
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.635

Посвящается профессору Евгению Михайловичу Шахову в связи с его 90-летием

НЕКЛАССИЧЕСКИЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА В МИКРОКАНАЛЕ И ОДНА ЗАДАЧА ДЛЯ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

© 2023 г. О. В. Ильин^{1,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: oilyin@gmail.com

Поступила в редакцию 28.03.2023 г.
Переработанный вариант 30.04.2023 г.
Принята к публикации 22.08.2023 г.

В работе рассмотрена одномерная задача о переносе тепла в ограниченной области (микроканале), заполненной разреженным газом. На левой границе в область направлены два молекулярных пучка, причем скорость частиц в каждом пучке одинакова. Правая граница считается твердой стенкой и для нее ставятся условия диффузного отражения. Используя кинетическую модель Шахова, показано, что изменяя отношения скоростей молекулярных пучков, можно задать в микроканале поток тепла разной величины и знака, при этом температуры левой правой границ в канале одинаковы, либо градиент температуры в приграничной зоне имеет тот же знак, что и поток тепла. С данной задачей связана проблема построения решеточных уравнений Больцмана с четырьмя скоростями, правильно воспроизводящими первые максвелловские полумоменты, что необходимо для моделирования микротечений. Показано, что в этом случае для решеточных моделей Больцмана оптимальным отношением дискретных скоростей является 1 : 4. Библ. 37. Фиг. 4.

Ключевые слова: решеточные уравнения Больцмана, неравновесные течения.

DOI: 10.31857/S0044466923120153, **EDN:** ZKVTJA

1. ВВЕДЕНИЕ

В неравновесных системах потоки тепла, нарушающие закон Фурье, наблюдаются достаточно часто. Действительно, уравнение сохранения энергии в газовой системе утверждает, что изменение внутренней энергии пропорционально градиенту теплоток и работе вязких сил [1]. Таким образом, вязкое трение может существенно влиять на градиенты температуры и теплоток. В качестве примера можно привести явление разогрева поверхности тела, погруженного в движущуюся жидкость [2]. Появление теплоток без градиента температуры, но зависящего от градиента квадрата тензора напряжений было детально изучено в ряде статей [3–5]. Неклассические эффекты обнаруживаются в течениях Куэтта и Пуазейля. В плоском течении Куэтта теплоток, направленные вдоль стенок, могут быть получены при моделировании с помощью уравнения Больцмана [6, 7]. Для плоского разреженного течения Пуазейля наблюдаются как продольный, так и поперечный теплоток, нарушающий закон Фурье. Профиль температуры имеет вид полинома четвертой степени относительно поперечной переменной, причем минимум температуры наблюдается в центре течения, тогда как теплоток направлен к стенкам (из холодной области в горячую). Данное свойство было предсказано аналитически [3, 5, 8, 9] и подтверждено численными экспериментами на основе методов молекулярной динамики [10], Монте-Карло [11], моментными уравнениями [12, 13], а также с помощью решеточных уравнений Больцмана [14] и гибридного метода на основе уравнения БГК и решеточных уравнений Больцмана [15]. Неклассический теплоперенос обнаруживается для течения газа в замкнутой полости с подвижной границей [16].

Существование аномального теплопереноса также было продемонстрировано для задач с мембранными граничными условиями для случая сверхзвукового течения газа [17]. В дальнейшем класс задач с неклассическим теплопереносом был значительно расширен [18–20], также было показано, что сверхзвуковое течение не является необходимым, теплоток и градиент

температуры могут иметь один знак для медленных течений в пристеночных слоях, данный результат может быть получен на основе линеаризованного уравнения БГК [21].

