проекционный метод вычисления интеграла столкновений на равномерной декартовой сетке в пространстве скоростей был представлен в работах [7, 8], усовершенствован и подробно описан в [9–11]. Этот метод использует двухточечное проецирование вкладов в узлы скоростной сетки и весьма экономичен по числу арифметических операций. Консервативные схемы на многоточечном шаблоне были предложены в [12–14]. Они намного более затратные при реализации, но позволяют использовать неравномерные скоростные сетки, адаптированные к решению (см. [15, 16]). Многоточечные консервативные схемы для моделирования течений смеси газов с большим отношением молекулярных масс компонентов смеси представлены в [17, 18]. В [19] предложено использовать в рамках многоточечного метода дискретных скоростей технику прямого статистического моделирования DSMC. Развиваются спектральные методы аппроксимации ядра интеграла столкновений (см. [20, 21]). Подробный обзор современных методов моделирования течений газа в микро- и наномасштабах дан в [22].

Эффективность двухточечного проекционного метода проявляется при параллельных вычислениях интегралов в большом числе узлов физического пространства, при котором наиболее трудоемкие вычисления выносятся за основной цикл. Такая организация вычислений применялась при моделировании большого числа течений разреженного газа (см. [23–29]). В этих расче-

тах без существенных изменений использовалась формулировка консервативного проекционного метода, описанная в [9–11]. В [30–32] был найден способ ускорения вычислений за счет уменьшения избыточной мощности кубатурной сетки.

В настоящей работе предлагается простая модификация алгоритма базового метода, учитывающая неоднородную структуру решения в фазовом пространстве и наличие в нем областей, вклады от которых в интеграл столкновений пренебрежимо малы.

При решении кинетического уравнения бесконечное пространство скоростей заменяется сферой, на границах которой функция распределения настолько мала, что не влияет на решение. Диаметр и расположение сферы определяются граничными и начальными условиями задачи. Типичным является задание в качестве начального условия и условия на внешней границе области решения максвелловской функции $f_{M,0}$ со скоростью потока $\mathbf{u}_0$, а на поверхности тела задание зеркально-диффузного условия, которое состоит из максвелловской функции $f_{M,w}$ с нулевой скоростью и температурой поверхности, и зеркально отраженной функции. Эти функции быстро убывают с расстоянием от их максимумов в $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u} = 0$. В скоростном пространстве возникают области, где функция распределения близка к нулю, и вклады от которых в интеграл столкновений можно пренебречь. При решении задачи методом установления, в начальный момент времени функция $f_{M,0}$ задана во всем физическом пространстве, а функция $f_{M,w}$ — только на границе тела. В процессе решения происходит распространение влияния граничного условия во внутренние узлы физического пространства, в то время как на внешней границе области поддерживается постоянное значение функции $f_{M,0}$. Конфигурация решения в скоростном пространстве меняется в зависимости от геометрической координаты и от времени. Вместе с этим меняются области, вклады от которых в интеграл столкновений пренебрежимо малы. Выделение этих областей представляет трудно решаемую задачу, однако можно предварительно оценивать величину вкладов в интеграл столкновений и исключать расчет пренебрежимо малых значений. Эта идея реализуется в предлагаемом методе.

1. ИЗМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА КОНСЕРВАТИВНОГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

Вначале кратко опишем базовый метод. В ограниченной области Ω с объемом V пространства скоростей строится равномерная сетка из N_0 узлов $\xi_\gamma \in \Sigma_0$, которые являются центрами кубов с ребром h . На этой сетке с шагом по времени $\tau \ll \tau_0$, где τ_0 — время свободного пробега молекул, решается уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \xi_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial \mathbf{x}} = I(\xi_\gamma). \quad (1.1)$$

Используется симметричный метод расщепления второго порядка точности по времени

$$f_\gamma(\mathbf{x}, t + \tau) = \Lambda_{\tau/2}(\Theta_\tau(\Lambda_{\tau/2}f_\gamma(\mathbf{x}, t))), \quad (1.2)$$

где Λ_τ — оператор решения уравнения адвекции, Θ_τ — оператор решения уравнения релаксации.

Интеграл столкновений записывается в виде 8-кратного интеграла, содержащего дельта-функции Дирака

$$I(\xi_\gamma) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} d\xi \int_{\Omega} d\xi_* \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{b_m^2/2} \Phi_1(f' f'_* - f f_*) g d\sigma. \quad (1.3)$$

Здесь $f \equiv f(\xi, \mathbf{x}, t)$, $f' \equiv f(\xi', \mathbf{x}, t)$, $f_* \equiv f(\xi_*, \mathbf{x}, t)$, $f'_* \equiv f(\xi'_*, \mathbf{x}, t)$, ξ' и ξ'_* — скорости после столкновений молекул со скоростями ξ и ξ_* , $g = |\xi - \xi_*|$, b_m — максимальное значение прицельного параметра b , $\sigma = b^2/2$, $\delta(\xi - \xi_c)$ — трехмерная дельта-функция

$$\Phi_1 = \delta(\xi' - \xi_\gamma) + \delta(\xi'_* - \xi_\gamma) - \delta(\xi - \xi_\gamma) - \delta(\xi_* - \xi_\gamma). \quad (1.4)$$

Вычисление (1.3) осуществляется на кубатурной сетке Коробова (см. [33]) Σ_γ из N_γ узлов. Каждый узел сетки включает значения непрерывных переменных $\sigma_\gamma, \varphi_\gamma$ и сеточные узлы $\xi_{\alpha_\gamma} \in \Sigma_0$, $\xi_{\beta_\gamma} \in \Sigma_0$. Скорости после столкновения $\xi'_{\alpha_\gamma} \notin \Sigma_0$, $\xi'_{\beta_\gamma} \notin \Sigma_0$ заменяются двумя парами бли-

жайших симметрично расположенных сеточных узлов ξ_{λ_v} , $\xi_{\lambda_v+s_v}$ и ξ_{μ_v} , $\xi_{\mu_v-s_v}$, где s_v — вектор единичного сдвига по сетке Σ_0 .

В [9, 10] представлено два основных варианта консервативного проекционного метода вычислений интеграла столкновений: проекционно-интерполяционный метод (ПИМ) и симметричный проекционный метод (СПМ). В ПИМ произведение $f'_{\alpha_v} f'_{\beta_v}$ находится интерполяцией по значениям в узлах ξ_{λ_v} , $\xi_{\lambda_v+s_v}$ и ξ_{μ_v} , $\xi_{\mu_v-s_v}$. Следующая интерполяция является точной для максвелловской сеточной функции $f_{M,\gamma}$:

$$f'_{\alpha_v} f'_{\beta_v} = (f_{\lambda_v} f_{\mu_v})^{1-r_v} (f_{\lambda_v+s_v} f_{\mu_v-s_v})^{r_v}. \quad (1.5)$$

При такой интерполяции дискретная форма интеграла столкновений обладает важным асимптотическим свойством

$$I_\gamma[f_{M,\gamma}] = 0. \quad (1.6)$$

Для функции вида $f_\gamma = f_{M,\gamma} + \varepsilon f_\gamma^{(1)}$ погрешность формулы (1.5) имеет оценку $\varepsilon O(h)$, что важно для расчета течений вблизи режима сплошной среды. Эта оценка погрешности и выполнение условия (1.6) делают ПИМ предпочтительным основным методом. Для оптимизации и ускорения основного метода используется СПМ.

