
ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.612

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
С УСТОЙЧИВЫМИ РЕЖИМАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ**

© 2023 г. Л. Т. Ащепков^{1,*}

¹ 690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ, Россия

*e-mail: ashchepkov@yahoo.com

Поступила в редакцию 09.09.2022 г.
Переработанный вариант 09.09.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Предложен метод синтеза оптимального управления, обеспечивающего существование и устойчивость режимов скольжения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В методе используется вспомогательная задача оптимального управления. Решение задачи дает искомое управление в аналитической форме. Установлена устойчивость по Ляпунову тривиального решения замкнутой и доопределенной систем. Показано применение метода к линейным и квазилинейным системам уравнений. Приведен иллюстративный пример. Библ. 11. Фиг. 1.

Ключевые слова: синтез системы, оптимальное управление, достаточные условия оптимальности, скользящий режим, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0044466923050058, **EDN:** GFFXOS

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости систем автоматического регулирования возникла в XVIII веке с развитием промышленной революции и не утратила актуальности в настоящее время. Многочисленные исследования привели к созданию ряда новых научных методов и направлений. Не останавливаясь на них подробно, отметим близкую теме статьи теорию систем с переменной структурой. В ее основе лежит идея использования порождающих устойчивые режимы скольжения разрывных обратных связей (далее — *специальных управлений*). Историю развития, результаты, методологию и библиографию можно найти в публикациях [1–3]. Отдавая должное достигнутому в теории успехам, отметим, что вопрос об общем формализованном способе построения специальных управлений остается пока открытым.

В данной статье предложен метод синтеза специального оптимального управления для нелинейной системы определенного типа, использующий аналитическое решение оригинальной вспомогательной задачи оптимального управления. Построенное этим методом управление определено и непрерывно на всем фазовом пространстве системы, за исключением некоторого многообразия. Благодаря этому процедура доопределения системы на многообразии [4] упрощается и позволяет выписать уравнения скольжения в явном виде [1]. Итоговый фазовый портрет синтезированной системы состоит из участков оптимальных траекторий, попавших из начальных точек на подмножество многообразия (*область скольжения*), и участков траекторий, лежащих в области скольжения и притягивающихся к началу координат. За счет появления в решении задачи режимов скольжения достигается еще и важная в техническом отношении малая чувствительность траекторий синтезированной системы к возмущениям [1].

Приведенные в статье результаты легко обобщаются на случай эллипсоидальной области управления. Вместе с тем их распространение на области управления с негладкими границами, например, многогранники, наталкивается на серьезные технические трудности, связанные с возможным появлением режимов скольжения на пересечениях поверхностей разрыва управления. Заметим также, что вспомогательная задача оптимального управления является обратной по отношению к “единичному” управлению [5], веденному в качестве векторного аналога релейного скалярного управления.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в координатной форме

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m b_{ik}(x_1, \dots, x_n)u_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

и векторно-матричном представлении

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad (1)$$

где x, u – векторы фазового состояния и управляющих воздействий с координатами $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$ соответственно и $\dot{x} = dx/dt$. Предположим, что векторная функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ со свойством $f(0) = 0$ и матричная функция $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга $m \leq n$ в областях определения *гладкие* (достаточное число раз дифференцируемые). Кроме того, для заданной гладкой *положительно-определенной* функции $c(x)$ ($c(x) > 0, x \neq 0, c(0) = 0$) существуют гладкая скалярная функция $w(x)$ и положительные постоянные α, β , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} f(x)'w_x(x) + c(x) &= 0, \\ c(x) &\geq \alpha w(x), \quad w(x) \geq \beta \|x\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $f'w_x = f_1'w_{x_1} + \dots + f_n'w_{x_n}$ – скалярное произведение вектора f на градиент w_x функции w , штрих – знак транспонирования и $\|x\| = (x'x)^{1/2}$ – евклидова норма вектора x .

