ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 12, с. 2131–2154

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.954

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ *Z*-ОБРАЗНОЙ ОБЛАСТИ

С. Л. Скороходов[1,*]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sskorokhodov@gmail.com

Поступила в редакцию 13.04.2023 г.
Переработанный вариант 18.06.2023 г.
Принята к публикации 10.07.2023 г.

Для задачи конформного отображения полуплоскости на $\mathbb{Z}$-образную область с произвольной геометрией разработан метод эффективного нахождения параметров интеграла Кристоффеля–Шварца, т.е. прообразов вершин и предынтегрального множителя. Особое внимание уделено случаю кроудинга прообразов, когда традиционные методы интегрирования сталкиваются со значительными трудностями. Для этого вводится понятие кластера, определяются его центр и все подынтегральные биномы с прообразами из этого кластера разлагаются в быстросходящийся ряд по однородной схеме. Возникающие интегралы далее сводятся к одинарному или двойному ряду по гипергеометрическим функциям Гаусса $F(a,b;c;q)$. Использование формул аналитического продолжения для $F(a,b;c;q)$ в окрестность точки $q = 1$ и численно устойчивых рекуррентных соотношений позволило обеспечить быструю сходимость полученных разложений. Построенные разложения оказываются также весьма эффективными при выборе начальных приближений прообразов в итерационном методе Ньютона. Использование старших членов этих разложений позволяет выразить приближения для прообразов в явном виде через элементарные функции, а последующие итерации обеспечивают быструю сходимость алгоритма. После нахождения параметров в интеграле искомое отображение строится в виде комбинации степенных разложений в прообразах, регулярных разложений в прообразе центра симметрии, в виде ряда Лорана в полукольце и в виде специальных рядов в окрестности прообразов торцевых отрезков. Численные результаты показали высокую эффективность разработанного метода, особенно в случае сильного кроудинга прообразов. Библ. 30. Фиг. 7.

Ключевые слова: конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, кроудинг прообразов, гипергеометрические функции Гаусса, формулы аналитического продолжения, асимптотики параметров, $\mathbb{Z}$-образная область.

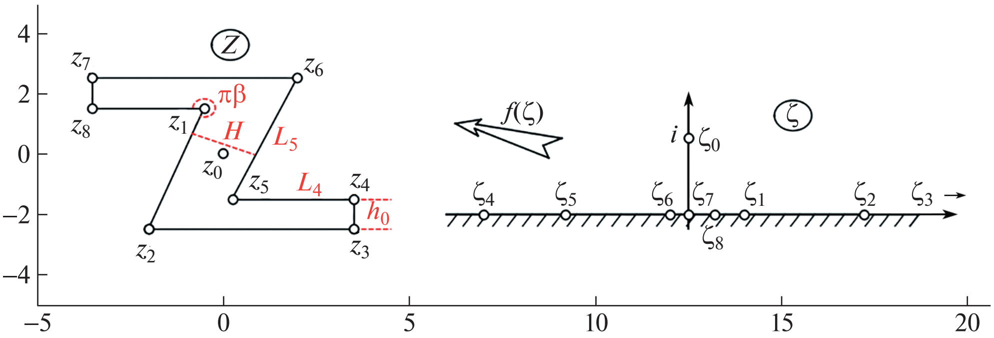
DOI: 10.31857/S0044466923120256, **EDN:** BWPFIE

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачу конформного отображения $f(\zeta)$ полуплоскости или круга на многоугольник решает интеграл Кристоффеля–Шварца (далее ИКШ), однако основная трудность при этом состоит в нахождении параметров этого интеграла, т.е. прообразов вершин ζ_k и предынтегрального множителя (см. [1–9]). Зависимость этих величин от длин сторон L_k и углов многоугольника является сильно нелинейной, причем некоторые из прообразов могут меняться экспоненциально быстро или медленно, а некоторые – степенным образом.

Особые трудности при этом возникают в ситуации кроудинга, когда ряд прообразов ζ_k сбивается в тесную группу, и расстояние между соседними прообразами в группе становится чрезвычайно малым (см. [4, 7, 10–13]), а таких групп может быть несколько.

Основные уравнения для нахождения прообразов в ИКШ возникают при интегрировании по отрезкам $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ производной искомого отображения $f'(\zeta)$ и сравнении этих интегралов I_k с заданными длинами L_k сторон многоугольника. Для вычисления I_k часто используют либо квадратуры Гаусса (см. [4, 14, 5, 9]), либо квадратуры Гаусса–Якоби (см. [15–17]), либо другие специальные методы (см. [18, 19]). Однако все указанные подходы в ситуации сильного кроудинга не позволяют с нужной точностью определить параметры ИКШ, и эта проблема остается далекой от надежного решения.



Фиг. 1. Отображение полуплоскости на $\mathbb{Z}$-образную область.

Существенный прогресс в преодолении отмеченных трудностей достигнут в недавних работах [20–23]. В этих исследованиях решена проблема аналитического продолжения функции Лауричеллы произвольного числа переменных; формулы продолжения применены к решению проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца. Благодаря такому подходу ситуация кроудинга в этих работах является эффективно разрешимой.

Отметим также работу [24], в которой отображение $\mathbb{L}$-образной области построено в явном аналитическом виде. Возникающий здесь кроудинг вблизи двух точек $\zeta = \pm 1$ эффективно разрешается с помощью техники гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; z)$ и искомое отображение представлено в виде быстросходящихся рядов.

Необходимо также отметить, что попытка отображения области $\mathbb{Z}$ частного вида была предпринята в [25], где входящий угол был равен лишь $3\pi/2$, горизонтальные стороны полагались бесконечными, а толщины вертикальной и горизонтальных полочек были равными. Однако отображение области и решение на его основе задачи кручения стержня такого $\mathbb{Z}$-образного сечения содержат принципиальные ошибки в приведенной эпюре напряжений.

В настоящей работе рассмотрена задача построения конформного отображения симметричной $\mathbb{Z}$-образной области с произвольными геометрическими характеристиками (см. фиг. 1а). Здесь возникает ситуация кроудинга четырех прообразов вблизи точки $\zeta = 0$ и четырех прообразов вблизи $\zeta = \infty$. Для преодоления указанных трудностей при вычислении необходимых интегралов I_k вводится понятие кластера, т.е. объединение прообразов ζ_k, входящих в одну компактную группу. Каждый из соответствующих биномов $(t - \zeta_k)^{\alpha_k}$ с прообразами из этого кластера разлагается в специальный ряд, и такие ряды перемножаются. В результате интеграл I_k представлен в виде разложения по функциям Гаусса $F(a, b; c; q)$, для которых использование формул аналитического продолжения в окрестность точки $q = 1$ и рекуррентных соотношений по параметрам a, b и c позволяет вычислить I_k с высокой точностью.

Выбор начального приближения прообразов $\zeta_k^{(0)}$ для итерационного метода Ньютона является важной и трудной задачей, поскольку сходимость итераций сильно зависит от значений $\zeta_k^{(0)}$. В работе [13] такие приближения строятся на основе развитой в [26] теории конформного отображения сингулярно деформируемых областей и получения адекватных асимптотик прообразов. В настоящей работе приближения прообразов $\zeta_k^{(0)}$ также определяются на основе использования результатов из [26], в частности, учет лишь старших членов разложений в представлении для интегралов I_k позволяет выразить аппроксимации $\zeta_k^{(0)}$ в явном виде через элементарные функции, а последующие несколько итераций обеспечивают относительную точность вычисления параметров ИКШ до $\delta = 10^{-20}$.

После нахождения параметров ИКШ искомое отображение $f(\zeta)$ полуплоскости на исходную область $\mathbb{Z}$ строится в виде степенных разложений в прообразах ζ_k, регулярного разложения в прообразе центра симметрии, в виде ряда Лорана в определенном полукольце и в виде специальных рядов в окрестности некоторых отрезков $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$. Полученные разложения покрывают всю полуплоскость и решают задачу эффективного построения отображения $f(\zeta)$.

Численные результаты разработанного метода представлены в виде рассчитанных параметров ИКШ и в виде образа квадратной сетки в прямоугольнике Π при отображении на область $\mathbb{Z}$ с тремя различными геометрическими параметрами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть необходимо построить конформное отображение $f(\zeta)$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ на симметричную $\mathbb{Z}$-образную область $\mathscr{Z}$ (см. фиг. 1). Геометрия области определяется толщиной h_0 горизонтальных полочек, толщиной H центральной части, раствором $\pi\beta$, $\beta \in (1,2)$, входящих углов в вершинах z_1 и z_5, длиной горизонтальных сторон $L_4 = |z_5 - z_4| = |z_1 - z_8|$ и длиной центральных сторон $L_5 = |z_6 - z_5| = |z_2 - z_1|$.

Вершинам z_k при отображении $f(\zeta)$ будут соответствовать прообразы ζ_k, $k = 1,\dots,8$, а показатели углов, т.е. деленые на π величины углов в вершинах z_k, обозначим через β_k. Это позволяет записать

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_7 = \beta_8 = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \beta_5 = \beta, \quad \beta_2 = \beta_6 = 2 - \beta, \quad \beta \in (1,2). \tag{1}$$

Пусть отображение $f(\zeta)$ имеет такую нормировку, что точка $\zeta_0 = i$ переходит в центр симметрии z_0 области $\mathscr{Z}$ (см. фиг. 1), а точка $\zeta_7 = 0$ переходит в z_7. Тогда прообразы ζ_k будут обладать свойством симметрии

$$\zeta_3 = \infty, \quad \zeta_k\zeta_{k+4} = \zeta_0^2 = -1, \quad k = 1,2,4. \tag{2}$$

Чтобы убедиться в этом, используем отображение $\chi(\zeta) = \dfrac{i-\zeta}{i+\zeta}$ полуплоскости $\mathbb{H}$ на единичный круг $\mathbb{U} := \{|\chi| < 1\}$ с нормировкой $\chi(i) = 0$. Тогда суперпозиция $f \circ \zeta(\chi)$ отображает круг $\mathbb{U}$ на область $\mathscr{Z}$ с нормировкой $f \circ \zeta(0) = z_0$ и, значит, обладает свойством центральной симметрии, т.е. для любой граничной точки χ_* выполнено

$$f \circ \zeta(-\chi_*) = -f \circ \zeta(\chi_*).$$

Обратная к введенной функции $\chi(\zeta)$, т.е. $\zeta(\chi) = i\dfrac{1-\chi}{1+\chi}$, обладает очевидным свойством, что любым двум граничным симметричным точкам χ_* и $-\chi_*$ при отображении $\zeta(\chi)$ соответствуют две точки $\zeta(\chi_*) = i\dfrac{1-\chi_*}{1+\chi_*}$ и $\zeta(-\chi_*) = i\dfrac{1+\chi_*}{1-\chi_*}$, для которых очевидно выполнено правило $\zeta(\chi_*)\zeta(-\chi_*) = -1$. Это и доказывает свойство (2).

Для удобства выкладок введем обозначение $\alpha_k = \beta_k - 1$ и приведем эти значения:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_8 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \alpha_5 = \beta - 1, \quad \alpha_2 = \alpha_6 = 1 - \beta. \tag{3}$$

Запишем теперь ИКШ с выбором нижнего предела ζ_0 в интеграле:

$$z(\zeta) = z_0 + \mathscr{K}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\prod_{k\neq 3}(t-\zeta_k)^{\alpha_k}\,dt, \quad \mathscr{K} > 0; \tag{4}$$

свойство $\mathscr{K} > 0$ легко следует из рассмотрения (4) при $\zeta > \zeta_2$. Далее, неравенство $k \neq 3$ в произведении биномов в ИКШ будем опускать.

В других необходимых случаях нижний предел в интеграле будем полагать равным прообразу ζ_n, тогда значение z_0 в (4) необходимо заменить на z_n.