Оператор $\Theta_\tau(f)$ построен как решение интегрального уравнения по схеме непрерывного счета. Интервал τ делится на N_v равных частей и осуществляется решение уравнения релаксации по явной схеме

$$f_\gamma(t_{v+1}) = f_\gamma(t_v) + \tau \Delta I_v. \quad (1.7)$$

Здесь ΔI_v — вклад в интеграл столкновений (1.3) от v -го узла кубатурной формулы. В подробной записи уравнение (1.7) имеет вид

$$f_\gamma(t_{v+1}) = f_\gamma(t_v) + \tau B \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_v, & \gamma = \alpha_v, \beta_v \\ (1-r_v)\Delta_v, & \gamma = \lambda_v, \mu_v \\ r_v\Delta_v, & \gamma = \lambda_v + s_v, \mu_v - s_v \end{array} \right\}, \quad (1.8)$$

где B — коэффициент перед суммой, аппроксимирующей интеграл (1.3),

$$\begin{aligned} \Delta_v &= \left\{ f_{\alpha_v}(t_v) f_{\beta_v}(t_v) - [f_{\lambda_v}(t_v) f_{\mu_v}(t_v)]^{1-r_v} [f_{\lambda_v+s_v}(t_v) f_{\mu_v-s_v}(t_v)]^{r_v} \right\} g_v, \\ g_v &= |\xi_{\alpha_v} - \xi_{\beta_v}|, \quad t_v = t + \frac{(v-1)\tau}{N_v}, \quad v = 1, N_v. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Входящее в (1.9) произведение функций распределения и относительной скорости можно представить в виде сеточной функции

$$D_{\eta_v, \rho_v}(t_v) = f_{\eta_v}(t_v) f_{\rho_v}(t_v) g_v. \quad (1.10)$$

Выражение для Δ_v примет вид (аргумент t_v опускаем)

$$\Delta_v = D_{\alpha_v, \beta_v} - D_{\lambda_v, \mu_v}^{1-r_v} D_{\lambda_v+s_v, \mu_v-s_v}^{r_v}. \quad (1.11)$$

Экономным способом вычисления интерполяции в (1.11) является преобразование

$$D_{\lambda_v, \mu_v}^{1-r_v} D_{\lambda_v+s_v, \mu_v-s_v}^{r_v} = D_{\lambda_v, \mu_v} (D_{\lambda_v+s_v, \mu_v-s_v} / D_{\lambda_v, \mu_v})^{r_v}.$$

Схема (1.8) используется для контроля не отрицательности получаемого решения: вклад в интеграл на шаге v отвергается, если решение $f_\gamma(t_{v+1})$ в одном из шести узлов скоростной сетки отрицательное. Отрицательные значения могут появляться из-за конечной величины шага τ . Недостатком ПИМ является отсутствие условия на мощность N_v кубатурной сетки, при которой отрицательные решения отсутствуют. Достижение приемлемо малого относительного числа исключенных вкладов требует увеличенной мощности кубатурной сетки.

В [30] было предложено пересчитывать отрицательные решения, возникающие в схеме (1.8) по формулам СПМ

$$f_\gamma(t_{v+1}) = f_\gamma(t_v) + \tau B \left\{ \begin{array}{ll} -D_{\alpha_v, \beta_v} + (1 - r_v^*)D_{\lambda_v, \mu_v} + r_v^*D_{\lambda_v + s_v, \mu_v - s_v}, & \gamma = \alpha_v, \beta_v \\ (1 - r_v)D_{\alpha_v, \beta_v} - (1 - r_v^*)D_{\lambda_v, \mu_v}, & \gamma = \lambda_v, \mu_v \\ r_v D_{\alpha_v, \beta_v} - r_v^* D_{\lambda_v + s_v, \mu_v - s_v}, & \gamma = \lambda_v + s_v, \mu_v - s_v \end{array} \right\}, \quad (1.12)$$

$$r_v^* = r_v D_{\alpha_v, \beta_v} / [r_v D_{\lambda_v, \mu_v} + (1 - r_v)D_{\lambda_v + s_v, \mu_v - s_v}]. \quad (1.13)$$

Условие не отрицательности решения в СПМ следующее:

$$N_v / \tau \geq N_0 V \pi b_m^2 g_{\max} f_{\max} / 4. \quad (1.14)$$

Здесь $g_{\max}$ — максимальное значение относительной скорости при столкновении, равное диаметру области Ω пространства скоростей, $f_{\max}$ — максимальное по всем пространственным и скоростным узлам значение сеточной функции f_γ .

Алгоритм пересчета позволяет значительно уменьшить мощность кубатурной сетки и ускорить вычисления. Подробное описание оптимизированного метода дано в [32].

Рассмотрим другой способ ускорить вычисления, основанный на предварительной оценке величины вкладов в интеграл столкновений и исключении пренебрежимо малых изменений решения. В основном цикле (1.8) изменение решения на шаге цикла пропорционально величине Δ_v , определенной в (1.9). Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \max(D_{\lambda_v, \mu_v}^{1-r_v} D_{\lambda_v + s_v, \mu_v - s_v}^{r_v}) &\leq \max(D_{\lambda_v, \mu_v}, D_{\lambda_v + s_v, \mu_v - s_v}), \\ |\Delta_v| &\leq \max(D_{\alpha_v, \beta_v}, D_{\lambda_v, \mu_v}, D_{\lambda_v + s_v, \mu_v - s_v}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Условие (1.15) будем использовать для исключения пренебрежимо малых вкладов Δ_v . Введем уровень отсечения Z , ниже которого вклады Δ_v можно не учитывать. Тогда изменение алгоритма вычислений сводится к тому, что вначале вычисляются значения функций D_{α_v, β_v} , D_{λ_v, μ_v} , $D_{\lambda_v + s_v, \mu_v - s_v}$, которые сравниваются с уровнем Z . Если одна из этих величин больше Z , то осуществляется переход к вычислениям по формулам (1.8)–(1.9), иначе решение не меняется и $f_\gamma(t_{v+1}) = f_\gamma(t_v)$. Объем арифметических операций сокращается при сохранении консервативности метода и асимптотического свойства (1.6).

В качестве характерной величины D_{ref} сеточной функции (1.10) возьмем ее значение, вычисленное на основе функции $f_{M,0} = (2\pi)^{-3/2} \exp(-c^2/2)$, где $\mathbf{c} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_0$. При наиболее вероятной величине скорости $c_p = \sqrt{2}$ в обоих входящих в произведение функциях и наиболее вероятной величине скорости столкновения молекул $g_p = 2$ получим

$$D_{\text{ref}} = 2f(c_p)f(c_p) = 2(2\pi)^{-3} \exp(-2) \approx 1.1 \times 10^{-3}.$$

Величина уровня отсечения вкладов должна удовлетворять условию $Z \ll D_{\text{ref}}$. Чтобы оценить порядок величины максимального уровня отсечения, который существенно не влияет на точность решения, вычислим функцию (1.10) при значениях скорости $c = c_p$ для одной функции и $c = 3c_p$ — для другой. Второе значение соответствует величине функции распределения около границы области скоростного пространства. Получим оценку

$$D_{p,3p} = 2.8f(c_p)f(3c_p) = 2.8(2\pi)^{-3} \exp(-10) \approx 0.5 \times 10^{-6}.$$

Максимальный уровень отсечения должен быть близок к полученной оценке. Мы испытаем четыре уровня, отличающихся на порядок величины: $Z_1 = 10^{-6}$, $Z_2 = 10^{-7}$, $Z_3 = 10^{-8}$, $Z_4 = 10^{-9}$.