В настоящей работе рассматривается одномерное течение газа в микроканале, считается, что от левой границы в область направлены два молекулярных пучка, причем скорость частиц в каждом пучке одинакова. Правая граница считается твердой стенкой и для нее ставятся условия диффузного отражения частиц. Данная задача является модификацией задачи, в которой на одной из границ ставятся неравновесные условия в виде суммы двух максвелловских функций [22, 23]. Важно отметить, что в текущей задаче оказывается возможным аналитически найти условия, при которых аномальный теплопоток направлен как внутрь рассматриваемой области (увеличивает внутреннюю энергию газа), так и из микроканала (уменьшает внутреннюю энергию газа). Отметим, что граничные условия имеют вид дискретной по скоростям функции распределения, и с постановкой условий на левой границе связана задача из теории решеточных уравнений Больцмана. Для правильного описания неравновесных эффектов (например, скоростей скольжения) у твердых границ на основе решеточных уравнений Больцмана требуется, чтобы равновесная решеточная функция распределения правильно воспроизводила свойства максвелловского распределения (или сходилась к максвелловскому распределению при увеличении числа дискретных скоростей [24]). В частности, для локального равновесия решеточной модели первые моменты и первые полумоменты должны совпадать с максвелловскими [14, 25–29]. Рассматриваемая на левой граница функция распределения приводит к неклассическому теплопереносу в случае, если ее третий полумомент существенно отличается от максвелловского, т.е. эта функция максимально не похожа на максвелловскую. Таким образом, меняя отношение скоростей в молекулярных пучках на левой границе, можно получить условия, при которых граничная функция распределения ведет к неклассическому теплопереносу, либо применима для решеточных уравнений Больцмана. Показано, что для четырехскоростной решеточной модели Больцмана оптимальным отношением дискретных скоростей является $1 : 4$.

2. НЕКЛАССИЧЕСКИЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В МИКРОКАНАЛЕ

Рассмотрим одномерное течение газа в ограниченной области (микроканал), состояние газа описывается функцией распределения $f(t, x, \xi)$, где t – время, x – пространственная переменная, направленная вдоль микроканала, ξ – молекулярная скорость. В данной работе считаем, что на поперечных стенках микроканала частицы отражаются зеркально. Функция $f(t, x, \xi)$ удовлетворяет модельному кинетическому уравнению Шахова (S-модель) [30–32], которое рассмотрим в безразмерной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (f^{eq} - f), \quad (1)$$

где f^{eq} – локально-равновесная функция распределения, для S-модели она принимает следующий вид (в трехмерном пространстве):

$$f^{eq} = M(c) \left(1 + \frac{(1 - Pr)}{\rho T^2} \mathbf{q} \mathbf{c} \left(\frac{c^2}{5T} - 1 \right) \right), \quad (2)$$

где $M(c)$ – есть локально-максвелловская функция распределения:

$$M(c) = \frac{\rho}{\sqrt{(2\pi T)^3}} \exp\left(-\frac{c^2}{2T}\right),$$

а также $\mathbf{c} = \xi - \mathbf{u}$, $Pr = 2/3$ – число Прандтля для одноатомного газа, ρ , $\mathbf{u}$, T , $\mathbf{q}$ – плотность, потоковая скорость, температура и теплопоток соответственно. Время релаксации τ определяется из соотношения $\mu/\rho T$, где μ – вязкость, при этом для газа из твердых сфер длина свободного пробега равна $\lambda = \mu/\rho T_w \sqrt{\pi/(2T_w)}$, тогда

$$\tau = \sqrt{\frac{2T_w}{\pi}} \lambda = \sqrt{\frac{2T_w}{\pi}} Kn H,$$

где T_w – характерная температура течения (температура правой твердой стенки), которая считается равной температуре стенки на правой границе области, H – длина рассматриваемой области, $Kn = \lambda/H$ – число Кнудсена.

Рассмотрим граничные условия, для левой границы имеем для частиц, входящих в канал:

$$f|_{x=0, \xi_x > 0} \equiv f_l(\xi) = (w_1 \delta(\xi_x - v_1) + w_2 \delta(\xi_x - v_2)) (2\pi)^{-1} \exp\left(-\frac{\xi_y^2 + \xi_z^2}{2}\right), \quad (3)$$

где $\delta(\xi - v)$ — дельта функция. Веса w_1 , w_2 и скорости v_1 , v_2 считаются неотрицательными, значения этих величин влияют на профили температуры и теплопоток в микроканале. Для правой границы ставятся условия диффузного отражения:

$$f|_{x=H, \xi_x < 0} \equiv f_r(\xi) = \frac{K}{\sqrt{(2\pi T_w)^3}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2T_w}\right), \quad (4)$$

где коэффициент K получается из условия непротекания, т.е.

$$K = \frac{\int_{\xi_x > 0} f(t, x = H, \xi) \xi_x d^3 \xi}{\int_{\xi_x < 0} (2\pi T_w)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2T_w}\right) \xi_x d^3 \xi},$$

температуру правой стенки будем считать далее единичной, т.е. $T_w = 1$.