Условиями для искомых параметров ζ_k и множителя $\mathcal{K}$ служат характеристики $\mathbb{Z}$-образной области, в частности, уравнения для сторон L_4 и L_5:

$$\mathcal{K}\int\limits_{\zeta_4}^{\zeta_5}\prod_k (t-\zeta_k)^{\alpha_k}\,dt = z_5 - z_4 = -L_4, \tag{5}$$

$$\mathcal{K}\int\limits_{\zeta_5}^{\zeta_6}\prod_k (t-\zeta_k)^{\alpha_k}\,dt = z_6 - z_5 = L_5 e^{-i\pi\beta}. \tag{6}$$

Далее, из рассмотрения области $\mathcal{Z}$ и проведения двух перпендикуляров из точки z_5 на стороны $[z_2, z_3]$ и $[z_1, z_2]$ можно несложно вывести связь параметров h_0, H и β с вектором $z_5 - z_2$:

$$z_5 - z_2 = -\frac{H + h_0\cos(\pi\beta)}{\sin(\pi\beta)} + ih_0. \tag{7}$$

Это дает еще два условия на интеграл по любой дуге в полуплоскости $\mathbb{H}_+$ от точки ζ_2 до ζ_5, т.е. для вещественной и мнимой частей:

$$\mathcal{K}\int\limits_{\zeta_2}^{\zeta_5}\prod_k (t-\zeta_k)^{\alpha_k}\,dt = -\frac{H + h_0\cos(\pi\beta)}{\sin(\pi\beta)} + ih_0. \tag{8}$$

Таким образом, в поставленной задаче искомыми являются шесть прообразов ζ_k, $k = \{1,2,4,5,6,8\}$, и множитель $\mathcal{K} > 0$. Определяющими уравнениями являются четыре уравнения (5), (6), (8) на интегралы и три уравнения (2) парных связей ζ_k и ζ_{k+4}. Выражая прообразы ζ_5, ζ_6 и ζ_8 по формулам $\zeta_{k+4} = -1/\zeta_k$, получаем искомыми три прообраза ζ_1, ζ_2, ζ_4 и $\mathcal{K}$. Интегралы (5), (6), (8) имеют гипергеометрический тип и берутся различными методами, чему посвящены три следующих раздела.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА $J_{(4,5)}$ ПО ОТРЕЗКУ $[\zeta_4, \zeta_5]$

3.1. Введение кластера прообразов $\zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_1, \zeta_2$

Пять прообразов $\zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_1, \zeta_2$ объединим в один кластер $\mathbb{C}l^{(62)}$ и введем его центр $\zeta_c^{(62)}$ как полусумму граничных значений ζ_6 и ζ_2:

$$\zeta_c^{(62)} = (\zeta_6 + \zeta_2)/2. \tag{9}$$

При интегрировании по отрезку $[\zeta_4, \zeta_5]$ введем замену переменной t в виде

$$t = \zeta_4 + \Delta_4 u, \quad \Delta_4 = \zeta_5 - \zeta_4, \quad u \in [0,1]. \tag{10}$$

Для каждого из биномов $(t-\zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{6,7,8,1,2\}$, используем замену (10) и проведем цепочку преобразований:

$$\begin{gathered}(t-\zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_4 - \zeta_c^{(62)} + \Delta_4 u)^{\alpha_k}\left(1 - \frac{\zeta_c^{(62)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(62)} - \zeta_4 - \Delta_4 u}\right)^{\alpha_k} = (\zeta_4 - \zeta_c^{(62)})^{\alpha_k}(1 - q^{(62)}u)^{\alpha_k} \times \\ \times\left(1 - \frac{p_k}{1 - q^{(62)}u}\right)^{\alpha_k}, \quad q^{(62)} = \frac{\Delta_4}{\zeta_c^{(62)} - \zeta_4}, \quad p_k = \frac{\zeta_c^{(62)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(62)} - \zeta_4}.\end{gathered} \tag{11}$$

Далее нам потребуется формула разложения бинома в степенной ряд

$$(1 - ax)^{\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad c_m = \frac{a^m(-\mu)_m}{m!}, \quad (-\mu)_m = \frac{\Gamma(m-\mu)}{\Gamma(-\mu)}, \quad |ax| < 1, \tag{12}$$

где $(-\mu)_m$ – символ Похгаммера, а $\Gamma(y)$ – гамма-функция Эйлера.

Последний множитель в (11) теперь разложим в ряд вида (12) по степеням $(1-q^{(62)}u)^{-n}$:

$$\left(1-\frac{p_k}{1-q^{(62)}u}\right)^{\alpha_k}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(k)}(1-q^{(62)}u)^{-n},\quad b_n^{(k)}=\frac{p_k^n(-\alpha_k)_n}{n!}. \tag{13}$$

Скорость сходимости этого ряда будет весьма высокой, поскольку величина $p_k/(1-q^{(62)}u)$ при $u\in[0,1]$ имеет максимум:

$$\max_{u\in[0,1]}\left|\frac{p_k}{1-q^{(62)}u}\right|=\left|\frac{p_k}{1-q^{(62)}}\right|=\frac{|\zeta_c^{(62)}-\zeta_k|}{\zeta_c^{(62)}-\zeta_5}<1,\quad k=\{6,7,8,1,2\}. \tag{14}$$

Таким образом, каждый из биномов $(t-\zeta_k)^{\alpha_k}$ для $k=\{6,7,8,1,2\}$ запишем в окончательном виде

$$(t-\zeta_k)^{\alpha_k}=(\zeta_4-\zeta_c^{(62)})^{\alpha_k}(1-q^{(62)}u)^{\alpha_k}\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(k)}(1-q^{(62)}u)^{-n}. \tag{15}$$

Здесь важно отметить, что текущий прообраз ζ_k участвует лишь в определении коэффициента p_k, а значит, лишь в задании $b_n^{(k)}$.

Необходимое для интегрирования произведение пяти биномов $\prod_k(t-\zeta_k)^{\alpha_k}$ теперь запишем в виде

$$\prod_{k=\{6,7,8,1,2\}}(t-\zeta_k)^{\alpha_k}=(\zeta_4-\zeta_c^{(62)})^{-\beta}(1-q^{(62)}u)^{-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(62)}(1-q^{(62)}u)^{-m}, \tag{16}$$

поскольку из (3) имеем $\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_1+\alpha_2=-\beta$. Коэффициенты $B_m^{(62)}$ здесь получаются последовательным произведением Коши рядов по степеням $(1-q^{(62)}u)^{-n}$:

$$\prod_{k=\{6,7,8,1,2\}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(k)}(1-q^{(62)}u)^{-n}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(62)}(1-q^{(62)}u)^{-m}, \tag{17}$$

и вычисляются рекуррентно по схеме

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n x^{-n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\nu_n x^{-n}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\eta_m x^{-m},\quad \eta_m=\sum_{k=0}^{m}\mu_k\nu_{m-k}. \tag{18}$$

3.2. Сведение интеграла $J_{(4,5)}$ к ряду по функциям $F(a,b;c;q^{(62)})$

Необходимые биномы $(t-\zeta_4)^{\alpha_4}$, $(t-\zeta_5)^{\alpha_5}$ и дифференциал dt представим с учетом замены (10) в виде

$$(t-\zeta_4)^{\alpha_4}=\Delta_4^{\alpha_4}u^{\alpha_4},\quad (t-\zeta_5)^{\alpha_5}=e^{i\pi\alpha_5}\Delta_4^{\alpha_5}(1-u)^{\alpha_5},\quad dt=\Delta_4du. \tag{19}$$

Тогда, используя произведение биномов (16) и представление (19), в интеграле (5) для $J_{(4,5)}$ получаем

$$J_{(4,5)}=-\mathcal{K}\Delta_4^{\beta-1/2}(\zeta_c^{(62)}-\zeta_4)^{-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(62)}\int_0^1\frac{u^{-1/2}(1-u)^{\beta-1}}{(1-q^{(62)}u)^{m+\beta}}du. \tag{20}$$

Воспользуемся теперь интегральным представлением Эйлера [27] для гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b;c;z)$:

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt,\quad c>b>0, \tag{21}$$

и перепишем (20) в виде

$$J_{(4,5)} = -\mathcal{K}\Delta_4^{\beta-1/2}(\zeta_c^{(62)} - \zeta_4)^{-\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(62)} F\left(m+\beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\beta; q^{(62)}\right). \tag{22}$$

Величина $q^{(62)}$, участвующая в качестве аргумента функций $F(.,.;.;q^{(62)})$ в этом разложении, определена в (11) и, как легко оценить, очень близка к единице (в реальных расчетах значение $(1-q^{(62)}) \sim 10^{-3} - 10^{-7}$). Поэтому для эффективного вычисления значений $F(.,.;.;q^{(62)})$ в сумме (22) воспользуемся формулой аналитического продолжения из [27] в окрестность точки $q = 1$:

$$\begin{aligned} F\left(m+\beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\beta; q\right) &= (1-q)^{-m}\frac{\Gamma(m)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma(m+\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-m\right)_n(\beta)_n}{n!(1-m)_n}(1-q)^n + \\ &+ (-1)^m\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!(n+m)!}[k_n'' - \ln(1-q)](1-q)^n, \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$k_n'' = \psi(1+m+n) + \psi(1+n) - \psi(m+\beta+n) - \psi\left(\frac{1}{2}+n\right), \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

а при $m = 0$ первая сумма в (23) исчезает.

Функции $F\left(m+\beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\beta; q^{(62)}\right)$ вычислим при $m = 0$ и $m = 1$ по формуле (23), а для последующих $m \geq 2$ воспользуемся рекуррентным соотношением из [27]

$$\begin{aligned} F\left(m+\beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\beta; q\right) &= \frac{\frac{3}{2}-m}{(m+\beta-1)(1-q)}F\left(m+\beta-2, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\beta; q\right) + \\ &+ \frac{2m+\beta-\frac{5}{2}-q\left(m+\beta-\frac{3}{2}\right)}{(m+\beta-1)(1-q)}F\left(m+\beta-1, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\beta; q\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Численная устойчивость рекурсии (24) проводится с помощью асимптотического анализа при $m \to +\infty$ двух линейно независимых решений этого трехчленного рекуррентного уравнения (см. [28]) и показывает устойчивость этой рекурсии в сторону увеличения номера m. Высокоточные расчеты с использованием соотношения (24) полностью подтвердили этот вывод.

Таким образом, алгоритм вычисления интеграла $J_{(4,5)}$ построен.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА $J_{(2,5)}$ ПО ДУГЕ $[\zeta_2, \zeta_5]$

4.1. Введение кластера $\mathbb{C}l^{(61)}$ прообразов ζ_6, ζ_7, ζ_8, ζ_1 и представление бинома $(t-\zeta_4)^{\alpha_4}$

Введем верхнюю полуокружность C_+ с диаметром $[\zeta_2, \zeta_5]$; ее центр $\zeta_c^{(25)}$ и радиус R есть

$$\zeta_c^{(25)} = (\zeta_2 + \zeta_5)/2, \quad R = (\zeta_2 - \zeta_5)/2. \tag{25}$$

Интегрирование будем проводить по полуокружности C_+ от точки ζ_2 к точке ζ_5, тогда переменная t и дифференциал dt в ИКШ (4) имеют вид

$$t = \zeta_c^{(25)} + Re^{i\varphi}, \quad dt = Rie^{i\varphi}d\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]. \tag{26}$$

Каждый из биномов $(t-\zeta_k)^{\alpha_k}$, $k=\{6,7,8,1\}$, участвующих в ИКШ по дуге C_+, запишем в виде

$$(t-\zeta_k)^{\alpha_k} = R^{\alpha_k} e^{i\varphi\alpha_k}\left(1-\frac{\zeta_k-\zeta_c^{(25)}}{R}e^{-i\varphi}\right)^{\alpha_k} \tag{27}$$

и последнюю скобку представим в виде сходящегося ряда

$$\left(1-\frac{\zeta_k-\zeta_c^{(25)}}{R}e^{-i\varphi}\right)^{\alpha_k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} e^{-in\varphi}, \quad a_n^{(k)} = \left(\frac{\zeta_k-\zeta_c^{(25)}}{R}\right)^n \frac{(-\alpha_k)_n}{n!}, \tag{28}$$

поскольку $\left|\zeta_k-\zeta_c^{(25)}\right|/R<1$, $k=\{6,7,8,1\}$.