2. ПРОВЕРКА ВЫБРАННЫХ УРОВНЕЙ

Была проведена серия расчетов продольного и поперечного обтекания плоской пластины при числе Кнудсена $\text{Kn} = 0.1$ и нескольких числах Маха для четырех указанных выше уровней отсе-

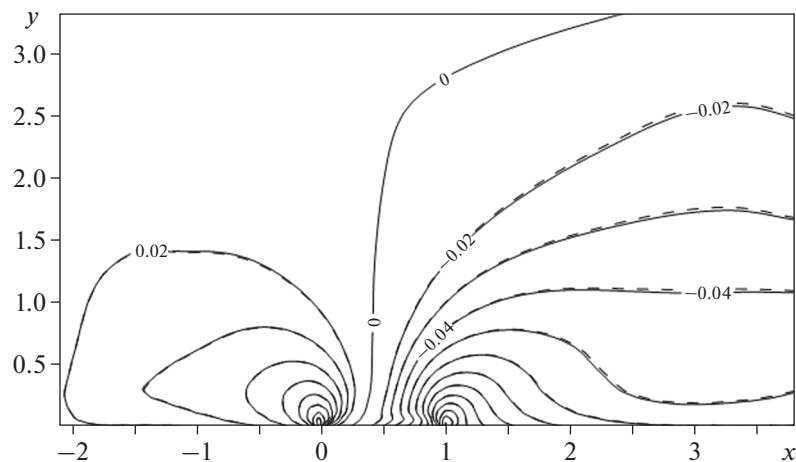
Таблица 1

M	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0.5	5	3.5	2.5	1.7
2	6	4	3	2
5	11 (15.5)	9	6.5	5
10	12 (17.5)	10	7.5	6.5

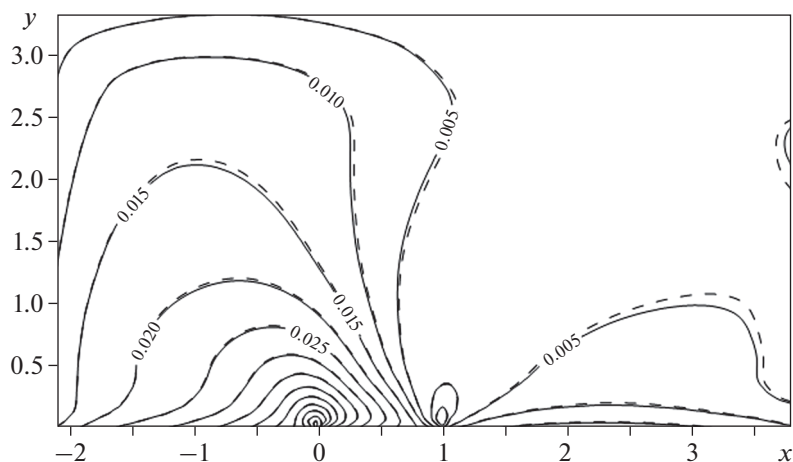
чения вкладов. Сравнение проводилось с решением без отсечения вкладов. Использовалась молекулярная модель твердых сфер. В основной серии расчетов рассматривалось продольное обтекание плоской пластины. Пластина расположена на линии симметрии течения $y = 0$, ее передняя кромка расположена в $x = 0$, поток газа натекает слева. На поверхности задано условие отражения молекул с полной аккомодацией и максвелловским распределением по скорости при температуре набегающего потока. В качестве масштаба длины на графиках выбрана длина пластины. Шаги пространственной сетки около пластины $h_x = 0.2\lambda$, $h_y = 0.2\lambda$, где λ — длина свободного пробега молекул в набегающем потоке. Ускорение на стадии релаксации $t_{\text{rel},0}/t_{\text{rel},z}$, где $t_{\text{rel},0}$ — время счета без отсечения вкладов, а $t_{\text{rel},z}$ — время счета с исключением вкладов, приведено для четырех значений Z в табл. 1, где в первом столбце указано число Маха. О значениях ускорения, приведенных в скобках, будет сказано ниже.

Приведем примеры расчета полей течения и распределения аэродинамических реакций по длине пластины для случая $M = 0.5$. Сплошными линиями всюду показаны значения, полученные без отсечения вкладов, а штриховыми — для уровня Z_1 . На фиг. 1 приведено поле плотности $n - 1$, а на фиг. 2 — поле температуры $T - 1$. Поля течения для указанных расчетов практически совпадают.

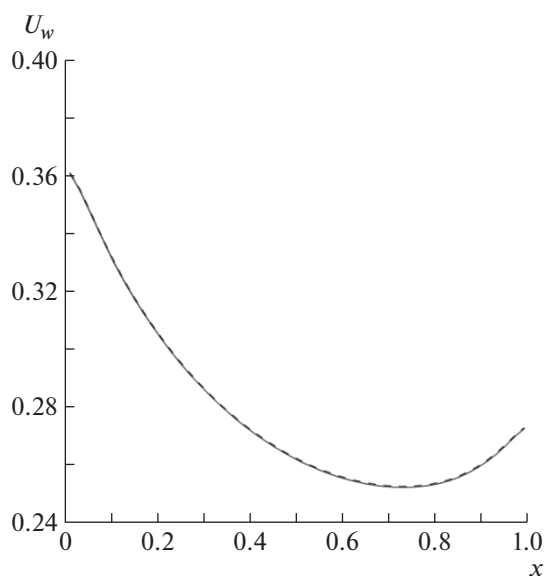
На фиг. 3–5 представлены скорость скольжения U_w , сила трения F и поток энергии на пластину E . Максимальное отклонение результатов с использованием уровня отсечения Z_1 находится в пределах 2%. Расчеты с применением уровня Z_2 дали полное совпадение полей течения и графиков аэродинамических реакций с решением без исключения вкладов. На фиг. 6 для уровней отсечения Z_1 (штриховая линия) и Z_2 (сплошная линия) приведена сумма по узлам пространственной сетки $R(t) = \sum_i (N_{a,i}/N_v)$ отношения числа оставшихся ненулевых вкладов $N_{a,i}$ к полному числу вкладов N_v .