Приближенное решение задачи (1)–(4) можно получить из следующих соображений. Если считать, что длина канала H сравнима с длиной свободного пробега λ , то число Кнудсена $\text{Kn} \approx 1$. Известно, что для таких сильно разреженных течений функция распределения газа может быть разрывна при $\xi_x = 0$ и в первом приближении (свободномолекулярном) решение является суммой значений функции распределения на левой и правой границах ([1] и задача 2.8 в [33]), т.е. для $\xi_x > 0$ функция f выражается из (3), а для $\xi_x \leq 0$ из (4):

$$f(x, \xi) = f_l(\xi), \quad \xi_x > 0, \quad x \in [0, H], \quad (5)$$

$$f(x, \xi) = f_r(\xi), \quad \xi_x \leq 0, \quad x \in [0, H]. \quad (6)$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения будем считать, что плотность входящего в канал пучка равна $1/2$, т.е. $\int_{\xi_x > 0} f_l(\xi) d^3 \xi = 1/2$, тогда $K = 1$ и плотность газа в свободномолекулярном приближении (5), (6) равна единице. Зададим веса w_1 , w_2 и скорости v_1 , v_2 таким образом, чтобы для свободномолекулярного приближения (5), (6) потоковая скорость $\mathbf{u}$ была равна нулю, а температура газа была равна 1. Имеем систему уравнений:

$$w_1 + w_2 = \frac{1}{2} = \int_{\xi_x \leq 0} f_r(\xi) d^3 \xi, \quad (7)$$

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\xi_x \leq 0} f_r(\xi) \xi_x d^3 \xi, \quad (8)$$

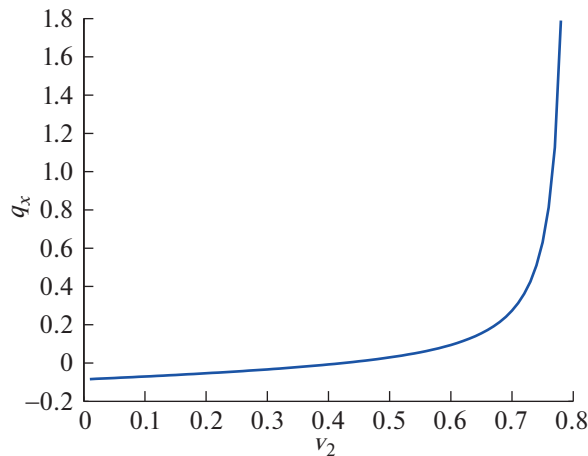
$$1 + w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 = \frac{3}{2} = \int_{\xi_x \leq 0} f_r(\xi) \xi^2 d^3 \xi, \quad (9)$$

получаем решение уравнений (7)–(9):

$$w_1 = \frac{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - v_2 \right)^2}{1 - 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_2 + v_2^2}, \quad w_2 = \frac{1}{2} - w_1, \quad v_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_2}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} - v_2}, \quad (10)$$

где скорость v_2 остается пока свободным параметром. Рассмотрим подробнее теплопоток:

$$q_x = \frac{1}{2} \int f(\xi) c^2 c_x d^3 \xi = \frac{1}{2} \left(w_1 v_1^3 + w_2 v_2^3 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right), \quad (11)$$



Фиг. 1. Теплоток q_x (без градиента температуры) в зависимости от скорости v_2 в свободномолекулярном приближении для задачи (1)–(4), формула (2).