Произведение четырех биномов $\prod_k (t-\zeta_k)^{\alpha_k}$, $k=\{6,7,8,1\}$, теперь запишем в виде

$$\prod_{k=\{6,7,8,1\}} (t-\zeta_k)^{\alpha_k} = R^{-1}e^{-i\varphi}\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(61)} e^{-im\varphi}, \tag{29}$$

где учтено $\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_1=-1$, а величины $A_m^{(61)}$ – коэффициенты в произведении Коши

$$\prod_{k=\{6,7,8,1\}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} e^{-in\varphi}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(61)} e^{-im\varphi}, \tag{30}$$

вычисляемые рекуррентно аналогично схеме (18).

Теперь бином $(t-\zeta_4)^{\alpha_4}$ на дуге C_+ представим в виде ряда

$$(t-\zeta_4)^{\alpha_4} = (\zeta_c^{(25)}-\zeta_4)^{\alpha_4}\left(1-\frac{R}{\zeta_4-\zeta_c^{(25)}}e^{i\varphi}\right)^{\alpha_4} = (\zeta_c^{(25)}-\zeta_4)^{\alpha_4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(4)} e^{in\varphi}, \tag{31}$$

где коэффициенты $a_n^{(4)} = \left(\dfrac{R}{\zeta_4-\zeta_c^{(25)}}\right)^n \dfrac{(-\alpha_4)_n}{n!}$.

4.2. Представление биномов $(t-\zeta_2)^{\alpha_2}$ и $(t-\zeta_5)^{\alpha_5}$ и интеграла $J_{(2,5)}$

4.2.1. На дуге C_+ бином $(t-\zeta_2)^{\alpha_2}$ с учетом параметризации (26) и (25) запишем в виде $(t-\zeta_2)^{\alpha_2} = R^{\alpha_2}(e^{i\varphi}-1)^{\alpha_2}$ и, переходя к углу $\varphi/2$, преобразуем его к виду

$$(t-\zeta_2)^{\alpha_2} = (2R)^{\alpha_2} e^{i\pi\alpha_2/2}\sin^{\alpha_2}(\varphi/2)e^{i\alpha_2\varphi/2}. \tag{32}$$

Аналогично для бинома $(t-\zeta_5)^{\alpha_5}$ имеем

$$(t-\zeta_5)^{\alpha_5} = (2R)^{\alpha_5}\cos^{\alpha_5}(\varphi/2)e^{i\alpha_5\varphi/2}. \tag{33}$$

Подставляя теперь представления (29), (32), (33) и дифференциал $dt = Rie^{i\varphi}d\varphi$ в интеграл $J_{(2,5)}$, запишем его в форме

$$J_{(2,5)} = -\mathcal{K}(\zeta_c^{(25)}-\zeta_4)^{-1/2} e^{-i\frac{\pi\beta}{2}}\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^{1-\beta}(\varphi/2)\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(61)} e^{-im\varphi}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(4)} e^{in\varphi}\right)d\varphi, \tag{34}$$

где учтены соотношения $\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_1=-1$, $\alpha_2+\alpha_5=0$.

Перемножая ряды в (34) и учитывая четность и нечетность функций $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$, записываем

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(61)} e^{-im\varphi}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(4)} e^{in\varphi}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p\cos p\varphi + i\sum_{p=0}^{\infty} S_p\sin p\varphi, \tag{35}$$

где обозначено

$$C_p = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n^{(61)}a_{n+p}^{(4)} + a_n^{(4)}A_{n+p}^{(61)}), \quad S_p = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n^{(61)}a_{n+p}^{(4)} - a_n^{(4)}A_{n+p}^{(61)}). \tag{36}$$

Проводя в (34) замену переменной $\varphi = 2\theta$ и учитывая представление (35), получаем

$$J_{(2,5)} = -2\mathcal{K}(\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{-1/2}e^{-i\frac{\pi\beta}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}(C_pI_p^{(\cos)} + iS_pI_p^{(\sin)}), \tag{37}$$

где введены интегралы

$$I_p^{(\cos)} = \int_0^{\pi/2}(\operatorname{tg}\theta)^{1-\beta}\cos(2p\theta)d\theta, \quad I_p^{(\sin)} = \int_0^{\pi/2}(\operatorname{tg}\theta)^{1-\beta}\sin(2p\theta)d\theta, \quad p = 0,1,\ldots. \tag{38}$$

4.2.2. Вычисление осциллирующих интегралов $I_p^{(\cos)}$, $I_p^{(\sin)}$. Для нахождения интегралов в (38) построим представления

$$\cos(2p\theta) = \sum_{k=0}^{p}c_k^{(p)}\cos^{2k}\theta, \quad \sin(2p\theta) = \sin\theta\sum_{k=0}^{p-1}s_k^{(p)}\cos^{2k+1}\theta. \tag{39}$$

Коэффициенты $c_k^{(p)}$ при $p = 0$ и $p = 1$ очевидно равны $c_0^{(0)} = 1$, $c_0^{(1)} = -1$, $c_1^{(1)} = 2$, а для последующих значений $p > 1$ используем равенство

$$\cos(2p\theta) = 2\cos 2\theta\cos[2(p-1)\theta] - \cos[2(p-2)\theta], \tag{40}$$

что приводит к рекуррентным соотношениям для $c_k^{(p)}, p \geq 2$:

$$c_k^{(p)} = 4c_{k-1}^{(p-1)} - 2c_k^{(p-1)} - c_k^{(p-2)}, \quad k = 0,\ldots,p, \tag{41}$$

причем $c_p^{(p-1)} = c_{p-1}^{(p-2)} = c_p^{(p-2)} = 0$. Таким образом, коэффициенты $c_k^{(p)}$ в (39) найдены.

Разложение для $\sin(2p\theta), p \geq 1$, построим с помощью дифференцирования равенства для $\cos(2p\theta)$ в (39), что дает

$$s_k^{(p)} = \frac{k+1}{p}c_{k+1}^{(p)}, \quad k = 0,\ldots,p-1. \tag{42}$$

Получив представления (39), теперь запишем интегралы $I_p^{(\cos)}$ и $I_p^{(\sin)}$ в (38):

$$I_p^{(\cos)} = \sum_{k=0}^{p}c_k^{(p)}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{1-\beta}(\cos\theta)^{\beta-1+2k}d\theta, \quad I_p^{(\sin)} = \sum_{k=0}^{p-1}s_k^{(p)}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2-\beta}(\cos\theta)^{\beta+2k}d\theta. \tag{43}$$

Значения этих интегралов выражаются явно с помощью формулы из [27]:

$$\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}, \quad x > 0, \quad y > 0, \tag{44}$$

что приводит окончательно к представлениям для $I_p^{(\cos)}$ и $I_p^{(\sin)}$:

$$I_p^{(\cos)} = \sum_{k=0}^{p}c_k^{(p)}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\beta}{2}\right)}{2k!}, \quad I_p^{(\sin)} = \sum_{k=0}^{p-1}s_k^{(p)}\frac{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\beta+1}{2}\right)}{2(k+1)!}. \tag{45}$$

Теперь интеграл $J_{(2,5)}$ в (37) можно записать в удобной форме, выделив в нем вещественную и мнимую части:

$$\operatorname{Re}(J_{(2,5)}) = -2\mathcal{K}(\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{-1/2}\left(\cos\frac{\pi\beta}{2}\sum_{p=0}^{\infty}C_pI_p^{(\cos)} + \sin\frac{\pi\beta}{2}\sum_{p=0}^{\infty}S_pI_p^{(\sin)}\right), \tag{46}$$

$$\operatorname{Im}(J_{(2,5)}) = -2\mathcal{K}(\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{-1/2}\left(\cos\frac{\pi\beta}{2}\sum_{p=0}^{\infty} S_p I_p^{(\sin)} - \sin\frac{\pi\beta}{2}\sum_{p=0}^{\infty} C_p I_p^{(\cos)}\right). \tag{47}$$

Таким образом, алгоритм вычисления интеграла $J_{(2,5)}$ построен.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА $J_{(5,6)}$ ПО ОТРЕЗКУ $[\zeta_5, \zeta_6]$

5.1. Введение кластера $\mathbb{C}l^{(71)}$ прообразов ζ_7, ζ_8, ζ_1

Три прообраза ζ_7, ζ_8, ζ_1 объединим в один кластер $\mathbb{C}l^{(71)}$ с центром $\zeta_c^{(71)}$:

$$\zeta_c^{(71)} = (\zeta_7 + \zeta_1)/2, \tag{48}$$

и на отрезке $[\zeta_5, \zeta_6]$ введем замену переменной t:

$$t = \zeta_5 + \Delta_5 u, \quad \Delta_5 = \zeta_6 - \zeta_5, \quad u \in [0,1]. \tag{49}$$

Для каждого из биномов $(t-\zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{7,8,1\}$, участвующих в ИКШ (4) по отрезку $[\zeta_5, \zeta_6]$, проведем цепочку преобразований, аналогичную (11):

$$\begin{gathered}(t-\zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_c^{(71)} + \Delta_5 u)^{\alpha_k}\left(1 - \frac{\zeta_c^{(71)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(71)} - \zeta_5 - \Delta_5 u}\right)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_c^{(71)})^{\alpha_k}(1 - q^{(71)}u)^{\alpha_k}\left(1 - \frac{p_k}{1 - q^{(71)}u}\right)^{\alpha_k}, \\ q^{(71)} = \frac{\Delta_5}{\zeta_c^{(71)} - \zeta_5}, \quad p_k = \frac{\zeta_c^{(71)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(71)} - \zeta_5},\end{gathered} \tag{50}$$

а последний множитель в (50) разложим в аналогичный (13) ряд по степеням $(1 - q^{(71)}u)^{-n}$:

$$\left(1 - \frac{p_k}{1 - q^{(71)}u}\right)^{\alpha_k} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)}(1 - q^{(71)}u)^{-n}, \quad b_n^{(k)} = \frac{p_k^n(-\alpha_k)_n}{n!}. \tag{51}$$

Скорость сходимости этого ряда будет весьма высокой, поскольку величина $p_k/(1 - q^{(71)}u)$ при $u \in [0,1]$ имеет максимум:

$$\max_{u\in[0,1]}\left|\frac{p_k}{1 - q^{(71)}u}\right| = \left|\frac{p_k}{1 - q^{(71)}}\right| = \frac{|\zeta_c^{(71)} - \zeta_k|}{\zeta_c^{(71)} - \zeta_6} < 1, \quad k = \{7,8,1\}. \tag{52}$$

Необходимое произведение биномов $\prod_k (t-\zeta_k)^{\alpha_k}$ теперь запишем в виде

$$\prod_{k=\{7,8,1\}} (t-\zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_c^{(71)})^{\beta-2}(1 - q^{(71)}u)^{\beta-2}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(71)}(1 - q^{(71)}u)^{-n}, \tag{53}$$

где учтено $\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_1 = \beta - 2$, а значения $B_n^{(71)}$ – коэффициенты в произведении Коши рядов (51) по степеням $(1 - q^{(71)}u)^{-n}$:

$$\prod_{k=\{7,8,1\}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)}(1 - q^{(71)}u)^{-n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(71)}(1 - q^{(71)}u)^{-n} \tag{54}$$

и вычисляемые рекуррентно по схеме (18).