Фиг. 1



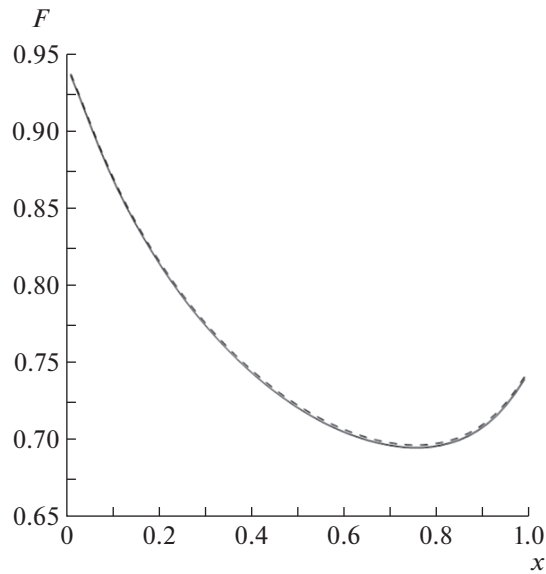
Фиг. 2



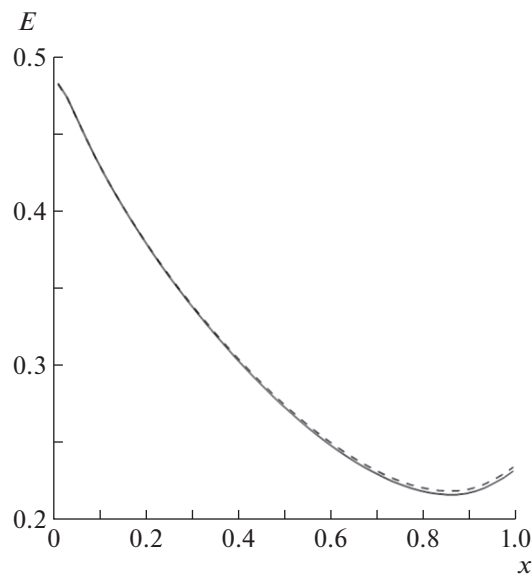
Фиг. 3

Площадь графика $S = \int_0^{t_{\max}} R(t)dt$ дает отношение числа учитываемых в расчетах ненулевых вкладов к полному числу вкладов за все время решения задачи $t_{\max}$. Видно, что число ненулевых вкладов намного меньше полного числа вкладов. Обратная величина $1/S$ показывает, во сколько раз уменьшился объем вычислений по формулам (1.8) и (1.9). Как видно из табл. 1, измеренное ускорение расчета стадии релаксации значительно меньше $1/S$, что объясняется затратами на отбор вкладов.

Приведем сравнение расчетов для сверхзвукового течения при $M = 5$. Сплошные линии на всех графиках показывают данные без отсечения вкладов, пунктирные — для уровня Z_1 . На фиг. 7 приведено поле плотности $n - 1$, а на фиг. 8 — поле температуры $T - 1$. На фиг. 9–11 приведены распределения по длине пластины скорости скольжения, трения и потока энергии на пластину. Как и для дозвукового течения с $M = 0.5$, поля течения при уровне отсечения Z_1 и с учетом всех вкладов практически совпадают. Реакции на пластину отличаются в пределах 1%.



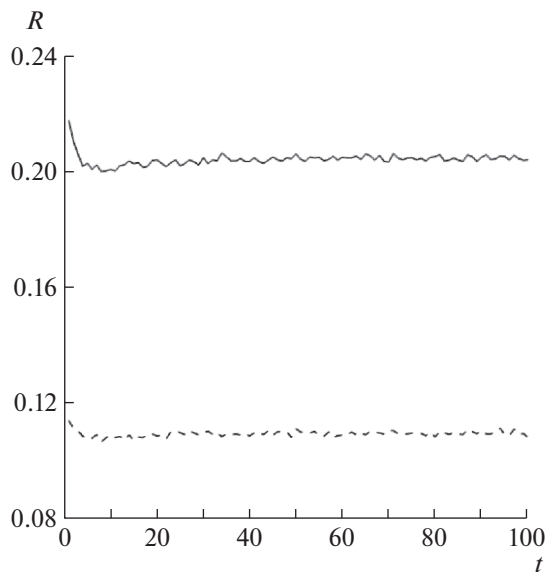
Фиг. 4



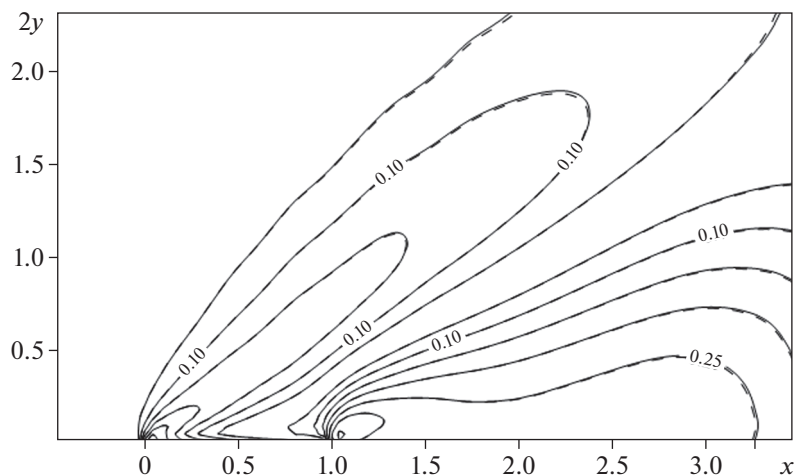
Фиг. 5

На фиг. 12 даны графики уменьшения числа обрабатываемых вкладов $R(t)$ для уровней Z_1 (штриховая кривая) и Z_2 (сплошная кривая). В отличие от дозвукового случая, число ненулевых вкладов растет со временем, оставаясь во много раз меньше полного числа вкладов. Для уровня Z_1 величина “идеального ускорения” $1/S \approx 30$, что почти в 3 раза больше реального ускорения из табл. 1. Простой оптимизацией отбора ненулевых вкладов является оценка в (1.15) только двух функций D_{α_v, β_v} и D_{λ_v, μ_v} , предполагая, что $D_{\lambda_v, \mu_v} \approx D_{\lambda_v + s_v, \mu_v - s_v}$. Время отбора сокращается в 1.5 раза. Достигнутые при этом ускорения счета для $M = 5$ и $M = 10$ приведены в табл. 1 в скобках.

На фиг. 13 показана функция распределения $f(\xi, \eta, \zeta, x, y)$ для $\zeta = h/2$, $x = 0.9$, $y = 0.1$. Горб на графике функции справа соответствует набегающему потоку, левый горб — отраженной от по-