очевидно, что изменяя значение v_2 в (10) можно влиять на величину теплоток. Если $v_2 \in (\sqrt{2/\pi}, \sqrt{\pi/2}]$, тогда скорость v_1 неположительна и этот случай исключается из дальнейшего рассмотрения. Далее будем рассматривать случай $v_2 \in (0, \sqrt{2/\pi})$. Температура в микроканале постоянна в свободномолекулярном приближении, теплоток может быть существенно отличен от нуля. Значения теплоток для разных v_2 представлены на фиг. 1. Отношение скоростей v_2/v_1 в зависимости от v_2 показаны на фиг. 2. Отметим, что при $v_2 \approx 0.425$ и, соответственно, из (10) при $v_1 \approx 1.77$ (отношение скоростей v_1 и v_2 примерно равно 4.17) получаем, что аномальный теплоток отсутствует. В этом случае дискретное распределение (3) правильно описывает нужные моменты максвелловского распределения. При $v_2 > 0.425$ теплоток направлен внутрь микроканала, причем в свободномолекулярном приближении получаем, что его можно сделать сколь угодно большим при $v_2 \rightarrow \sqrt{2/\pi}$, в этом случае $v_1 \rightarrow \infty$. В этом случае функция распределения имеет бесконечный коэффициент асимметрии. Действительно, рассматривая подробнее слагаемое $w_1 v_1^3$ в (2), видно, что при $v_2 \rightarrow \sqrt{2/\pi}$ оно растет как $(\sqrt{2/\pi} - v_2)^{-1}$. При $v_2 < 0.425$ теплоток отрицателен, т.е. можно удалять тепло из канала, но значения q_x ограничены снизу.

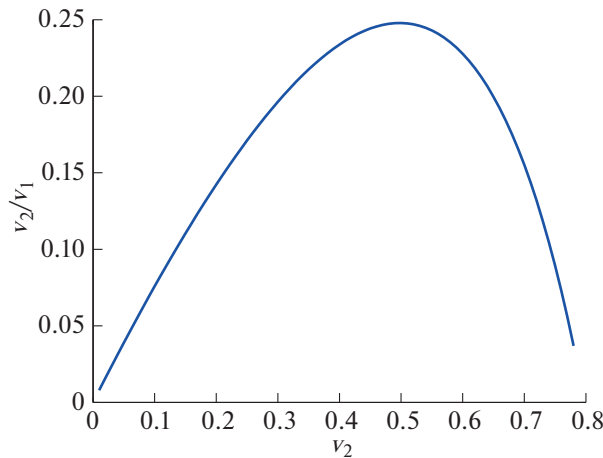
Отдельно следует подчеркнуть, что полученные результаты относятся к режиму течения, близкому к свободномолекулярному. Однако результаты численных экспериментов, представленные далее, показывают, что качественно поведение знака теплоток не меняется для чисел Кнудсена в режиме скольжения и переходном режиме течения ($\text{Kn} \sim O(10^{-1})$).

3. ЗАДАЧА О МОМЕНТАХ И ПОЛУМОМЕНТАХ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХСКОРОСТНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ БОЛЬЦМАНА

Задача о нахождении отношений дискретных скоростей и весов для описания первых моментов и полумоментов распределения Максвелла имеет прямое отношение к теории построения решеточных уравнения Больцмана (РУБ). Решеточные уравнения Больцмана являются дискретизацией по пространственным и временным переменным кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука [34]. Обычная форма локально максвелловского распределения для РУБ имеет следующий вид:

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left(1 + \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{u}}{\theta} + \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}}{2\theta^2} : (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i - \mathbf{I}\theta) \right), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $w_i > 0$ — веса (аналоги абсолютно-максвелловского распределения), $\mathbf{c}_i = (c_{i,x}, c_{i,y}, c_{i,z})$ — дискретные скорости, N — число дискретных скоростей, ρ , $\mathbf{u}$, θ — плотность, объемная скорость,



Фиг. 2. Отношение скоростей v_2/v_1 в зависимости от v_2 , решения получены из равенств (10).

температура газа соответственно. Также определены скалярные произведения $\mathbf{c}_i \mathbf{u} = \sum_{\alpha} c_{i,\alpha} u_{\alpha}$ и следующие свертки $\mathbf{u} \mathbf{u} : \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i = \sum_{\alpha\beta} c_{i,\alpha} c_{i,\beta} u_{\alpha} u_{\beta}$, $\mathbf{u} \mathbf{u} : \mathbf{I} = \sum_{\alpha} u_{\alpha} u_{\alpha}$. В настоящей работе рассмотрим одномерную модель с четырьмя дискретными скоростями, которые удобно обозначить как $c_{\pm 2}$, $c_{\pm 1}$, причем $c_{-1,-2} = -c_{1,2}$, и весами $w_{\pm 2}$, $w_{\pm 1}$, где $w_{-1,-2} = w_{1,2}$. Будем также считать, что $\theta = 1$.