5.2. Сведение интеграла $J_{(5,6)}$ к ряду по функциям $F(a,b;c;q^{(71)})$

5.2.1. Представление биномов $(t-\zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{4,2,5,6\}$. Биномы $(t-\zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{4,2\}$, участвующие в ИКШ (4) по отрезку $[\zeta_5, \zeta_6]$, запишем в виде

$$(t-\zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_k)^{\alpha_k}\left(1 - \frac{\Delta_5}{\zeta_k - \zeta_5}u\right)^{\alpha_k}, \quad k = \{4,2\}, \tag{55}$$

и второй множитель в (55) разложим в ряд по степеням u^n:

$$\left(1-\frac{\Delta_5}{\zeta_k-\zeta_5}u\right)^{\alpha_k}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(k)}u^n,\quad a_n^{(k)}=\left(\frac{\Delta_5}{\zeta_k-\zeta_5}\right)^n\frac{(-\alpha_k)_n}{n!},\quad k=\{4,2\}. \tag{56}$$

Произведение двух биномов $(t-\zeta_4)^{\alpha_4}(t-\zeta_2)^{\alpha_2}$ теперь запишем в виде

$$\prod_{k=\{4,2\}}(t-\zeta_k)^{\alpha_k}=(\zeta_5-\zeta_4)^{\alpha_4}(\zeta_5-\zeta_2)^{\alpha_2}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^{(42)}u^m,\quad A_m^{(42)}=\sum_{k=0}^{m}a_k^{(4)}a_{m-k}^{(2)}. \tag{57}$$

Биномы $(t-\zeta_5)^{\alpha_5}$, $(t-\zeta_6)^{\alpha_6}$ и дифференциал dt, в силу замены (49), примут вид

$$(t-\zeta_5)^{\alpha_5}=\Delta_5^{\alpha_5}u^{\alpha_5},\quad (t-\zeta_6)^{\alpha_6}=e^{i\pi\alpha_6}\Delta_5^{\alpha_6}(1-u)^{\alpha_6},\quad dt=\Delta_5 du. \tag{58}$$

5.2.2. Представление интеграла $J_{(5,6)}$ в виде двойного ряда по функциям $F(a,b;c;q^{(71)})$. Используя полученные представления (53), (57), (58), запишем интеграл $J_{(5,6)}$ в форме

$$J_{(5,6)}=e^{-i\pi\beta}\mathcal{K}P^{(56)}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(71)}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^{(42)}\int_0^1\frac{u^{\beta-1+m}(1-u)^{1-\beta}}{(1-q^{(71)}u)^{2-\beta+n}}du, \tag{59}$$

где обозначено

$$P^{(56)}=(\zeta_5-\zeta_4)^{-1/2}(\zeta_2-\zeta_5)^{1-\beta}(\zeta_c^{(71)}-\zeta_5)^{\beta-2}\Delta_5.$$

Используя теперь интегральное представление (21) для функции $F(a,b;c;q^{(71)})$, преобразуем (59) к виду

$$J_{(5,6)}=e^{-i\pi\beta}\mathcal{K}P^{(56)}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(71)}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^{(42)}\frac{\Gamma(\beta+m)\Gamma(2-\beta)}{(m+1)!}F(n+2-\beta,\beta+m;2+m;q^{(71)}). \tag{60}$$

Величина $q^{(71)}$, участвующая в качестве аргумента функций $F(.,.;.;q^{(71)})$ в этом разложении, определена в (50) и, как легко оценить, очень близка к единице (в реальных расчетах значение $(1-q^{(71)})\sim 10^{-3}$–10^{-7}). Поэтому, как и для интеграла $J_{(4,5)}$, вычисление значений $F(.,.;.;q^{(71)})$ в сумме (60) будем проводить по аналогичной (23) формуле аналитического продолжения из [27]:

$$\begin{aligned}F(n+2-\beta,\beta+m;2+m;q)&=(1-q)^{-n}\frac{\Gamma(n)\Gamma(2+m)}{\Gamma(n+2-\beta)\Gamma(m+\beta)}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(\beta+m-n)_p(2-\beta)_p}{p!(1-n)_p}(1-q)^p+\\&+(-1)^n\frac{\Gamma(2+m)}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\beta+m-n)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+2-\beta)_p(\beta+m)_p}{p!(n+p)!}[k_p-\ln(1-q)](1-q)^p,\end{aligned} \tag{61}$$

где

$$k_p=\psi(1+n+p)+\psi(1+p)-\psi(n+2-\beta+p)-\psi(\beta+m+p),$$

а при $n=0$ первая сумма в (61) исчезает.

Помимо этого соотношения для вычисления $F(.,.;.;q^{(71)})$ будем еще использовать рекурсии, аналогичные (24), по следующей схеме.

Для значений $n=0$ и $n=1$ воспользуемся формулой (61) и вычислим два массива $Y_m^{(0)}=F(2-\beta,\beta+m;2+m;q^{(71)})$ и $Y_m^{(1)}=F(3-\beta,\beta+m;2+m;q^{(71)})$, $m=0,1,\ldots,M$. Теперь для каждого фиксированного значения m применим рекурсию

$$\begin{aligned}F(n+2-\beta,\beta+m;2+m;q)&=\frac{1+m+\beta-n}{(n+1-\beta)(1-q)}F(n-\beta,\beta+m;2+m;q)+\\&+\frac{2n-2\beta-m-q(n+1-2\beta-m)}{(n+1-\beta)(1-q)}F(n+1-\beta,\beta+m;2+m;q)\end{aligned} \tag{62}$$

при увеличении номера $n = 2,3,\ldots,N$ и найдем все необходимые значения $F(n+2-\beta,\beta+m;2+m;q^{(71)})$; здесь M и N – верхние границы соответствующих разложений по m и n.

Анализ всех возможных рекуррентных соотношений для функций $F(a,b;c;q)$ показал, что при значении аргумента q, близком к единице, именно такой способ вычисления функций $F(n+2-\beta,\beta+m;2+m;q^{(71)})$ обеспечивает надежную численную устойчивость и эффективность алгоритма.

Таким образом, представление всех необходимых интегралов в виде быстросходящихся разложений построено.

Теперь для реализации эффективного итерационного процесса вычисления прообразов необходимо задание их подходящих начальных значений.

При произвольных геометрических параметрах $\mathbb{Z}$-образной области такие приближения построить весьма сложно, поэтому будем рассматривать случай больших длин L_4 и L_5 в сравнении с толщинами h_0 и H. Этот случай соответствует стремлению прообразов ζ_6, ζ_8 и ζ_1 к прообразу $\zeta_7 = 0$ и одновременно стремлению ζ_2, ζ_4 и ζ_5 к прообразу $\zeta_3 = \infty$ так, что выполнено

$$\zeta_6 \to 0, \quad \zeta_8 \to 0, \quad \zeta_1 \to 0; \quad \zeta_4 \to \infty, \quad \zeta_2 \to \infty, \quad \zeta_5 \to \infty, \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_4} \to 0, \quad \frac{\zeta_5}{\zeta_4} \to 0. \tag{63}$$

Выводу таких аппроксимаций прообразов ζ_k посвящен следующий раздел.

6. ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ

6.1. Аппроксимация интеграла $J_{(4,5)}$

В представлении (22) для интеграла $J_{(4,5)}$ в рассматриваемом случае больших длин L_4 и L_5 учтем условия (63) и оставим члены до первой степени малости $(-\zeta_4)^{-1}$. Используем определение $q^{(62)}$ из (11), что позволяет аппроксимировать (22) следующим образом:

$$J_{(4,5)} \approx -\mathcal{K}(-\zeta_4)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)} F\left(\frac{1}{2},\beta;\frac{1}{2}+\beta;q^{(62)}\right), \quad q^{(62)} \approx \frac{\zeta_5-\zeta_4}{\zeta_2/2-\zeta_4} = 1-\frac{\zeta_2/2-\zeta_5}{\zeta_2/2-\zeta_4}. \tag{64}$$

Поскольку аргумент $q^{(62)}$ здесь очень близок к единице, то для функции $F(.,.;.;q)$ используем формулу (23) продолжения в окрестность аргумента $q = 1$. Учтем при этом член первого порядка малости $(1-q)$, а также равенство $\psi(1)-\psi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2$ (см. [27]); это дает возможность преобразовать (64) к виду

$$J_{(4,5)} \approx -\mathcal{K}(-\zeta_4)^{-1/2}\left(k_0'' - \ln\frac{\zeta_2-2\zeta_5}{\zeta_2-2\zeta_4}\right), \quad k_0'' = \psi(1)+2\ln 2-\psi(\beta). \tag{65}$$

6.2. Аппроксимация интегралов, родственных $J_{(2,5)}$

В этом пункте вместо оценки интеграла $J_{(2,5)}$ более удобно аппроксимировать родственные ему два других. Из фиг. 1а следует, что $\mathrm{Im}[J_{(2,5)}] = \mathrm{Im}[J_{(3,4)}] = h_0$, а также

$$\mathrm{Im}[e^{-i\pi(2-\beta)}J_{(2,5)}] = \mathrm{Im}[e^{-i\pi(2-\beta)}\hat{J}_0] = -H, \tag{66}$$

где $J_{(3,4)}$ – интеграл ИКШ (4) по отрезку $[\zeta_3,\zeta_4]$, а $\hat{J}_0$ – ИКШ (4) по дуге $\zeta = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0,\pi]$, проходящей через прообраз $\zeta_0 = i$ центра симметрии z_0:

$$\hat{J}_0 = \mathcal{K}\int_1^{-1}\prod_k (t-\zeta_k)^{\alpha_k}\,dt. \tag{67}$$

Значение $J_{(3,4)}$ определим с помощью замены $t = \zeta_4/u$, $u \in [0,1]$, и учета соотношений (63), что дает аппроксимацию

$$\operatorname{Im}[J_{(2,5)}] = \operatorname{Im}[J_{(3,4)}] \approx \mathcal{K}\pi(-\zeta_4)^{-1/2}. \tag{68}$$

Интеграл $\hat{J}_0$ вычислим аналогично с помощью замены $t = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0,\pi]$, и учета (63):

$$\hat{J}_0 \approx \mathcal{K}\pi(-\zeta_4)^{-1/2} i e^{i\pi(1-\beta)} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2}\right)^{\beta-1}. \tag{69}$$

Из (69) следует необходимая в равенстве (66) связь

$$\operatorname{Im}[e^{-i\pi(2-\beta)} J_{(2,5)}] = \operatorname{Im}[e^{-i\pi(2-\beta)} \hat{J}_0] \approx -\mathcal{K}\pi(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2}\right)^{\beta-1}. \tag{70}$$

6.3. Аппроксимация интеграла $J_{(5,6)}$

В представлении (60) для интеграла $J_{(5,6)}$ в рассматриваемом случае больших длин L_4 и L_5 учтем соотношения (63) и оставим члены до первой степени малости ζ_4^{-1}. Тогда, используя в двойной сумме (60) лишь главное слагаемое при $n = m = 0$, получим аппроксимацию

$$J_{(5,6)} \approx e^{-i\pi\beta} \mathcal{K}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2 - \zeta_5}\right)^{\beta-1} \Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta) F(2-\beta, \beta; 2; q^{(71)}). \tag{71}$$

Поскольку значение аргумента $q^{(71)}$ здесь очень близко к единице:

$$q^{(71)} = \frac{\zeta_5 - \zeta_6}{\zeta_5 - \zeta_1/2} = 1 - \frac{\zeta_6 - \zeta_1/2}{\zeta_5 - \zeta_1/2},$$