Фиг. 6

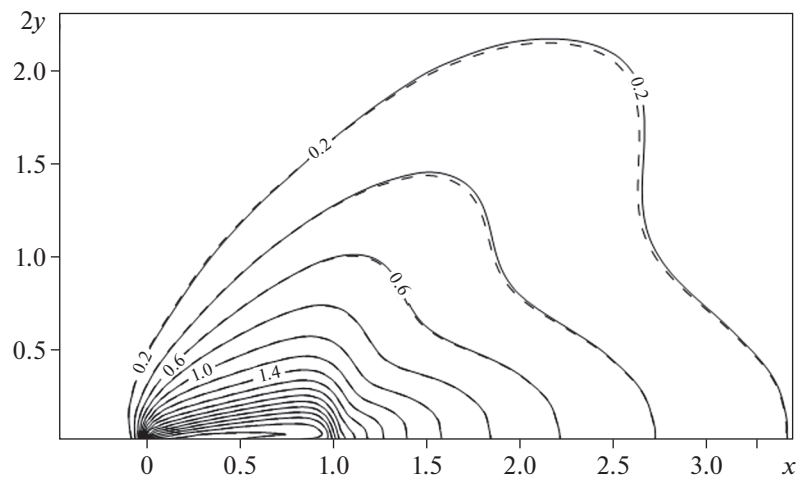


Фиг. 7

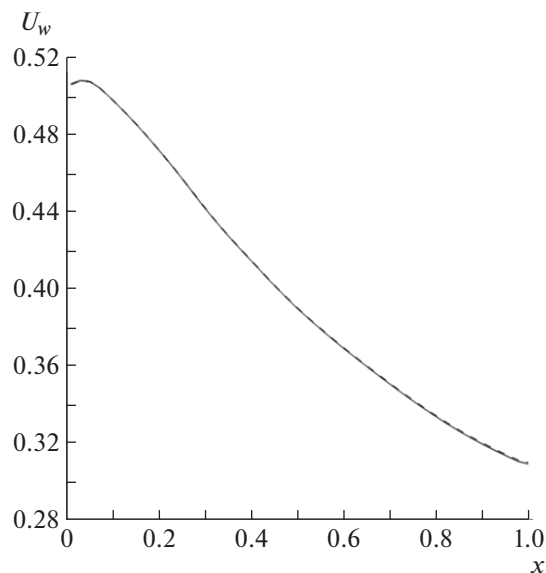
верхности функции. Видно, что в большей части скоростного пространства функция распределения близка к нулю, что объясняет преобладание нулевых вкладов на фиг. 12.

Анализ расчетов для случаев $M = 2$ и $M = 10$ приводит к тем же выводам: минимальное, в пределах 2% отличие результатов для уровня Z_1 и практически полное совпадение для уровня Z_2 . На фиг. 14 для $M = 10$ дано сравнение полей температуры, посчитанных при уровне Z_2 (штриховые линии) и без исключения вкладов (сплошные линии).

Рассмотрим обтекание поперечно расположенной к набегающему потоку, бесконечной по оси z плоской пластины при $M = 3$ и $Kn = 0.1$. Пластина расположена при $x = 0$, поток натекает слева. Ось $y = 0$ является линией симметрии течения. На поверхности пластины задано отражение молекул с максвелловским распределением по скорости при температуре набегающего потока. Шаги пространственной сетки около пластины $h_x = 0.15\lambda$, $h_y = 0.2\lambda$. Особенности течения являются значительное повышение плотности перед пластиной и разрежение газа с тыльной стороны. За пластиной возникает вихревое течение со скоростью скольжения на пластине, на-

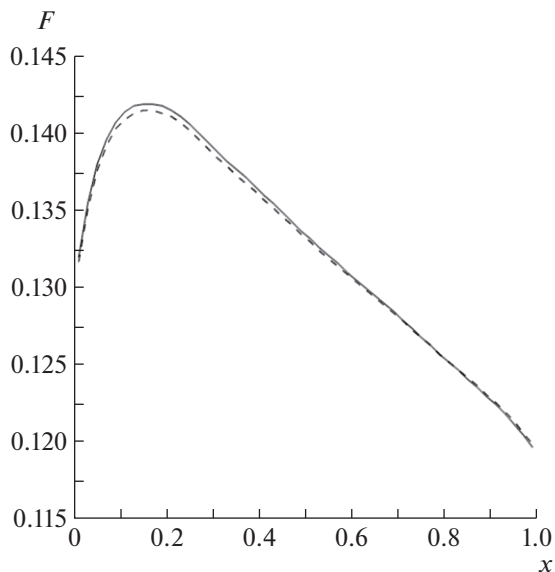


Фиг. 8

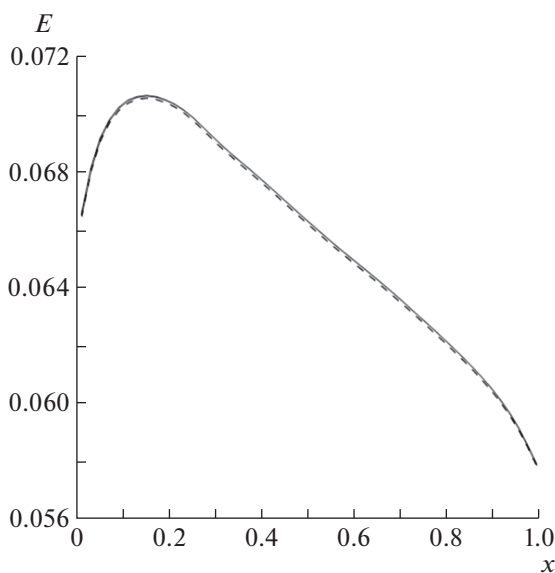


Фиг. 9

правленной вверх. На фиг. 15 показано поле плотности, а на фиг. 16 — поле температуры. Плотность увеличивается почти в 4 раза в ударной волне перед пластиной и резко падает около оси симметрии течения за пластиной. Температура возрастает в ударной волне и резко падает непосредственно за пластиной. Затем она возрастает по направлению x и меняется немонотонно по оси y . Детальное сравнение полей течения, полученных с применением исключения вкладов на уровне Z_1 и без исключения, которое мы не приводим, показывает практически полное их совпадение. На фиг. 17 показана скорость скольжения на фронтальной стороне пластины. Масштабом длины здесь выбрана длина свободного пробега молекул в набегающем газе. Результаты для уровня отсечения Z_1 и без исключения вкладов практически совпадают. Скорость скольжения на тыльной стороне пластины представлена на фиг. 18. Сплошной линией изображены результаты без исключения вкладов, которые совпадают с данными для уровня отсечения Z_3 , штриховой линией приведены данные для уровня Z_1 и длинными штрихами показаны результаты для уровня Z_2 . В отличие от фронтальной стороны пластины, применение уровня отсечения Z_1 дает