В предположениях (2) по второй теореме Ляпунова (см., например, [6, с. 17]) тривиальное решение уравнения $\dot{x} = f(x)$ равномерно асимптотически устойчиво. Непротиворечивость условий (2) в частном случае показана в разд. 5.

Требуется обеспечить устойчивость тривиального решения системы (1) с помощью специальных ограниченных управлений.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В связи со сказанным сформулируем задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (c(x(t)) + \|s(x(t))\|) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x) + B(x)u, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0, \quad \|u\| \leq 1, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где x_0 – произвольный фиксированный вектор, $x(\infty)$ – предел функции $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и

$$s(x) = B(x)'w_x(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

– гладкая векторная функция со значениями в \mathbb{R}^m . Ранг матрицы $(s_x B): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ на множестве R решений уравнения $s(x) = 0$ примем равным m .

Непрерывную кусочно-гладкую траекторию $x(t), t \geq 0$, и кусочно-непрерывное управление $u(t), t \geq 0$, назовем *процессом*, если пара $x(t), u(t)$ отвечает условиям (3), за возможным исключением целевого требования, и соответствующее значение функционала J конечно. Вспомогательная задача состоит в нахождении оптимального процесса с наименьшим значением целевого функционала.

Как видно из постановки задачи, близость траекторий $x(t)$ к началу координат и множеству R оценивается суммой неотрицательных несобственных интегралов

$$\int_0^{\infty} c(x(t)) dt, \quad \int_0^{\infty} \|s(x(t))\| dt.$$

Минимизация функционала J предполагает уменьшение интегралов, т.е. влечет асимптотическое приближение траекторий к началу координат и множеству R (устойчивость) или приближение к началу координат по множеству R (скольжение), что отвечает требуемой цели управления системой (1).

Обсудим корректность постановки задачи (3). Если $x_0 = 0$, то решение $x = 0, u = 0$ задачи очевидно. Следовательно, множество оптимальных процессов, отвечающих начальным точкам $x_0 \in \mathbb{R}^n$, не пусто.

Принятые предположения гарантируют также существование и единственность множества R . Действительно, если $m = n$, то R по определению состоит из единственной точки $x = 0$. При $m < n$ из свойств функций w, s следует $w_x(0) = 0, s(0) = 0$. Поскольку ранг матрицы $s_x(0)$ равен m , то без потери общности можно считать последние m столбцов этой матрицы линейно независимыми. Положим $y = (x_1, \dots, x_{n-m}), z = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$ и представим уравнение $s(x) = 0$ в виде $s(y, z) = 0$. По предположению, функция $s(y, z)$ гладкая по совокупности аргументов и при $y = 0, z = 0$ удовлетворяет условиям $s(0, 0) = 0, \text{rank } s_z(0, 0) = m$. Согласно теореме о неявной функции (см., например, [7, с. 299]) последние условия гарантируют существование в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ единственной гладкой функции $z = \varphi(y)$ со свойствами $0 = \varphi(0), s(y, \varphi(y)) = 0$. В силу единственности график функции $z = \varphi(y)$ и множество R в окрестности точки $(0, 0)$ совпадают. Следовательно, при $m < n$ в окрестности начала координат существует единственное множество R , представляющее собой гладкое многообразие.

4. РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Решение задачи (3) проведем в четыре этапа.

4.1. Нижняя оценка функционала

Следуя [8], представим целевой функционал на произвольном фиксированном процессе $x(t), u(t)$ в виде

$$J = \int_0^\infty (c(x(t)) + \|s(x(t))\|) dt + \int_0^\infty (w(x(t)))' dt - w(x(t)) \Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

Выполняя во втором интеграле дифференцирование по t и учитывая (3), (4), получим

$$\begin{aligned} J &= w(x_0) + \int_0^\infty (c(x(t)) + \|s(x(t))\|) dt + \int_0^\infty w_x(x(t))' (f(x(t)) + B(x(t))u(t)) dt = \\ &= w(x_0) + \int_0^\infty (\|s(x(t))\| + s(x(t))'u(t)) dt. \end{aligned}$$