Умножая функции f_i^{eq} на 1, $\mathbf{c}_i$, c_i^2 и суммируя по i , получаем выражения для моментов нулевого, первого и второго порядка. Для того, чтобы они совпадали с максвелловскими моментами соответствующих порядков, необходимо, чтобы выполнялись равенства:

$$w_1 + w_2 = \frac{1}{2}, \quad w_1 c_1^2 + w_2 c_2^2 = \frac{1}{2}, \quad w_1 c_1^4 + w_2 c_2^4 = \frac{3}{2}, \quad (12)$$

для правильного диффузного отражения частиц газа у твердых стенок необходимо, чтобы модель описывала максвелловские полумоменты $\int_{c>0} M(c) c^n dc$, если потребовать, чтобы воспроизводился первый полумомент, то получаем дополнительное условие на веса и скорости решетки:

$$w_1 c_1 + w_2 c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{2}} c dc = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (13)$$

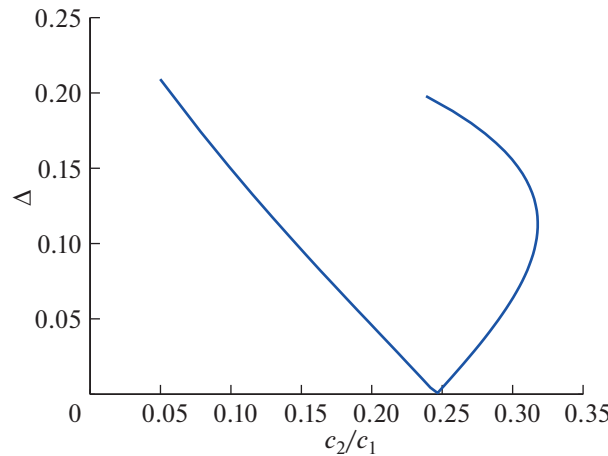
Из уравнений (12) получаем решения:

$$c_2^2 = 1 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{2w_1}{(1-2w_1)}}, \quad c_1^2 = 1 + \sqrt{2} \sqrt{\frac{(1-2w_1)}{2w_1}}$$

и $w_2 = \frac{1}{2} - w_1$, причем w_1 пока остается свободным параметром. Подставляем эти выражения в левую часть уравнения (13) и получаем нелинейное уравнение относительно веса w_1 . Введем относительную ошибку для первого полумомента в зависимости от w_1 :

$$\Delta(w_1) = \sqrt{2\pi} \left| w_1 c_1 + \left(\frac{1}{2} - w_1 \right) c_2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right|, \quad (14)$$

график $\Delta(w_1)$ для разных значений $c_2(w_1)/c_1(w_1)$ представлен на фиг. 3. Ошибка Δ практически равна нулю, если отношение скоростей $c_2/c_1 \approx 0.2467$. Так как для численных расчетов на основе РУБ удобно иметь целое отношение (или рациональное) между скоростями, то оптимальным целым отношением скоростей c_2/c_1 будет 1 : 4. Отметим, что для четырехскоростной модели со скоростями $\sqrt{3} \pm \sqrt{6}$ (отношение скоростей равно 0.318) [35–37], которая дополнительно правильно воспроизводит полный максвелловский третий момент, относительная ошибка для первого



Фиг. 3. Относительная ошибка Δ первого максвелловского полумомента (14) в зависимости от отношения скоростей v_2/v_1 для решеточной модели Больцмана четырьмя скоростями.