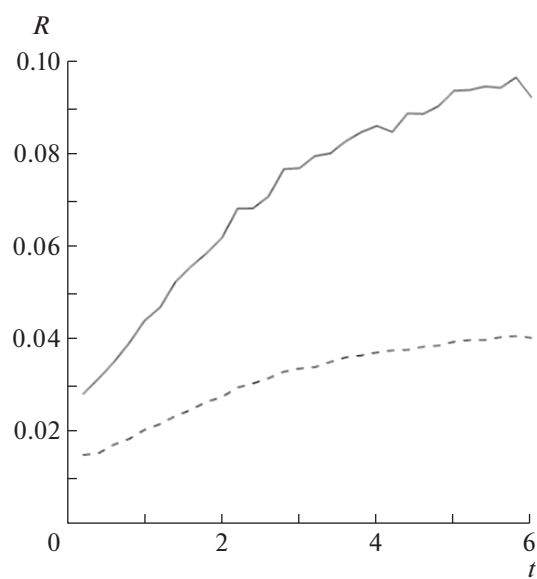
Фиг. 10



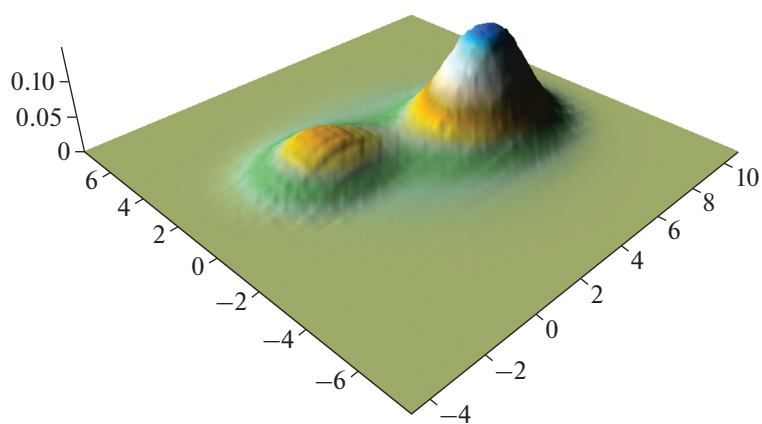
Фиг. 11

существенное различие результатов. Немонотонное поведение скорости скольжения может быть результатом отрыва пограничного слоя вблизи верхней кромки и образования сложного вихревого течения. Для сплошной среды явление “скручивания” оторвавшегося пограничного слоя в вихревую структуру показано на данных экспериментов в [34]. Для уровней Z_1 , Z_2 и Z_3 были получены ускорения счета стадии релаксации соответственно в 5.5, 4 и 3 раза.

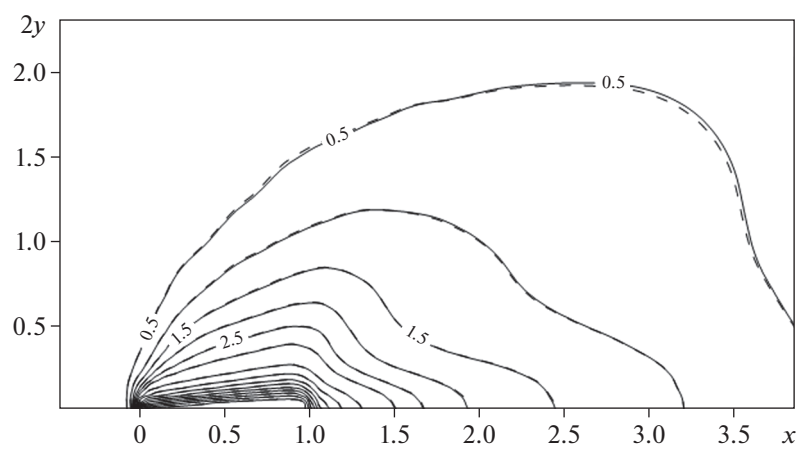
На примере обтекания поперечной пластины была испытана возможность применения разных уровней отсечения вкладов в разных областях физического пространства. Была выделена прямоугольная область вокруг пластины $-0.05 < x < 2$, $0 < y < 1.15$, площадь которой составляет около 15% от области решения задачи. В этой области применялся уровень Z_3 , а в остальной об-



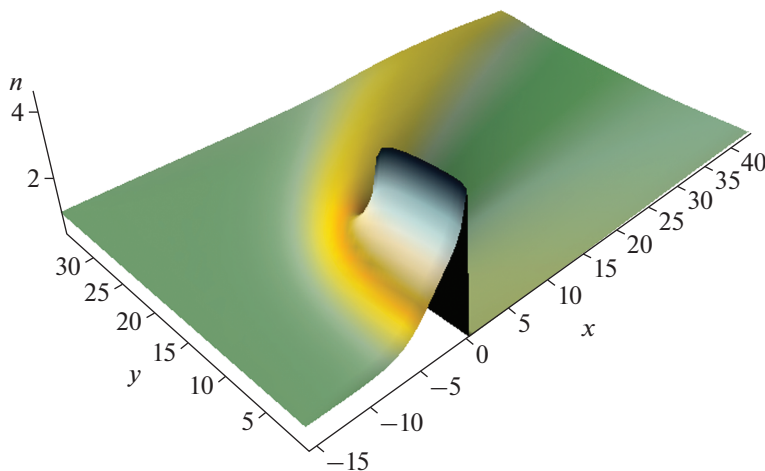
Фиг. 12



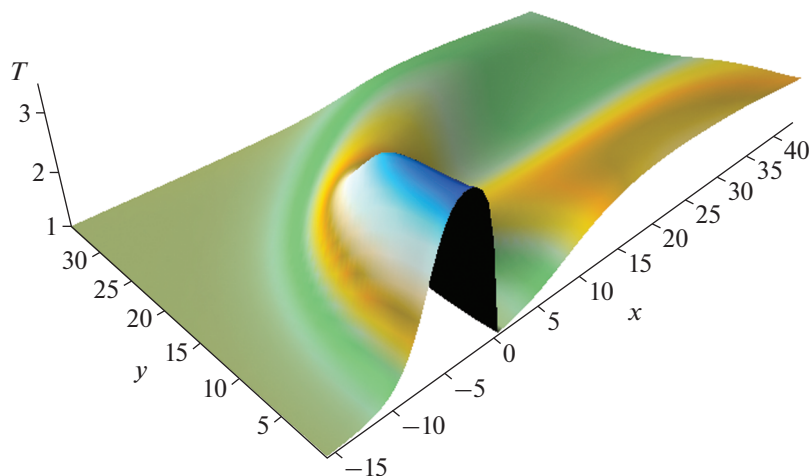
Фиг. 13



Фиг. 14



Фиг. 15

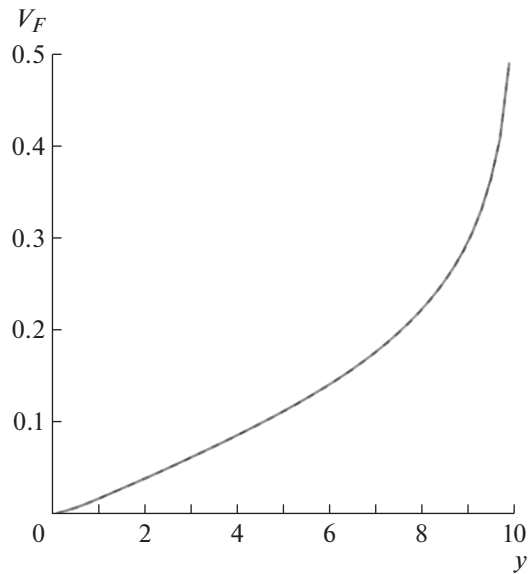


Фиг. 16

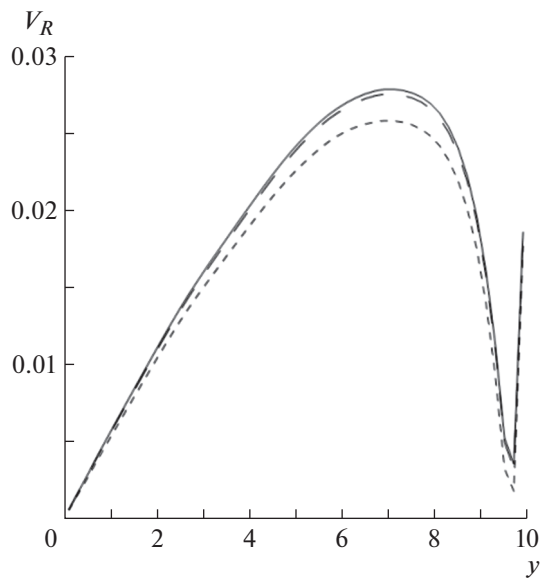
ласти использовался уровень Z_1 . Получено ускорение счета стадии релаксации в 5 раз при полном совпадении с результатами расчетов при уровне Z_3 во всей области.