то для функции $F(.,.;.;q^{(71)})$ используем формулу аналитического продолжения (61) в окрестность аргумента $q = 1$. Учтем при этом члены до первого порядка малости $(1 - q^{(71)})$, что дает возможность преобразовать (71) к виду

$$J_{(5,6)} \approx e^{-i\pi\beta} \mathcal{K}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2 - \zeta_5}\right)^{\beta-1} \left(k_0 - \ln\frac{2\zeta_6 - \zeta_1}{2\zeta_5 - \zeta_1}\right), \quad k_0 = 2\psi(1) - \psi(2-\beta) - \psi(\beta). \tag{72}$$

6.4. Аппроксимация прообразов ζ_1, ζ_4 *и* ζ_5

Учтем исходные условия (5), (6), (8) на геометрические параметры отображаемой $\mathbb{Z}$-образной области, что приводит к соотношениям

$$J_{(4,5)} = -L_4, \quad J_{(2,5)} = -\frac{H + h_0\cos(\pi\beta)}{\sin(\pi\beta)} + ih_0, \quad J_{(5,6)} = e^{-i\pi\beta} L_5. \tag{73}$$

Используем теперь полученные аппроксимации (65), (68), (70), (72) интегралов $J_{(4,5)}$, $J_{(2,5)}$, $J_{(5,6)}$. Это приводит к системе четырех уравнений для начальных значений прообразов и множителя $\mathcal{K}$ в итерационном процессе их высокоточного вычисления:

$$\mathcal{K}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\psi(1) + 2\ln 2 - \psi(\beta) - \ln\frac{\zeta_2 - 2\zeta_5}{\zeta_2 - 2\zeta_4}\right) \approx L_4, \tag{74}$$

$$\mathcal{K}\pi(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2}\right)^{\beta-1} \approx H, \tag{75}$$

$$\mathcal{K}\pi(-\zeta_4)^{-1/2} \approx h_0, \tag{76}$$

$$\mathcal{K}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2 - \zeta_5}\right)^{\beta-1} \left(2\psi(1) - \psi(2-\beta) - \psi(\beta) - \ln\frac{2\zeta_6 - \zeta_1}{2\zeta_5 - \zeta_1}\right) \approx L_5. \tag{77}$$

Деля соотношение (75) на (76) и выражая из него прообраз ζ_5 через ζ_2, находим

$$\zeta_5 = \mu\zeta_2, \quad \mu \approx -\left(\frac{H}{h_0}\right)^{1/(\beta-1)}. \tag{78}$$

Далее разделим соотношение (74) на (76) и используем полученное приближение (78), что дает зависимость ζ_4 от прообраза ζ_2:

$$\zeta_4 \approx \zeta_2\left[\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{8}\exp\left(\psi(\beta) - \psi(1) + \frac{\pi L_4}{h_0}\right)\right]. \tag{79}$$

Наконец разделим соотношение (77) на (76) и учтем связь (78), что позволит записать

$$\ln\frac{2\zeta_5/\zeta_1 - 1}{2\zeta_6/\zeta_1 - 1} \approx \pi\frac{L_5}{h_0}(1-\mu^{-1})^{\beta-1} + \psi(2-\beta) + \psi(\beta) - 2\psi(1). \tag{80}$$

Используем теперь равенство (2) для прообразов, т.е. $\zeta_1\zeta_5 = \zeta_2\zeta_6 = -1$, из которого следуют, с учетом (78), соотношения $\zeta_6/\zeta_1 = \zeta_5/\zeta_2 = \mu$, $\zeta_5 = -1/\zeta_1$. Подстановка этих равенств в (80) дает окончательное представление для прообраза ζ_1:

$$\zeta_1 \approx \left\{\frac{1-2\mu}{2}\exp\left[\frac{\pi L_5}{h_0}(1-\mu^{-1})^{\beta-1} + \psi(2-\beta) + \psi(\beta) - 2\psi(1)\right] - \frac{1}{2}\right\}^{-1/2}. \tag{81}$$

Тогда последовательность вычисления аппроксимаций прообразов будет следующей. Вычислим ζ_1 по (81), далее найдем $\zeta_5 = -1/\zeta_1$, затем, в силу (78), получим $\zeta_2 = \zeta_5/\mu$, после этого из (79) определим ζ_4 и, в силу связи $\zeta_8 = -1/\zeta_4$, наконец, найдем ζ_8.

Таким образом, начальные приближения для всех прообразов построены; для последующего итерационного метода обозначим их через $\zeta_k^{(0)}$.

7. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРООБРАЗОВ

Запишем систему трех уравнений относительно трех неизвестных прообразов ζ_1, ζ_2 и ζ_4. Для этого уравнение для $J_{(4,5)}$ из (73) разделим на уравнение для $\mathrm{Im}[J_{(2,5)}]$ из (73) и результат запишем в виде функции для $\Phi_1(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_4)$:

$$\Phi_1(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_4) = \frac{J_{(4,5)}}{\mathrm{Im}[J_{(2,5)}]} + \frac{L_4}{h_0} = 0. \tag{82}$$

Далее уравнение для $\mathrm{Re}[J_{(2,5)}]$ из (73) разделим на $\mathrm{Im}[J_{(2,5)}]$ и получим

$$\Phi_2(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_4) = \frac{\mathrm{Re}[J_{(2,5)}]}{\mathrm{Im}[J_{(2,5)}]} + \frac{\cos(\pi\beta) + H/h_0}{\sin(\pi\beta)} = 0. \tag{83}$$

И, наконец, уравнение для $J_{(5,6)}$ из (73) разделим на $\mathrm{Im}[J_{(2,5)}]$ и запишем

$$\Phi_3(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_4) = \frac{|J_{(5,6)}|}{\mathrm{Im}[J_{(2,5)}]} - \frac{L_5}{h_0} = 0. \tag{84}$$

В этой системе, как сказано ранее, прообразы ζ_5, ζ_6 и ζ_8 связаны с ζ_1, ζ_2 и ζ_4 формулами (2).

Решение системы (82)–(84) проводилось итерационным методом Ньютона

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^{(n)}), \tag{85}$$

где $\mathbf{x} = (\zeta_1,\zeta_2,\zeta_4)^{\mathrm{T}}$ – вектор искомых прообразов, $\mathbf{\Phi}$ – вектор-функция значений (82)–(84), а $\mathbf{A}$ – матрица частных производных $\partial\Phi_m/\partial\zeta_k$. Необходимые девять частных производных

$$\frac{\partial\Phi_m}{\partial\zeta_k}, \quad m = \{1,2,3\}, \quad k = \{1,2,4\},$$

находились по формулам конечных разностей

$$\frac{\partial\Phi_m}{\partial\zeta_k} \approx \frac{\Phi_m(.,\zeta_k+\delta_k,.) - \Phi_m(.,\zeta_k-\delta_k,.)}{2\delta_k}, \quad \delta_k = 10^{-5}\zeta_k,$$

а начальные приближения $\zeta_1^{(0)}$, $\zeta_2^{(0)}$ и $\zeta_4^{(0)}$ брались из (81) и последующей схемы нахождения остальных $\zeta_k^{(0)}$. Итерации (85) проводились до достижения относительной погрешности $\delta_\zeta = \left|(\zeta_k^{(n+1)} - \zeta_k^{(n)})/\zeta_k^{(n)}\right| \approx 10^{-20}$. В большинстве проведенных обширных расчетов для этого требовалось 7–8 итераций и лишь в некоторых редких случаях было необходимо 9–11 итераций.

Сходимость процесса (85) оказалась очень чувствительна к выбору начального приближения. Так, отклонение от полученных начальных значений (81), (78), (79) очень часто приводило к расходимости итераций, что объясняется сильной нелинейной зависимостью значений интегралов $J_{(4,5)}$, $J_{(2,5)}$, $J_{(5,6)}$ от прообразов ζ_k.

В некоторых редких случаях, когда внутренняя толщина H сильно отличалась от толщины h_0 горизонтальных полочек $\mathbb{Z}$-образного профиля (см. фиг. 1), выбор начальных значений по формулам (81), (78), (79) также не приводил к сходимости итераций (85). В этом случае процесс модифицировался в соответствии с методом продолжения по параметру (см. [29]). Геометрические характеристики β, L_4, L_5, h_0 области $\mathbb{Z}$ полагались равными нужным значениям, а толщина H выбиралась равной h_0, и итерационный процесс (85) проводился до достижения невысокой точности $\delta_\zeta \approx 10^{-4}$ прообразов ζ_k. Далее, величина H монотонно изменялась с небольшим шагом ΔH, $H_{m+1} = H_m + \Delta H$, а начальные значения прообразов $\zeta_k^{(0)}$ при этом выбирались из решения задачи для H_m. Высокая точность $\delta_\zeta \approx 10^{-20}$ вычисления прообразов ζ_k при этом требовалась лишь на последнем этапе достижения H_m необходимой величины H.

После нахождения прообразов ζ_k множитель $\mathcal{K}$ в ИКШ (4) может быть найден из любого уравнения (73); в частности, из (73) для $J_{(4,5)}$ и (22) получаем

$$\mathcal{K} = L_4\Delta_4^{1/2-\beta}(\zeta_c^{(62)} - \zeta_4)^\beta \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\left[\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(62)} F\left(m+\beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\beta; q^{(62)}\right)\right]^{-1}. \tag{86}$$

Таким образом, проблема нахождения прообразов ζ_k и множителя $\mathcal{K}$ в ИКШ (4) решена.

8. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ $f(\zeta)$

8.1. Представление $f(\zeta)$ вблизи прообразов ζ_k

Отображение $f(\zeta)$ вблизи конечных прообразов и прообраза $\zeta_3 = \infty$ имеют различную структуру, поэтому рассмотрим их отдельно.

8.1.1. Представление $f(\zeta)$ вблизи конечных прообразов. Получим разложение функции $f(\zeta)$ вблизи точек ζ_k, $k \neq 3$. В интеграле (4) все биномы $(t-\zeta_n)^{\alpha_n}$, кроме $n = k$, представим в виде

$$(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = (\zeta_k-\zeta_n)^{\alpha_n}\left(1 - \frac{t-\zeta_k}{\zeta_n-\zeta_k}\right)^{\alpha_n} = (\zeta_k-\zeta_n)^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m^{(n)}(t-\zeta_k)^m, \quad \gamma_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m}{(\zeta_n-\zeta_k)^m m!}. \tag{87}$$

Перемножая все такие разложения по указанному в (18) правилу Коши и обозначая получаемые коэффициенты через G_m, для производной $f'(t)$ искомой функции в окрестности прообраза ζ_k записываем

$$f'(t) = \mathcal{K}\prod_{n\neq k}(\zeta_k-\zeta_n)^{\alpha_n}(t-\zeta_k)^{\alpha_k}\sum_{m=0}^{\infty} G_m(t-\zeta_k)^m. \tag{88}$$

Интегрируя это разложение от ζ_k до ζ, получаем представление $f(\zeta)$ вблизи ζ_k:

$$f(\zeta) = z_k + \mathcal{K}\prod_{n\neq k}(\zeta_k - \zeta_n)^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{G_m}{m+\alpha_k+1}(\zeta-\zeta_k)^{m+\alpha_k+1}. \tag{89}$$

Этот ряд сходится в верхнем полукруге $\{\zeta : |\zeta-\zeta_k| < R_k, \operatorname{Im}\zeta \geq 0\}$, где $R_k = \min_{n\neq k}|\zeta_n - \zeta_k|$ – расстояние от ζ_k до ближайшего соседнего прообраза ζ_n.