максвелловского полумомента $\approx 1\%$, что примерно в три раза меньше, чем у стандартной трехскоростной решеточной модели Больцмана и, следовательно, четырехскоростная модель будет иметь гораздо лучшую точность при моделировании разреженных течений, чем трехскоростная модель.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В МИКРОКАНАЛЕ

Для численного решения задачи (1)–(4) используется противопотоковая двухшаговая разностная схема. Рассмотрим сеточную функцию распределения:

$$f_m^n(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \equiv f(t = t_n, x = x_m, \xi_x = \xi_i, \xi_y = \xi_j, \xi_z = \xi_k).$$

Для сеточной функции распределения вначале решается шаг адвекции:

$$f_m^{n+1/2} = f_m^n + 0.5\beta_i(-3f_m^n + 4f_{m+1}^n - f_{m+2}^n), \quad \xi_i \geq 0, \quad (15)$$

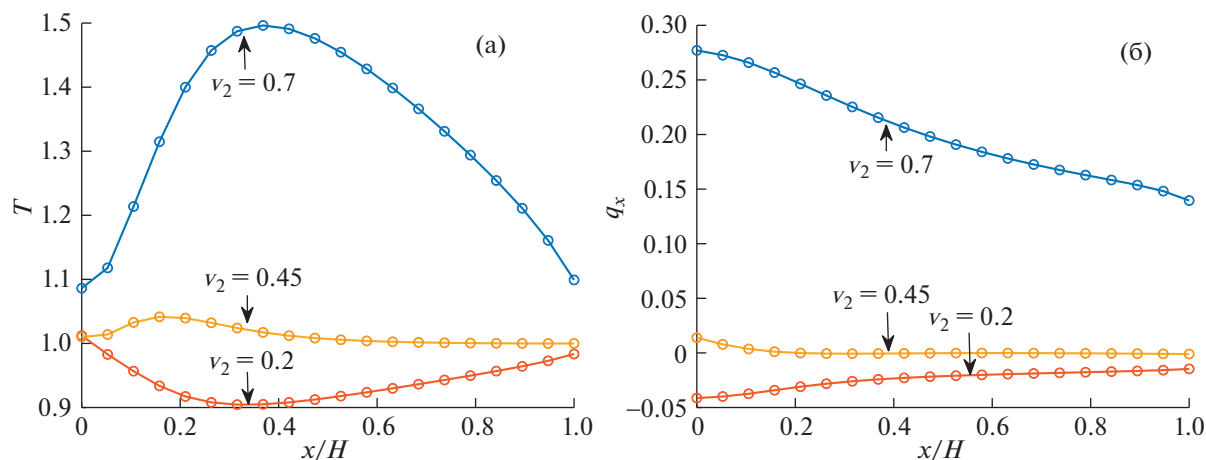
$$f_m^{n+1/2} = f_m^n - 0.5\beta_i(3f_m^n - 4f_{m-1}^n + f_{m-2}^n), \quad \xi_i < 0, \quad (16)$$

где $\beta_i = \Delta t \xi_i / \Delta x$ и $\Delta t, \Delta x$ — есть шаг по времени для разностной схемы и размер ячейки в физическом пространстве. Для приграничных узлов используются схема первого порядка и граничные условия (3), (4). Затем решается столкновительная часть для S-модели:

$$f_m^{n+1} = f_m^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{\tau} (f_m^{eq, n+1/2} - f_m^{n+1/2}), \quad (17)$$

где $f_m^{eq, n+1/2}$ — функция распределения (2), для которой плотность, потоковая скорость, температура и теплоток вычисляются с помощью $f_m^{n+1/2}$.

Расчеты проводились для числа Кнудсена $\text{Kn} = 0.1$, канал длиной $H = 1$ разбивался на 20 пространственных узлов, считается, что первый и последний узлы лежат на границах микроканала, тогда расстояние между пространственными узлами $\Delta x = 1/19$. Шаг по времени Δt вычислялся из числа Куранта, которое по определению равно $\Delta t \xi_{\max} / \Delta x$, где $\xi_{\max} = 5$ — есть максимальная рассматриваемая молекулярная скорость, число Куранта бралось равным 0.45. В качестве начальных данных бралось максвелловское распределение, расчет велся до установления стационарных решений.



Фиг. 4. Результаты численного моделирования течения в микроканале, задача (1)–(4), $\text{Kn} = 0.1$, а – профили температуры, б – профили теплопотока.