На фиг. 19а—в изображена функция распределения $f(\xi, \eta, \zeta, x, y)$ при $\zeta = h/2$, $x = -0.1$, $y = h_y/2$ в моменты времени $t = 0.3$, $t = 3$ и $t = 20$. Единицей времени является $\tau = \lambda/\sqrt{kT/m}$. На фиг. 19а видны максвелловская функция распределения набегающего потока и небольшое проникновение (справа на изображении) быстрых молекул, отраженных от пластины. На фиг. 19б изображена промежуточная стадия взаимодействия падающего и отраженного потоков молекул. На фиг. 19в показана сформировавшаяся функция распределения при $t = 20$, которая не меняется на всем времени счета до $t = 60$. На фиг. 20 показана установившаяся функция распределения с тыльной стороны пластины при $\zeta = h/2$, $x = 0.1$, $y = h_y/2$. Она существенно отличается от равновесного распределения. Все изображенные функции занимают малую часть пространства скоростей.

Приведем отношение времен расчета стадии релаксации $t_{\text{rel},z}$ и стадии адвекции t_{adv} за период решения задачи. Для продольно расположенной пластины сравнение проведено для уровня Z_2 .



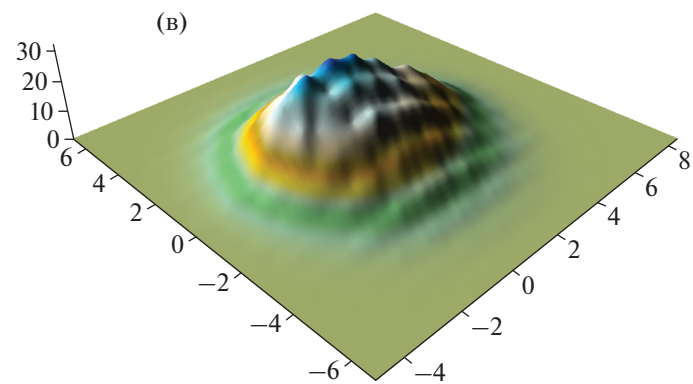
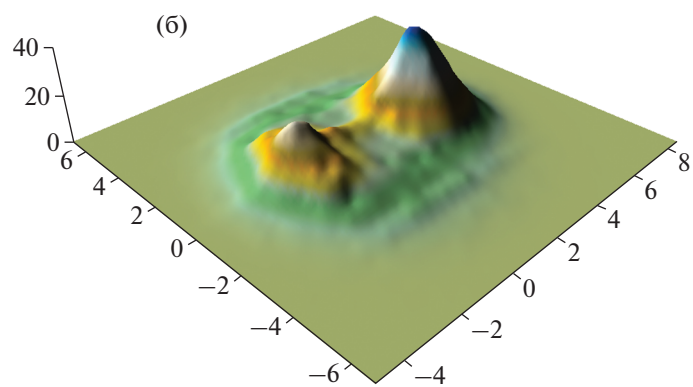
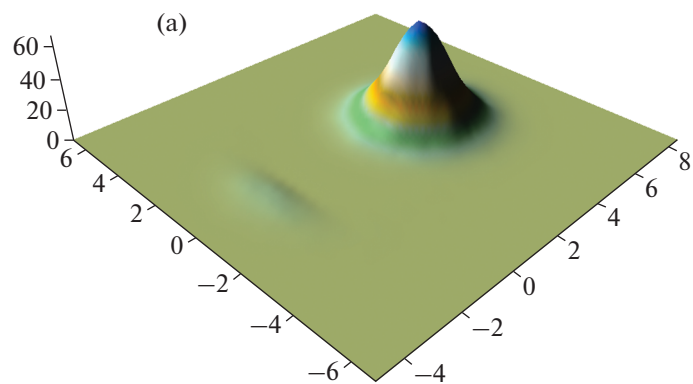
Фиг. 17



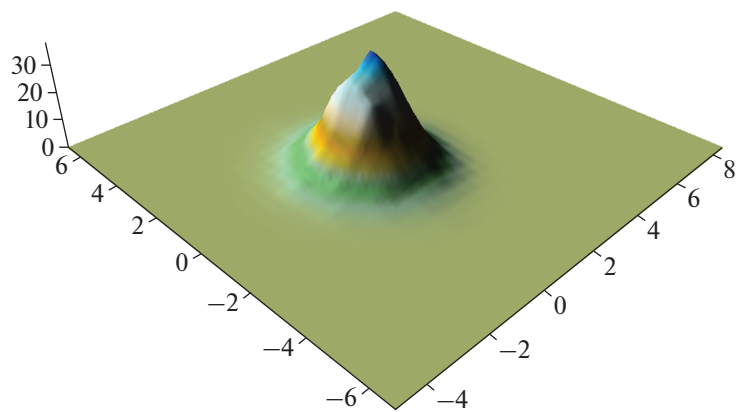
Фиг. 18

Расчет для $M = 0.5$ осуществлялся на $N_0 = 3604$ узлах скоростной сетки и $N_v = 75000$ узлах кубатурной сетки, получено отношение $t_{\text{rel},z}/t_{\text{adv}} \approx 3$. Результаты расчета для $N_v = 25000$ отличаются от предыдущих менее, чем на 1% и дают $t_{\text{rel},z}/t_{\text{adv}} \approx 1$. Для чисел Маха $M = 5$ и $M = 10$ использовалось $N_0 = 8628$ и $N_v = 125000$, получено $t_{\text{rel},z}/t_{\text{adv}} \approx 1.5$. Расчет обтекания нормальной к потоку пластины проводился при $N_0 = 7164$ и $N_v = 250000$. Для уровня отсечения Z_1 получено $t_{\text{rel},z}/t_{\text{adv}} \approx 6$. Для расчета адвекции в схеме симметричного расщепления использовалась схема SHASTA (см. [35]).

Таким образом, применение контроля вкладов в интеграл столкновений сокращает время расчета стадии релаксации до величины, сравнимой со временем расчета адвекции.