Найдем нижнюю оценку функционала J . Имеем

$$J = w(x_0) + \int_0^\infty (\|s(x(t))\| + s(x(t))'u(t)) dt \geq w(x_0) + \int_0^\infty \min_{x \in \mathbb{R}^n} \min_{\|u\| \leq 1} (\|s(x)\| + s(x)'u) dt.$$

Минимизируемая на шаре $\|u\| \leq 1$ подынтегральная функция в силу неравенства Коши–Буняковского имеет точную нижнюю оценку

$$\|s(x)\| + s(x)'u \geq \|s(x)\| - \|s(x)\| \|u\| \geq 0,$$

достижимую на управлении

$$u(x) = -\frac{s(x)}{\|s(x)\|}, \quad s(x) \neq 0. \tag{5}$$

В результате нижняя оценка функционала J примет вид

$$J = w(x_0) + \int_0^\infty (\|s(x(t))\| + s(x(t))'u(t)) dt \geq w(x_0). \tag{6}$$

4.2. Структура многообразия R

Формула (5) задает непрерывное управление $u(x)$ на всем пространстве \mathbb{R}^n , кроме многообразия R . Следуя [4], доопределим на R уравнения замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u(x). \quad (7)$$

Введем обозначения

$$\dot{s}(x, u) = s_x(x)(f(x) + B(x)u) \quad (8)$$

для производной функции $s(x)$ в силу системы (1), U — для шара $\|u\| \leq 1$ и $\dot{s}(x, U)$ — для области значений производной $\dot{s}(x, u)$ на шаре U при фиксированном x . Выделим, далее, на R множества S, P , полагая

$$x \in S \Leftrightarrow (0 \in \dot{s}(x, U), s(x) = 0), \quad (9)$$

$$x \in P \Leftrightarrow (0 \notin \dot{s}(x, U), s(x) = 0). \quad (10)$$

Согласно (9) включение $x \in S$ равносильно существованию решения $v = v(x)$ уравнения $s_x(x)(f(x) + B(x)v) = 0$ и выполнению условий $v(x) \in U$, $x \in R$. Учитывая обратимость матрицы $s_x(x)B(x)$, представим эти условия в эквивалентной форме:

$$v(x) = -(s_x(x)B(x))^{-1} s_x(x)f(x), \quad \|v(x)\| \leq 1, \quad s(x) = 0. \quad (11)$$

На множестве S функция $v(x)$ непрерывна и допустима по амплитудному ограничению (3). Рассматривая $v(x)$ как продолжение управления $u(x)$ на многообразии R и следуя [4], определим на S замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) + B(x)v(x), \quad x \in S. \quad (12)$$

Из (8), (11) вытекает тождественное на S равенство $\dot{s}(x, v(x)) = 0$, поэтому исходящие из точек множества S траектории системы (12) лежат в S . Множество S будем называть *областью скольжения* и уравнения (12) — *уравнениями скольжения*.

Установим свойства множества P . В произвольной фиксированной точке $\xi \in P$ множество $\dot{s}(\xi, U) = s_x(\xi)(f(\xi) + B(\xi)U)$ выпуклое, замкнутое, ограниченное в \mathbb{R}^m и по определению (10) не содержит 0. Согласно теореме отделимости (см., например, [9, с. 25]) для множеств $\dot{s}(\xi, U)$ и 0 найдется такой зависящий от ξ ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^m$, что справедливо строгое неравенство $a's(\xi, U) > a'0 = 0$. В подробной записи в обозначении (8) имеем