Рассматривалось несколько вариантов задания параметров для граничных условий (3): $v_2 = 0.2, 0.45, 0.7$, тогда из равенств (10) получаем, что соответствующие $v_1 \approx 1.41, 1.84, 4.51$. Теоретические предсказания для свободномолекулярного режима качественно верны для рассматриваемого случая $\text{Kn} = 0.1$. Теплопоток положителен при $v_2 = 0.7$, практически равен нулю при $v_2 = 0.45$ и отрицателен при $v_2 = 0.2$, что качественно соответствует решению (5), (6), фиг. 4. Профили температуры демонстрируют существенно неклассическое неравновесное поведение вблизи левой границы, а именно, градиент температуры имеет тот же знак, что и теплопоток, фиг. 4. Отметим, что в рассматриваемой задаче удастся контролировать поведение аномального теплопотока: можно задать условия, для которых теплопоток направлен из микроканала во внешнее пространство (с прикладной точки зрения это может быть интересно для охлаждения твердой правой границы), так и внутрь микроканала.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается задача о переносе тепла в ограниченной одномерной области (микроканале), заполненной разреженным одноатомным газом. На левой границе области размещена мембрана, которая пропускает частицы во внешнее пространство, при этом внутрь области направлены два молекулярных пучка, причем частицы в каждом пучке имеют одинаковую скорость. На правой границе канала находится твердая стенка, и ставятся граничные условия диффузного отражения. В свободномолекулярном приближении данная задача имеет аналитическое решение. Важно подчеркнуть, что, изменяя скорости в молекулярных пучках в свободномолекулярном приближении, можно получить:

а) сколь угодно большие положительные значения теплопотока в микроканале без градиента температуры (фиг. 1).

б) отрицательные значения теплопотока в микроканале без градиента температуры (фиг. 1).

На практике реализация сколь угодно большого теплопотока связана со значительными сложностями, так как необходимо создать молекулярные пучки практически с нулевой температурой и сверхзвуковой скоростью.

Численные расчеты на основе модели Шахова для числа Кнудсена, равного 0.1, качественно подтверждают теоретические результаты. Также показано, что вблизи левой границы градиент температуры имеет тот же знак, что и теплопоток.