Фиг. 19



Фиг. 20

ВЫВОДЫ

Предложен способ значительного сокращения объема вычислений и многократного ускорения расчета интеграла столкновений Больцмана консервативным проекционным методом без потери точности. Сокращение объема вычислений достигается за счет исключения пренебрежимо малых вкладов в интегральную сумму, не влияющих на результат расчета. Дана оценка величины максимального уровня отсечения вкладов. Модифицированный алгоритм вычислений сохраняет основные свойства базового метода, обеспечивающие его стабильность: консервативность, положительную определенность решения, равенство нулю интеграла столкновений от максвелловской функции. В разных частях физической области решения могут быть применены разные уровни отсечения вкладов. Наибольшее ускорение решения уравнения Больцмана достигается при больших числах Маха, что частично компенсирует повышенную трудность его решения для сверхзвуковых течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.* A model for collision process in gases // *Phys. Rev.* 1954. V. 94. P. 511–525.
2. *Holway L.H.* New statistical models for kinetic theory: Methods of construction // *Phys. Fluid.* 1966. V. 9. P. 1658–1673.
3. *Шахов Е.М.* Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1968. № 5. С. 142–145.
4. *Nordsiesk A., Hicks B.L.* Monte Carlo evaluation of the Boltzmann collision integral // *Proc. 5th Intern. Symp. on RGD.* 1966. V. 1. P. 695–710.
5. *Hicks B.L., Yen S.M.* Solution of the non-linear Boltzmann equation for plane shock waves // *Rarefied Gas Dynamics.* V. 1. New York: Acad. Press, 1969.
6. *Черемисин Ф.Г.* Численное решение кинетического уравнения Больцмана для одномерных стационарных движений газа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1970. Т. 10. № 3. С. 654–665.
7. *Черемисин Ф.Г.* Консервативный метод вычисления интеграла столкновений Больцмана // *Докл. АН.* 1997. Т. 357. № 1. С. 53–56.
8. *Tcheremissine F.G.* Conservative evaluation of Boltzmann collision integral in discrete ordinates approximation // *Comp. Math. Appl.* 1998. V. 35. № 1/2. P. 215–221.
9. *Tcheremissine F.* Direct numerical solution of the Boltzmann equation // *24th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics AIP Conf. Proceed.* 2005. P. 667–685.
10. *Tcheremissine F.G.* Solution of the Boltzmann kinetic equation for high-speed flows // *Comp. Math. and Math. Phys.* 2006. V. 46. № 2. P. 315–329.
11. *Tcheremissine F.G.* Solution of the Boltzmann kinetic equation for low speed flows // *Transport Theory Stat. Phys.* 2008. № 37. P. 564–575.
12. *Varghese P.* Arbitrary post-collision velocities in a discrete velocity scheme for the Boltzmann equation // *25th Inter. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. AIP.* 2007. P. 225–232.
13. *Morris A., Varghese P., Goldstein D.* Improvement of a discrete velocity Boltzmann equation solver with arbitrary post-collision velocities // *AIP Conf. Proceed.* 2008. V. 1084. P. 458–463.
14. *Clarke P., Varghese P., Goldstein D., Morris A., Bauman P., Hegermiller D.* A novel discrete velocity method for solving the Boltzmann equation including internal energy and non-uniform grids in velocity space // *AIP Conf. Proceed.* 2012. V. 1501. P. 373–380.
15. *Arslanbekov R.R., Kolobov V.I., Frolova A.A.* Kinetic solvers with adaptive mesh in phase space // *Phys. Rev.* 2013. E 88, 063301.
16. *Kolobov V., Arslanbekov R., Frolova A.* Solving kinetic equations with adaptive mesh in phase space for rarefied gas dynamics and plasma physics // *Proceed. 29th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. AIP Conf. Proc.* 2014. V. 1628. P. 952–961.
17. *Dodulad O.I., Tcheremissine F.G.* Multipoint conservative projection method for computing the Boltzmann collision integral for gas mixtures // *Rarefied Gas Dynamics. Proc. 28th Intern. Symp. AIP Conf. Proc.* 2012. V. 1501. P. 301–309.
18. *Anikin Yu.A., Dodulad O.I., Kloss Yu.Yu., Tcheremissine F.G.* Method of calculating the collision integral and solution of the Boltzmann kinetic equation for simple gases, gas mixtures and gases with rotational degrees of freedom // *Inter. J. Comput. Math.* 2014. 909033.
19. *Oblapenko G., Goldstein D., Varghese P., Moore C.* A velocity space hybridization-based Boltzmann equation solver // *J. Comput. Phys.* 2020. V. 408. 109302.
20. *Jaiswal Shashank, Alexeenko Alina A., Hu Jingwei,* A discontinuous Galerkin fast spectral method for the full Boltzmann equation with general collision kernels // *J. Comput. Phys.* 2019. V. 378. P. 178–208.

21. *Hu Jingwei, Shen Jie, Wang Yingwei*, A Petrov–Galerkin spectral method for the inelastic Boltzmann equation using mapped Chebyshev functions // *Kinetic and Related Model.* 2020. V. 13. № 4. P. 677–702.
22. *Akhlaghi Hassan, Roohi Ehsan, Stefanov Stefan*, A comprehensive review on micro- and nano-scale gas flow effects: Slip-jump phenomena, Knudsen paradox, thermally-driven flows, and Knudsen pumps // *Phys. Rep.* 2023. V. 997. P. 1–60.
23. *Popov S.P., Tcheremissine F.G.* A Method of joint solution of the Boltzmann and Navier-Stokes equations // *Rarefied Gas Dynamics. 24th Inter. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. AIP Conf. Proceed.* 2005. P. 82–87.
24. *Kloss Yu.Yu., Tcheremissine F.G., Shuvalov P.V.* Solution of the Boltzmann equation for unsteady flows with shock waves in narrow channels // *Comp. Math. and Math. Phys.* 2010. V. 50. № 6. P. 1093–1103.
25. *Anikin A., Dodulad O.I., Kloss Y.Y., Martynov D.V., Shuvalov P.V., and Tcheremissine F.G.* Development of applied software for analysis of gas flows in vacuum devices // *Vacuum.* 2012. V. 86. № 11. P. 1770–1777.
26. *Dodulad O.I., Tcheremissine F.G.* Computation of a shock wave structure in monatomic gas with accuracy control // *Comp. Math. and Math. Phys.* 2013. V. 53. № 6. P. 827–844.
27. *Bazhenov I.I., Dodulad O.I., Ivanova I.D., Kloss Y.Y., Rjabchenkov V.V., Shuvalov P.V., Tcheremissine F.G.* Problem solving environment for gas flow simulation in micro structures on the basis of the Boltzmann equation // *Proc. 13th Inter. Conf. Math. Methods in Science and Engineering CMMSE.* 2013. P. 246–257.
28. *Dodulad O.I., Kloss Yu.Yu., Savichkin D.O., Tcheremissine F.G.* Knudsen pumps modeling with Lennard-Jones and ab initio intermolecular potentials // *Vacuum.* 2014. V. 109. P. 360–367.
29. *Додулад О.И., Клосс Ю.Ю., Потанов А.П., Черемисин Ф.Г., Шувалов П.В.* Моделирование течений разреженного газа на основе решения кинетического уравнения Больцмана консервативным проекционным методом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 6. С. 89–105.
30. *Tcheremissine F.G.* Testing and acceleration of the conservative projection method for solving Boltzmann kinetic equation // *AIP Conf. Proceed.* 2015. V. 1648. 23005.
31. *Tcheremissine F.G.* Solution of Boltzmann equation for extremely slow flows // *AIP Conf. Proceed.* 2020. V. 2293. 050008.
32. *Черемисин Ф.Г.* Решение уравнения Больцмана в режиме сплошной среды // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 2. С. 336–348.
33. *Коробов Н.М.* Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989. с. 240.
34. *Milton van Dyke*, An album of fluid motion // *The Parabolik Press, Stanford, California*, 1982.
35. *Boris J.P., Book D.L.* Flux-corrected transport. 1. SHASTA, a fluid transport algorithm that works // *J. Comput. Phys.* 1973. V. 11. № 1. P. 38–69.