$$a's_x(\xi)(f(\xi) + B(\xi)u) > 0, \quad u \in U. \quad (13)$$

По предположению, строки матрицы $s_x(\xi)$ линейно независимы, поэтому $a's_x(\xi) \neq 0$. Обозначим через M поверхность $a's(x) = 0$. Вектор a в неравенстве (13) определен с точностью до положительного множителя и $a's_x(x)$ есть градиент функции $a's(x)$, поэтому без потери общности считаем $a's_x(\xi)$ нормалью поверхности M в точке ξ . В этих терминах неравенство (13) означает положительность проекции любого вектора скорости $\dot{x} = f(\xi) + B(\xi)u$, $u \in U$, на нормаль $a's_x(\xi)$. В частности, если траектория $x(t)$ замкнутой системы (7) имеет в момент $t = \tau$ общую с поверхностью M точку $x(\tau) = \xi$, то проекции односторонних векторов скорости $\dot{x}(\tau \pm 0) = f(x(\tau)) + B(x(\tau))u(x(\tau \pm 0))$ в точке $x(\tau)$ на нормаль $a's_x(\xi)$ тоже положительны. Последнее возможно тогда и только тогда, когда траектория $x(t)$ пересекает поверхность M в точке ξ без односторонних касаний. Это значит, что односторонние векторы скорости $\dot{x}(\tau \pm 0)$ не лежат в касательной плоскости к поверхности M в точке ξ . Поскольку $P \subset M$ и ξ — произвольная точка P , то каждая траектория замкнутой системы (7), имеющая с P общую точку, пересекает P . В связи с этим множество P будем называть *областью прошивания*.

Итак, многообразие R состоит из двух взаимно дополняющих областей скольжения S и прошивания P , заданных соответственно условиями

$$\begin{aligned} \|(s_x(x)B(x))^{-1} s_x(x)f(x)\| &\leq 1, & s(x) = 0; \\ \|(s_x(x)B(x))^{-1} s_x(x)f(x)\| &> 1, & s(x) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

4.3. Оптимальный процесс

Вернемся к вопросу о точности нижней оценки (6). Обозначим через $x(t)$ определенную на полуоси $t \geq 0$ непрерывную траекторию замкнутой системы (7), (12) с начальным условием $x(0) = x_0$. Выделим на полуоси $t \geq 0$ множества T_1, T_2, T_3 , полагая

$$t \in T_1 \Leftrightarrow x(t) \notin R; \quad t \in T_2 \Leftrightarrow x(t) \in S; \quad t \in T_3 \Leftrightarrow x(t) \in P.$$

Если $t \in T_1$, то с использованием (2), (5) и (7) находим

$$(w(x(t)))^\bullet = w_x(x(t))'(f(x(t)) + B(x(t))u(x(t))) = -c(x(t)) - \|s(x(t))\| \leq -c(x(t)) \leq -\alpha w(x(t)).$$

При $t \in T_2$ в силу (2), (4) и (12) так же получим

$$(w(x(t)))^\bullet = w_x(x(t))'(f(x(t)) + B(x(t))v(x(t))) = -c(x(t)) + s(x(t))'v(x(t)) = -c(x(t)) \leq -\alpha w(x(t)).$$

Следовательно, неравенство

$$(w(x(\tau)))^\bullet \leq -\alpha w(x(\tau)), \quad \tau \geq 0, \tag{15}$$

верно на всей полуоси времени, за возможным исключением моментов $\tau \in T_3$ и момента первого попадания траектории $x(t)$ на S . Интегрируя неравенство (15) по τ в пределах от нуля до $t \geq 0$, приходим к оценке

$$w(x(t)) \leq w(x_0)e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \tag{16}$$

Из (16) следует соотношение $x(\infty) = 0$, значит, пара $x(t), u(t)$ с управлением

$$u(t) = u(x(t)), \quad t \in T_1; \quad u(t) = v(x(t)), \quad t \in T_2, \tag{17}$$

является процессом.