8.1.2. Представление $f(\zeta)$ вблизи бесконечноудаленного прообраза ζ_3. Вблизи точки $\zeta_3 = \infty$ подынтегральные биномы разложим в ряды

$$(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = t^{\alpha_n}\left(1-\frac{\zeta_n}{t}\right)^{\alpha_n} = t^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m^{(n)}t^{-m}, \quad \gamma_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m\zeta_n^m}{m!}. \tag{90}$$

Перемножая все такие разложения по правилу Коши, обозначая получаемые коэффициенты через G_m и учитывая равенство $\sum_{n\neq 3}\alpha_n = -3/2$, для производной $f'(t)$ записываем представление в окрестности ζ_3

$$f'(t) = \mathcal{K}t^{-3/2}\sum_{m=0}^{\infty}G_m t^{-m}. \tag{91}$$

Интегрируя это разложение от ζ_3 до ζ, получаем разложение $f(\zeta)$ вблизи ζ_3:

$$f(\zeta) = z_3 - \mathcal{K}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{G_m}{m+1/2}\zeta^{-m-1/2}. \tag{92}$$

Этот ряд сходится во внешности полукруга радиуса R_3, т.е. $\{\zeta : |\zeta| > R_3, \operatorname{Im}\zeta \geq 0\}$, где $R_3 = \max\{\zeta_2, |\zeta_4|\}$.

8.1.3. Представление $f(\zeta)$ вблизи прообраза центра симметрии ζ_0. Вблизи точки $\zeta_0 = i$ все подынтегральные биномы разложим в ряды

$$(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = (\zeta_0-\zeta_n)^{\alpha_n}\left(1-\frac{t-\zeta_0}{\zeta_n-\zeta_0}\right)^{\alpha_n} = (\zeta_0-\zeta_n)^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m^{(n)}(t-\zeta_0)^m, \quad \gamma_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m}{(\zeta_n-\zeta_0)^m m!}. \tag{93}$$

Перемножая все такие разложения и обозначая получаемые коэффициенты через G_m, для производной $f'(t)$ в окрестности точки ζ_0 имеем

$$f'(t) = \mathcal{K}\prod_n(\zeta_0-\zeta_n)^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty}G_m(t-\zeta_0)^m. \tag{94}$$

Интегрируя это разложение от ζ_0 до ζ, получаем представление $f(\zeta)$ вблизи точки ζ_0:

$$f(\zeta) = z_0 + \mathcal{K}\prod_n(\zeta_0-\zeta_n)^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{G_m}{m+1}(\zeta-\zeta_0)^{m+1}. \tag{95}$$

Этот ряд сходится в круге $\{\zeta : |\zeta-\zeta_0| < 1\}$, поскольку на его границе лежит ближайшая к $\zeta_0 = i$ особая точка $\zeta_7 = 0$.

8.2. Представление $f(\zeta)$ в полукольце $\mathcal{R}_+$

Биномы $(t-\zeta_n)^{\alpha_n}$ для $n = \{6, 7, 8, 1\}$ разложим в ряды

$$(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = t^{\alpha_n}\left(1-\frac{\zeta_n}{t}\right)^{\alpha_n} = t^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty}u_m^{(n)}t^{-m}, \quad u_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m\zeta_n^m}{m!}, \tag{96}$$

сходящиеся вне полукруга радиуса r_*, т.е. при $\{\zeta : |\zeta| > r_*, \operatorname{Im}\zeta \geq 0\}$, где $r_* = \max\{\zeta_1, |\zeta_6|\}$. Перемножая эти разложения по правилу Кошу и обозначая коэффициенты U_m, получаем

$$\prod_{n=6,7,8,1}(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = t^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} U_m t^{-m}, \tag{97}$$

где, с учетом (3), имеем $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_1 = -1$.

Теперь биномы $(t-\zeta_n)^{\alpha_n}$ для $n = \{2,4,5\}$ разложим в ряды

$$(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = (-\zeta_n)^{\alpha_n}\left(1-\frac{t}{\zeta_n}\right)^{\alpha_n} = (-\zeta_n)^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty} v_m^{(n)} t^m, \quad v_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m}{\zeta_n^m m!}, \tag{98}$$

сходящиеся в полукруге радиуса R_*, т.е. при $\{\zeta : |\zeta| < R_*, \operatorname{Im}\zeta \geq 0\}$, где $R_* = \min\{\zeta_2, |\zeta_5|\}$. Перемножая эти разложения по правилу Коши и обозначая коэффициенты V_m, записываем

$$\prod_{n=2,4,5}(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = (-\zeta_2)^{\alpha_2}(-\zeta_4)^{\alpha_4}(-\zeta_5)^{\alpha_5}\sum_{m=0}^{\infty} V_m t^m. \tag{99}$$

Теперь для получения представления $f'(t)$ перемножим разложения (97) и (99) и найдем

$$f'(t) = \mathcal{K}(-\zeta_2)^{\alpha_2}(-\zeta_4)^{\alpha_4}(-\zeta_5)^{\alpha_5}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m t^{m-1}, \tag{100}$$

где обозначено

$$S_m = \sum_{p=0}^{\infty} U_p V_{p+m}, \quad S_{-m} = \sum_{p=0}^{\infty} V_p U_{p+m}, \quad m = 0,1,\ldots. \tag{101}$$

Интегрируя это разложение от ζ_0 до ζ, получаем представление $f(\zeta)$ в полукольце $\mathcal{R}_+$:

$$f(\zeta) = z_0 + \mathcal{K}(-\zeta_2)^{\alpha_2}(-\zeta_4)^{\alpha_4}(-\zeta_5)^{\alpha_5}\left\{S_0\ln\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{S_m}{m}(\zeta^m - \zeta_0^m) - \frac{S_{-m}}{m}(\zeta^{-m} - \zeta_0^{-m})\right]\right\}. \tag{102}$$

Этот ряд Лорана сходится в полукольце $\mathcal{R}_+$, т.е. при $\{\zeta : r_* < |\zeta| < R_*, \operatorname{Im}\zeta \geq 0\}$.

8.3. Представление $f(\zeta)$ вблизи отрезков $[\zeta_7, \zeta_8]$ и $[\zeta_3, \zeta_4]$

8.3.1. Отображение $f(\zeta)$ вблизи отрезка $[\zeta_7, \zeta_8]$. Введем следующую линейную замену переменной в ИКШ (4):

$$t = \frac{\zeta_8}{2}(u+1), \quad u = \frac{2}{\zeta_8}t - 1, \tag{103}$$

откуда, с учетом равенств $\alpha_7 = \alpha_8 = -1/2$, следует представление

$$(t-\zeta_7)^{\alpha_7}(t-\zeta_8)^{\alpha_8} = \frac{2}{\zeta_8}(u^2-1)^{-1/2}, \quad dt = \frac{\zeta_8}{2}du. \tag{104}$$

Остальные биномы $(t-\zeta_n)^{\alpha_n}$ с помощью замены (103) представим в виде

$$(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = \left(\frac{\zeta_8 - 2\zeta_n}{2}\right)^{\alpha_n}(1-p_n u)^{\alpha_n}, \quad p_n = \frac{\zeta_8}{2\zeta_n - \zeta_8}, \quad n = \{1,2,4,5,6\}, \tag{105}$$

и далее их разложим в ряды

$$(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = \left(\frac{\zeta_8 - 2\zeta_n}{2}\right)^{\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty} e_m^{(n)} u^m, \quad e_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m p_n^m}{m!}. \tag{106}$$

Перемножая эти разложения по правилу Коши и обозначая коэффициенты ряда через E_m, имеем

$$\prod_{n=1,2,4,5,6}(t-\zeta_n)^{\alpha_n} = A\sum_{m=0}^{\infty}E_m u^m, \quad A = \prod_{n=1,2,4,5,6}\left(\frac{\zeta_8-2\zeta_n}{2}\right)^{\alpha_n}. \tag{107}$$

Подставляя представления (104) и (107) в ИКШ (4), записываем для суперпозиции

$$f' \circ t(u) = \mathcal{K}A(u^2-1)^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}E_m u^m. \tag{108}$$

Интегрируя это разложение от $u=-1$ до u, и вводя специальные интегралы $I_m(u)$, получаем

$$f \circ t(u) = \mathcal{K}A\sum_{m=0}^{\infty}E_m I_m(u), \quad I_m(u) = \int_{-1}^{u}(u^2-1)^{-1/2}u^m du. \tag{109}$$

Интегралы $I_m(u)$ будем брать с помощью замены $u = \cosh v$, $v = \operatorname{arcch} u$, тогда

$$I_m(u) = \int_{\pi i}^{\operatorname{arcch} u}\cosh^m v dv, \quad m = 0,1,\ldots . \tag{110}$$

Значения $I_m(u)$ при $m=0$ и $m=1$ получаем явно:

$$I_0(u) = \operatorname{arcch} u - \pi i, \quad I_1(u) = \sqrt{u^2-1}, \tag{111}$$

а для всех последующих m находим $I_m(u)$ рекуррентно интегрированием по частям:

$$I_m(u) = \frac{\sqrt{u^2-1}}{m}u^{m-1} + \frac{m-1}{m}I_{m-2}(u), \quad m = 2,3,\ldots . \tag{112}$$

Таким образом, учитывая (109) и (103), разложение $f(\zeta)$ вблизи отрезка $[\zeta_7,\zeta_8]$ запишем в виде

$$f(\zeta) = \mathcal{K}A\sum_{m=0}^{\infty}E_m I_m(u), \quad u = \frac{2}{\zeta_8}\zeta - 1, \tag{113}$$

которое сходится в полукруге $\mathbb{U}_+$ с центром в точке $\zeta_* = \zeta_8/2$ и радиусом R_*:

$$\{\zeta : |\zeta-\zeta_*| < R_*, \operatorname{Im}\zeta \geq 0\}, \quad R_* = \min[\zeta_1-\zeta_*, \zeta_*-\zeta_6]. \tag{114}$$

8.3.2. Отображение $f(\zeta)$ вблизи отрезка $[\zeta_3,\zeta_4]$. В ИКШ (4) используем рациональную замену переменной $t=-1/w$ и учтем симметричность $\mathbb{Z}$-образной области, включающую условия (3), (2):

$$\alpha_{n+4} = \alpha_n, \quad \zeta_{n+4} = -1/\zeta_n, \quad n = 1,\ldots,4.$$

Это приводит к преобразованию подынтегрального выражения в (4) в себя же, а отрезка $[\zeta_3,\zeta_4]$ – в отрезок $[\zeta_7,\zeta_8]$. Тогда представление $f(\zeta)$ вблизи $[\zeta_3,\zeta_4]$ будет иметь вид (113) с подстановкой $u = -2/(\zeta_8\zeta)-1$, следующей из замены $t=-1/w$. Сходиться такое разложение будет во внешности полукруга

$$\left\{\zeta : \left|\frac{1}{\zeta}+\zeta_*\right| < R_*, \operatorname{Im}\zeta \geq 0\right\}, \quad R_* = \min[\zeta_1-\zeta_*, \zeta_*-\zeta_6], \quad \zeta_* = \zeta_8/2. \tag{115}$$

Построенные в этом разделе разложения искомой функции $f(\zeta)$ полностью покрывают всю полуплоскость $\mathbb{H}_+ = \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta \geq 0\}$, причем скорость сходимости в соответствующих подобластях $\mathbb{H}_+$ является экспоненциальной.

9. ОТОБРАЖЕНИЕ ОБЛАСТИ $\mathbb{Z}$ НА ПРЯМОУГОЛЬНИК Π

9.1. Отображение $w = g(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H}_+$ на прямоугольник Π

Имея отображение $z = f(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H}_+$ на область $\mathbb{Z}$, построим теперь отображение $U(z)$ области $\mathbb{Z}$ на прямоугольник Π единичной высоты и расположенный симметрично на плоскости w так, что вершины z_3, z_4, z_7, z_8 с прямыми углами перейдут в вершины w_3, w_4, w_7, w_8 прямоугольника соответственно. Его длина L_0 будет найдена в процессе построения, тогда вершины Π будут иметь координаты $w_3 = L_0/2$, $w_4 = L_0/2 + i$, $w_7 = -L_0/2 + i$, $w_8 = -L_0/2$. Такое отображение можно представить с помощью эллиптического синуса $\operatorname{sn}(w,k)$ и обратного к нему $\operatorname{sn}^{-1}(\zeta,k)$ (см. [30]). Однако далее для единообразия выкладок будем использовать аппарат функций Гаусса $F(a,b;c;z)$.