Задача о выборе скоростей в молекулярных пучках имеет связь с задачей построения решеточных уравнений Больцмана, правильно воспроизводящих максвелловские полумоменты. Данное свойство необходимо для описания диффузного отражения частиц газа. В настоящей работе показано, что если ограничиться первым полумоментом, то для решеточных уравнений Больцмана с четырьмя скоростями, оптимальным отношением дискретных скоростей является 1 : 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1986.
2. Ландау Л., Лифшиц Е. Гидродинамика. М.: Наука, 1984.
3. Baranyai A., Evans D., Davis P. Isothermal shear-induced heat flow// Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 7593.
4. Todd B., Evans D. The heat flux vector for highly inhomogeneous nonequilibrium fluids in very narrow pores// J. Chem. Phys. 1995. V. 103. P. 9804.
5. Todd B., Evans D. Temperature profile for Poiseuille flow// Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 2800.
6. Sone Y., Takata S., Ohwada T. Numerical analysis of the plane Couette flow of a rarefied gas on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules// Eur. J. Mech B/Fluids. 1989. V. 9. P. 273.
7. Rogozin O. Numerical analysis of the nonlinear plane Couette-flow problem of a rarefied gas for hard-sphere molecules// Eur. J. Mech B/Fluids. 2016. Vol 60. P. 148.
8. Aoki K., Takata S., Nakanishi T. Poiseuille-type flow of a rarefied gas between two parallel plates driven by a uniform external force// Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 026315.
9. Myong R.S. A full analytical solution for the force-driven compressible Poiseuille gas flow based on a nonlinear coupled constitutive relation// Phys. Fluids. 2011. V. 23. 012002.
10. Malek Mansour M., Baras F., Garcia A. On the validity of hydrodynamics in plane Poiseuille flows// Physica A. 1997. V. 240. P. 255.
11. Zheng Y., Garcia A., Alder B. Comparison of Kinetic Theory and Hydrodynamics for Poiseuille Flow // J. Stat. Phys. 2002. V. 109. P. 495.
12. Gu X.-G., Emerson D. A high-order moment approach for capturing non-equilibrium phenomena in the transition regime // J. Fluid Mech. 2009. V. 636. P. 177.
13. Taheri P., Torrilhon M., Struchtrup H. Couette and Poiseuille microflows: Analytical solutions for regularized 13-moment equations// Phys. Fluids. 2009. V. 21. P. 017102.
14. Ambrus V., Sofonea V. Application of mixed quadrature lattice Boltzmann models for the simulation of Poiseuille flow at non-negligible values of the Knudsen number// J. Comput. Sci. 2016. V. 17. P. 403.
15. Ilyin O. Relative entropy based breakdown criteria for hybrid discrete velocity Bhatnagar–Gross–Krook and lattice Boltzmann method// Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 112006.
16. Venugopal V., Praturi D., Girimaji S. Non-equilibrium thermal transport and entropy analyses in rarefied cavity flows// J. Fluid Mech. 2019. V. 864. P. 995.
17. Aristov V. A steady state, supersonic flow solution of the Boltzmann equation// Phys. Lett. A. 1998. V. 250. P. 354.
18. Aristov V., Frolova A., Zabelok S. A new effect of the nongradient transport in relaxation zones// Europhys. Lett. 2009. V. 88. P. 30012.
19. Aristov V., Frolova A., Zabelok S. Supersonic flows with nontraditional transport described by kinetic methods // Commun. Comput. Phys. 2012. V. 11. P. 1334.
20. Aristov V., Voronich I., Zabelok S. Nonequilibrium nonclassical phenomena in regions with membrane boundaries// Phys. Fluids. 2021. V. 33. P. 012009.
21. Ilyin O. Anomalous heat transfer for an open non-equilibrium gaseous system// J. Stat. Mech. 2017. P. 053201.
22. Аристов В., Забелок С., Фролова А. Возможность аномального теплопереноса в течениях с неравновесными граничными условиями// Докл. АН. 2017. Т. 473. С. 286.
23. Aristov V., Voronich I., Zabelok S. Direct methods for solving the Boltzmann equations: Comparisons with direct simulation Monte Carlo and possibilities// Phys. Fluids. 2019. V. 31. P. 097106.
24. Ilyin O. Gaussian Lattice Boltzmann method and its applications to rarefied flows// Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 012007.
25. Ambrus V., Sofonea V. Implementation of diffuse-reflection boundary conditions using lattice Boltzmann models based on half-space Gauss-Laguerre quadratures// Phys. Rev E. 2014. V. 89. P. 041301(R).
26. Ambrus V., Sofonea V. Lattice Boltzmann models based on half-range Gauss–Hermite quadratures // J. Comput. Phys. 2016. V. 316. P. 760.
27. Feuchter C., Schleifenbaum W. High-order lattice Boltzmann models for wall-bounded flows at finite Knudsen numbers// Phys. Rev. E. 2016. V. 94. P. 013304.
28. Aristov V., Ilyin O., Rogozin O. A hybrid numerical scheme based on coupling discrete-velocities models for the BGK and LBGK equations// AIP Conf. Proc. 2019. V. 2132. P. 060007.
29. Aristov V., Ilyin O., Rogozin O. Kinetic multiscale scheme based on the discrete-velocity and lattice-Boltzmann methods// J. Comput. Sci. 2020. V. 40. 101064.

30. *Shakhov E.* Generalization of the Krook kinetic relaxation equation // *Fluid Dyn.* 1968. V. 3. P. 95.
31. *Shakhov E.* Approximate kinetic equations in rarefied gas theory // *Fluid Dyn.* 1968. V. 3. P. 156.
32. *Titarev V.* Conservative numerical methods for model kinetic equations // *Comput. Fluids.* 2006. V. 36. P. 1446.
33. *Struchtrup H.* Macroscopic Transport Equations for Rarefied Gas Flows. Approximation Methods in Kinetic Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
34. *Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Vignon E.* The Lattice Boltzmann Method. Principles and Practice. Springer, 2017.
35. *Chikatamarla S., Karlin I.* Entropy and Galilean invariance of lattice Boltzmann theories // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. P. 190601.
36. *Bardow A., Karlin I., Gusev A.* Multispeed models in off-lattice Boltzmann simulations // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 77. P. 025701(R).
37. *Chikatamarla S., Karlin I.* Lattices for the lattice Boltzmann method // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 79. P. 046701.