Построим отображение $w = g(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H}_+$ с уже найденным расположением прообразов ζ_k на прямоугольник Π с соответствием $w_3 = g(\zeta_3)$, $w_4 = g(\zeta_4)$, $w_7 = g(\zeta_7)$, $w_8 = g(\zeta_8)$. Функция $w = g(\zeta)$ представима интегралом

$$g(\zeta) = w_k + \mathcal{M}\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta}[(t-\zeta_4)t(t-\zeta_8)]^{-1/2}dt, \quad k = \{3,4,7,8\}, \quad \mathcal{M} > 0. \tag{116}$$

Множитель $\mathcal{M}$ и длину L_0 прямоугольника Π найдем из условий

$$\mathcal{M}\int\limits_{\zeta_7}^{\zeta_8}[(t-\zeta_4)t(t-\zeta_8)]^{-1/2}dt = -i, \tag{117}$$

$$\mathcal{M}\int\limits_{\zeta_4}^{\zeta_7}[(t-\zeta_4)t(t-\zeta_8)]^{-1/2}dt = -L_0. \tag{118}$$

В уравнении (117) введем замену $t = \zeta_8 u$ и с помощью метода из п. 3.1 с использованием представления функции $F(a,b;c;z)$ в (21) и с учетом связи $\zeta_4 = -1/\zeta_8$ преобразуем его к виду

$$\pi\mathcal{M}\sqrt{\zeta_8}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;-\zeta_8^2\right) = 1. \tag{119}$$

В уравнении (118) введем замену $t = \zeta_4(1-u)$ и аналогично предыдущему преобразуем его к виду

$$\pi\mathcal{M}\sqrt{\frac{\zeta_8}{1+\zeta_8^2}}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;(1+\zeta_8^2)^{-1}\right) = L_0. \tag{120}$$

Из уравнения (119) следует значение множителя $\mathcal{M}$, а из отношения (120) и (119) – длина L_0 прямоугольника Π:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\pi\sqrt{\zeta_8}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;-\zeta_8^2\right)}, \quad L_0 = \frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;(1+\zeta_8^2)^{-1}\right)}{\sqrt{1+\zeta_8^2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;-\zeta_8^2\right)}. \tag{121}$$

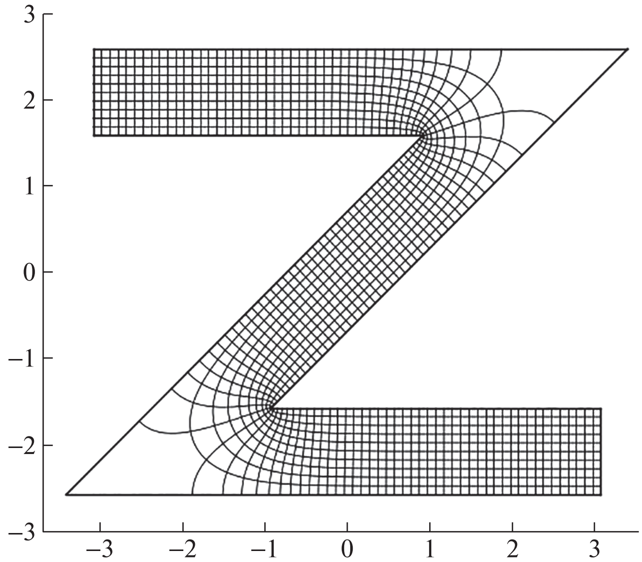
В выражении для длины L_0 функцию $F(a,b;c;z)$ в числителе представим по формуле аналитического продолжения (23), что приведет к соотношению

$$L_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{1+\zeta_8^2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n k_n\left(\frac{\zeta_8^2}{1+\zeta_8^2}\right)^n - \ln\left(\frac{\zeta_8^2}{1+\zeta_8^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{\zeta_8^2}{1+\zeta_8^2}\right)^n\right]\left[F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;-\zeta_8^2\right)\right]^{-1}, \tag{122}$$

где $a_n = \left[\left(\frac{1}{2}\right)_n/n!\right]^2$, $k_0 = 4\ln 2$, $k_n = k_{n-1} - \dfrac{2}{n(2n-1)}$.

В случае вытянутых полочек области $\mathbb{Z}$, когда прообраз $\zeta_8 \to 0$, асимптотика для длины L_0 прямоугольника принимает простой вид

$$L_0 = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\zeta_8}\right)\left(1 + O(\zeta_8^2)\right), \quad \zeta_8 \to 0. \tag{123}$$



Фиг. 2. Отображение на $\mathbb{Z}$-образную область с углом $\pi\beta$, $\beta = 1.7563918$.

9.2. Представление отображения $w = g(\zeta)$ вблизи отрезков $[\zeta_3, \zeta_4]$ и $[\zeta_7, \zeta_8]$

Вблизи отрезка $[\zeta_7, \zeta_8]$ для интеграла (116) используем разложения, аналогичные полученным в подпункте 8.3.1. Это позволяет записать $w = g(\zeta)$ в виде ряда

$$g(\zeta) = \mathcal{M}\left(\frac{2}{\zeta_8 - 2\zeta_4}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m}{m!}\left(\frac{\zeta_8}{2\zeta_4 - \zeta_8}\right)^m I_m(u), \quad u = \frac{2}{\zeta_8}\zeta - 1, \tag{124}$$

где $\mathcal{M}$ определено в (121), а функции $I_m(u)$ – в (111) и (112). Это разложение сходится в полукруге $\mathbb{U}_+$ с центром в точке $\zeta_* = \zeta_8/2$ и радиусом $R_* = \zeta_8/2 - \zeta_4$.

Вблизи отрезка $[\zeta_3, \zeta_4]$ используем разложения, аналогичные полученным в подпункте 8.3.2, что дает для $w = g(\zeta)$ представление (124), но с подстановкой $u = -2/(\zeta_8\zeta) - 1$. Этот ряд сходится во внешности полукруга

$$\left\{\zeta : \left|\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta_8}{2}\right| < R_*, \operatorname{Im}\zeta \ge 0\right\}, \quad R_* = \frac{\zeta_8}{2} - \zeta_4. \tag{125}$$

Полученные здесь два разложения целиком покрывают полуплоскость $\mathbb{H}_+$, что завершает построение функции $w = g(\zeta)$.

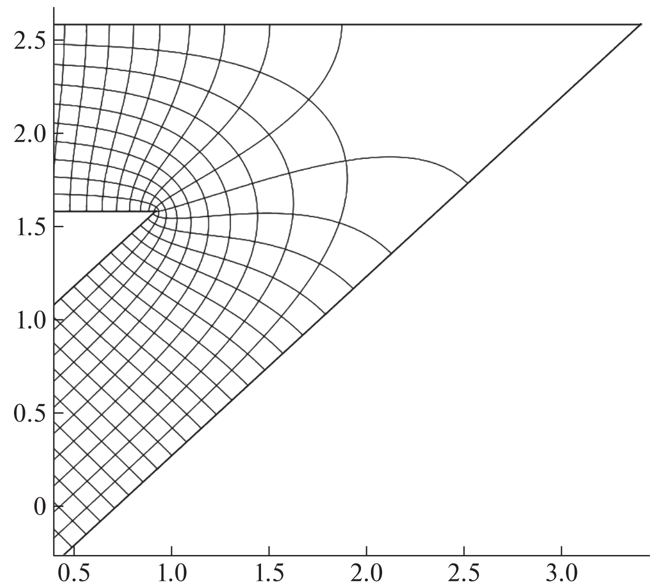
Необходимое для дальнейшего отображение прямоугольника Π на область $\mathbb{Z}$ и обратное к нему даются суперпозициями $f \circ g^{-1}(w)$ и $g \circ f^{-1}(z)$, где $g^{-1}(w)$ и $f^{-1}(z)$ – обратные к функциям $g(\zeta)$ и $f(\zeta)$.

10. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

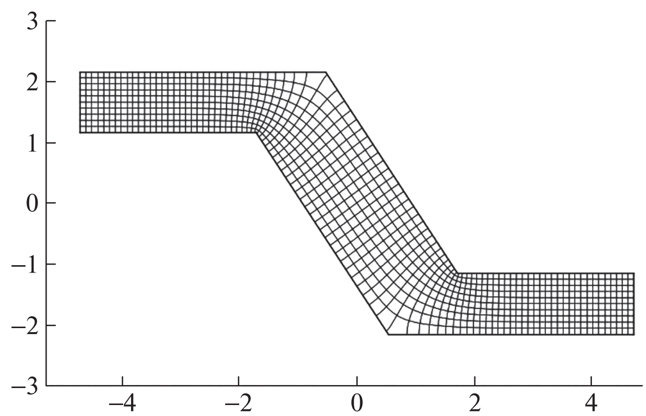
Приведем результаты вычисления параметров ИКШ для различных геометрических характеристик области $\mathbb{Z}$. Напомним здесь, что нормировка отображения $f(\zeta)$ включает условия $\zeta_7 = 0$, $\zeta_3 = \infty$ и $f(i) = z_0 = 0$, из которых вытекают еще три соотношения $\zeta_1\zeta_5 = \zeta_2\zeta_6 = \zeta_4\zeta_8 = -1$.

Размеры области $\mathbb{Z}$ выбирались такими, чтобы длина L_0 прямоугольника Π, на который отображалась $\mathbb{Z}$-образная область, была с большой точностью кратна числу $\Delta = 0.1$ – шагу квадратной декартовой сетки в прямоугольнике Π.

Ниже приведены результаты расчетов параметров ИКШ, причем даны только три прообраза $\zeta_6, \zeta_8, \zeta_1$, образующие кластер вокруг прообраза $\zeta_7 = 0$. Остальные прообразы находятся из условия $\zeta_k = -1/\zeta_{k+4}$.



Фиг. 3. Отображение на $\mathbb{Z}$-образную область при $\beta = 1.7563918$ вблизи z_1.



Фиг. 4. Отображение на $\mathbb{Z}$-образную область с углом $\pi\beta$, $\beta = 1.31$.

На фиг. 2 дана картина образа такой сетки, а размеры области $\mathbb{Z}$ были выбраны следующими: $h_0 = 1$, $H = 1$, $\beta = 1.7563918$, $L_4 = 4$, $L_5 = 6$. Вычисление прообразов ζ_k и множителя $\mathcal{K}$ дало следующее:

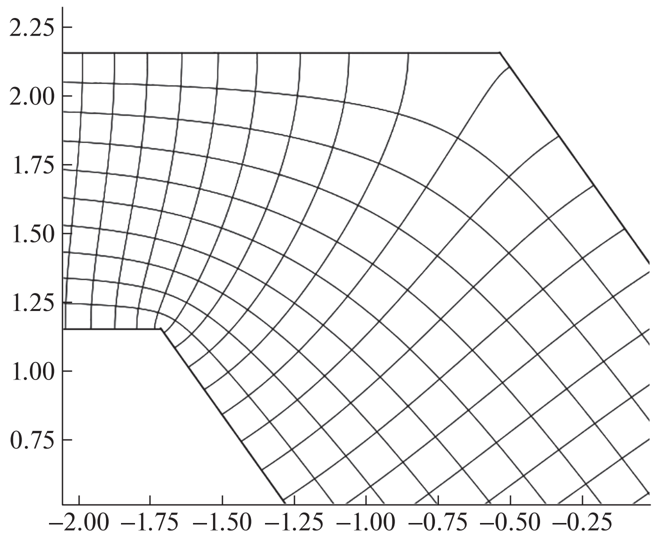
$$\zeta_6 = -1.2456995997 \times 10^{-3}, \quad \zeta_8 = 5.4153955997 \times 10^{-9},$$
$$\zeta_1 = 1.2456991666 \times 10^{-3}, \quad \mathcal{K} = 4325.5014456.$$

Полученная длина L_0 прямоугольника Π при этом составила $L_0 = 12.9999758184$.

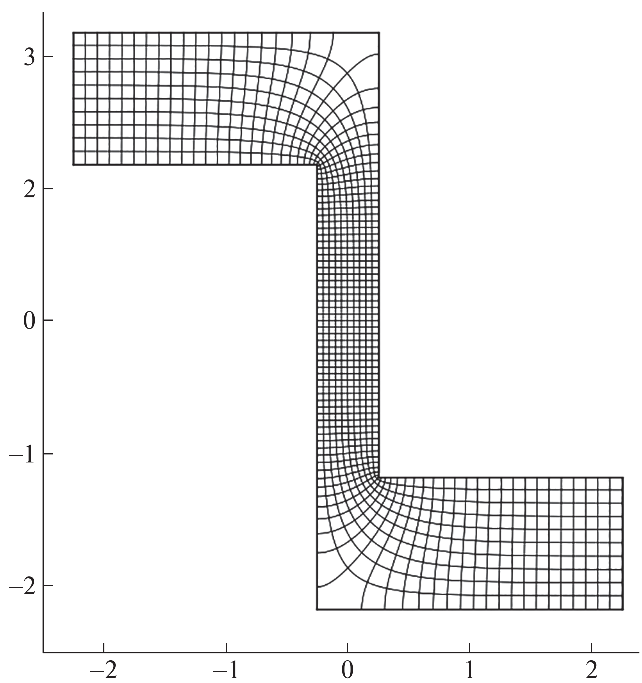
На фиг. 3 представлена эта же сетка с увеличением вблизи вершины z_1 входящего угла.

На фиг. 4 дана картина образа сетки прямоугольника Π, а параметры области $\mathbb{Z}$ были следующие: $h_0 = 1$, $H = 1.5355832266$, $\beta = 1.31$, $L_4 = 3$, $L_5 = 4$. Вычисленные параметры ИКШ таковы:

$$\zeta_6 = -3.0747586008 \times 10^{-2}, \quad \zeta_8 = 1.5469999867 \times 10^{-6},$$
$$\zeta_1 = 7.7052145553 \times 10^{-3}, \quad \mathcal{K} = 255.93039745.$$



Фиг. 5. Отображение на $\mathbb{Z}$-образную область при $\beta = 1.31$ вблизи z_1.



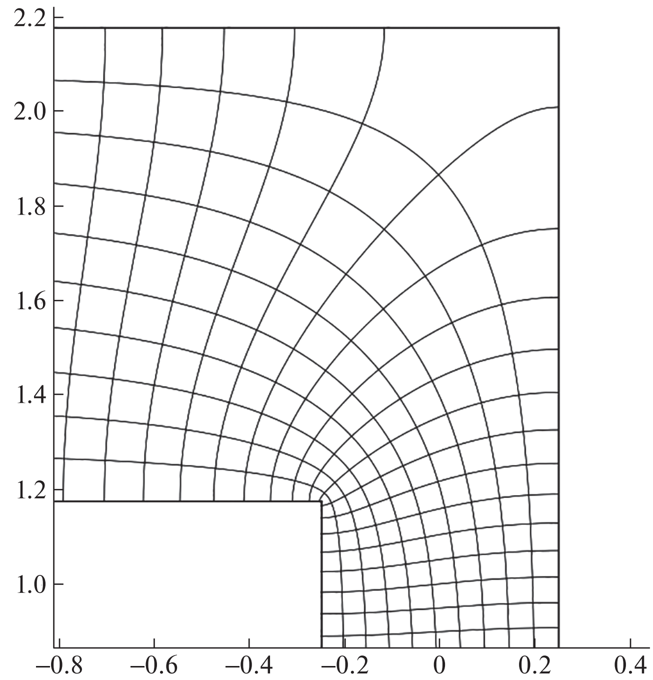
Фиг. 6. Отображение на $\mathbb{Z}$-образную область с углом $\pi\beta$, $\beta = 1.5$.

Полученная длина L_0 прямоугольника П составила $L_0 = 9.4000011995$.

На фиг. 5 представлена эта же сетка с увеличением вблизи вершины z_1.

На фиг. 6 дан образ сетки прямоугольника, а размеры области $\mathbb{Z}$ были взяты следующими: $h_0 = 1$, $H = 0.5$, $\beta = 1.5$, $L_4 = 2$, $L_5 = 3.3564632240$. Найденные параметры ИКШ были следующими:

$$\zeta_6 = -7.6003357522\times10^{-5}, \quad \zeta_8 = 6.0280691010\times10^{-7},$$
$$\zeta_1 = 3.0551837893\times10^{-4}, \quad \mathcal{K} = 410.99195216.$$



Фиг. 7. Отображение на $\mathbb{Z}$-образную область при $\beta = 1.5$ вблизи z_1.

Полученная длина L_0 прямоугольника Π составила $L_0 = 10$.

На фиг. 7 показана эта же сетка с увеличением вблизи вершины z_1.

Все представленные результаты дополнительно проверялись нахождением интеграла ИКШ по отрезкам $[\zeta_7, \zeta_8]$, $[\zeta_2, \zeta_3]$ и по дуге $\zeta = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, соответствующей переходу со стороны (z_1, z_2) на сторону (z_5, z_6). Эти интегралы находились аналогично описанным выше алгоритмам с введением соответствующих кластеров и построением быстросходящихся разложений. Сравнение полученных интегралов с длинами сторон $[z_7, z_8]$, $[z_2, z_3]$ и с толщиной H центральной части области $\mathbb{Z}$ показало требуемую относительную точность $\delta = 10^{-20}$.

Характерное время нахождения параметров ИКШ и построения показанных сеток на PC Intel Core i3 составило порядка 20 секунд.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный метод нахождения параметров ИКШ включает объединение определенных прообразов вершин ζ_k в кластер, выбор центра этого кластера, построение наиболее удобных быстросходящихся разложений соответствующих биномов в кластере и произведение таких разложений. Полученное представление позволяет свести интегрирование по отрезку $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ к ряду по гипергеометричеким функциям Гаусса $F(a, b; c; q)$, для которых используются формулы аналитического продолжения в окрестность точки $q = 1$ и численно устойчивые трехчленные рекуррентные соотношения по параметрам a, b и c.

Построенные разложения оказываются также весьма эффективными при выборе начальных приближений прообразов $\zeta_k^{(0)}$ в итерационном методе Ньютона. Использование главных членов разложений позволяет выразить $\zeta_k^{(0)}$ в явном виде через элементарные функции, а последующие 6–11 итераций обеспечивают относительную точность параметров ИКШ до $\delta = 10^{-20}$.

Ситуация кроудинга прообразов, создающая для большинства численных методов значительные трудности, в разработанном подходе является наоборот благоприятствующей, поскольку аналитическое продолжение функций $F(a,b;c;q)$ в окрестность точки $q = 1$ имеет разложение по степеням $(1-q)^n$, что обеспечивает быструю сходимость представлений.

После нахождения параметров ИКШ искомое отображение $f(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H}$ на исходную область $\mathbb{Z}$ строится в виде степенных разложений в прообразах ζ_k, регулярных разложений в точке $\zeta_0 = i$ (прообразе центра симметрии $\mathbb{Z}$), в виде ряда Лорана в полукольце $|\zeta| \in (r_*, R_*)$ и в виде специальных рядов в окрестности некоторых отрезков $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$. Полученные разложения покрывают всю полуплоскость $\mathbb{H}$ и решают задачу эффективного построения отображения $f(\zeta)$.

Разработанный метод применен к построению отображения полуплоскости на область $\mathbb{Z}$, когда возникает кроудинг четырех прообразов вблизи точки $\zeta = 0$ и кроудинг четырех прообразов вблизи $\zeta = \infty$. Развитый подход также эффективно работает в случае многоугольников с числом вершин, бóльшим восьми, и с образованием более сложного кроудинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962.
2. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. *Gaier D.* Konstructive Methoden der konformen Abbildung. Springer Tracts in Natural Philosophy. V. 3. Berlin: Springer–Verlag, 1964.
4. *Trefethen L.N.* Numerical computation of the Schwarz–Christoffel transformation // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1980. V. 1. P. 82–102.
5. *Trefethen L.N., Ed.* Numerical Conformal Mapping, Amsterdam: North-Holland, 1986.
6. *Driscoll T.A.* A MATLAB toolbox for Schwarz–Christoffel mapping // ACM Trans. Math. Soft. 1996. V. 22. P. 168–186.
7. *Henrici P.* Applied and computational complex analysis. V. 3: N.-Y.–London, Sidney, Toronto: Jonh Willey & Sons, 1991.
8. *Driscoll T.A., Trefethen L.N.* Schwarz–Christoffel mapping, Vol. 8 of Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2002.
9. *Trefethen L.N., Driscoll T.A.* Schwarz–Christoffel transformation. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
10. *Zemach C.* A conformal map formula for difficult cases // J. Comput. Appl. Math. 1986. V. 14. P. 207–215.
11. *Krikeles B.C., Rubin R.L.* On the crowding of parameters associated with Schwarz–Christoffel transformation // Appl. Math. Comput. 1988. V. 28. № 4. P. 297–308.
12. *Wegmann R.* An estimate for crowding in conformal mapping to elongated regions // Complex Variables. 1992. V. 18. P. 193–199.
13. *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана–Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 277–312.
14. *Gautschi W.* A Survey of Gauss–Christoffel quadrature formulae. Christoffel E.B. The Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences, Ed. P.L. Butzer, F. Feher, Birkhauser Basel, Basel, 1981, 72–147.
15. *Боголюбский А.И., Скороходов С.Л.* Разработка обобщенных квадратур Гаусса–Якоби с помощью методов компьютерной алгебры // Программирование. 2005. Т. 31. № 2. С. 72–80.
16. *Hale N., Townsend A.* Fast and accurate computation of Gauss–Legendre and Gauss–Jacobi quadrature nodes and weights // SIAM J. Sci. Comput. 2013. V. 35. № 2. P. A652–A674.
17. *Gil A., Segura J., Temme N.M.* Fast and reliable high-accuracy computation of Gauss–Jacobi quadrature // Numer. Algor. 2021. V. 87. P. 1391–1419. https://doi.org/10.1007/s11075-020-01012-6
18. *Wegmann R.* Methods for numerical conformal mapping. – In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, V. 2. Ed. by R. Kühnau. Amsterdam: Elsevier, 2005, p. 351–477.
19. *Papamichael N., Stylianopoulos N.S.* Numerical conformal mapping: domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. New Jersey–London–Singapore: World Scientific, 2010.
20. *Безродных С.И.* Функция Лауричеллы и конформное отображение многоугольников // Матем. заметки. 2022. Т. 112. Вып. 4. С. 500–520.
21. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и некоторые приложения // Успехи матем. наук. 2018. Т. 73. Вып. 6 (444). С. 3–94.
22. *Безродных С.И.* Формулы для вычисления функции Лауричеллы в ситуации кроудинга переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 12. С. 2054–2076.

23. *Безродных С.И.* Формулы для вычисления интегралов типа Эйлера и их приложение к задаче построения конформного отображения многоугольников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 11. С. 1763–1798.
24. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Конформное отображение L-образной области в аналитическом виде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 12. С. 1943–1980.
25. *Бабакова О.И.* О кручении стержня с Z -образным сечением // Докл. АН УССР. 1954. № 5. С. 319–323 (на укр.).
26. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.
27. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
28. *Gautschi W.* Computational aspects of three-term recurrence relations // SIAM Rev. 1967. V. 9. № 1. P. 24–82.
29. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
30. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.