Покажем, что на этом процессе нижняя оценка (6) целевого функционала достигается. Действительно, подынтегральная функция в неравенстве (6) равна нулю, во-первых, в силу определений (17) и (5) управления $u(t)$ при $t \in T_1$ и, во-вторых, в силу равенства $s(x(t)) = 0$ при $t \in T_2 \cup T_3$. По построению, множества T_1, T_2, T_3 не пересекаются и в объединении составляют всю полуось $t \geq 0$, поэтому несобственный интеграл в неравенстве (6) равен нулю. В результате соотношение (6) выполняется как точное равенство и тогда процесс $x(t), u(t)$ – оптимальный.

4.4. Устойчивость синтезированной системы

Как показано в п. 4.3, каждая определенная при $t \geq 0$ оптимальная траектория $x(t)$ замкнутой системы (7), (12), исходящая в момент $t = 0$ из произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет оценке (16). При заданном $\beta > 0$ в силу свойств функции w (неотрицательности на \mathbb{R}^n , непрерывности и нулевом значении в начале координат) по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что выполняется неравенство $0 \leq w(x_0) < \beta\varepsilon^2$, если только $\|x_0\| < \delta$. Тогда с использованием (2) и (16) получим

$$\beta \|x(t)\|^2 \leq w(x(t)) \leq w(x_0)e^{-\alpha t} < \beta\varepsilon^2, \quad t \geq 0.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства $\|x(t)\| < \varepsilon$ при любых $t \geq 0, \|x_0\| < \delta$, что равносильно устойчивости по Ляпунову тривиального решения системы (7), (12).

Сформулируем общие выводы.

Теорема. Если условия задачи (3) отвечают принятым в разд. 2, 3 предположениям, то при любом x_0 решение задачи существует. Оптимальное управление (5) имеет разрыв на многообразии R , состоящем из областей скольжения S и прошивания P вида (14). Залегающие на S части оптимальных траекторий описываются уравнениями скольжения (12). Управление (11) в области скольжения непрерывное и допустимое по амплитудному ограничению (3). Тривиальное решение замкнутой системы (7), (12) устойчиво по Ляпунову. Минимум целевого функционала равен $w(x_0)$.

Теорема полностью доказана приведенными выше рассуждениями.

5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ

5.1. Линейные стационарные системы

Рассмотрим задачу (3) с функциями

$$f(x) = Ax, \quad c(x) = x'Cx, \quad w(x) = x'Wx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (18)$$

в следующих предположениях. Квадратные матрицы A , C , W порядка n постоянные, матрица A устойчивая – действительные части всех ее собственных значений отрицательные, матрица C симметричная и положительно-определенная, матрица W удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению Ляпунова

$$A'W + WA + C = 0. \quad (19)$$

Согласно [10] уравнение (19) задает симметричную положительно-определенную матрицу W однозначно.

Для функций (18) с указанными матрицами условия (2) выполняются. Действительно, в силу (19) квадратичная форма $w(x)$ обращает уравнение (2) в тождество на всем пространстве \mathbb{R}^n . Неравенства (2) верны при $\alpha = \min_{\|x\|=1} c(x)/w(x)$, $\beta = \min_{\|x\|=1} w(x)$.

Считая дополнительно матрицу $B(x) = B$ ранга m постоянной, приходим к стационарной задаче оптимального управления

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)'Cx(t) + 2\|B'Wx(t)\|) dt \rightarrow \min, \quad (20)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0, \quad \|u\| \leq 1, \quad t \geq 0,$$

отвечающей всем условиям теоремы из разд. 4. На основании теоремы задача (20) имеет решение при любых x_0 , оптимальное управление $u(x)$ задано формулой (5) с функцией $s(x) = B'Wx$, управление (11) имеет вид

$$v(x) = -(B'WB)^{-1} B'WAx, \quad s(x) = 0,$$

тривиальное решение замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu(x), \quad s(x) \neq 0; \quad \dot{x} = Ax + Bv(x), \quad s(x) = 0$$

экспоненциально устойчиво, минимум целевого функционала равен $x_0'Wx_0$.

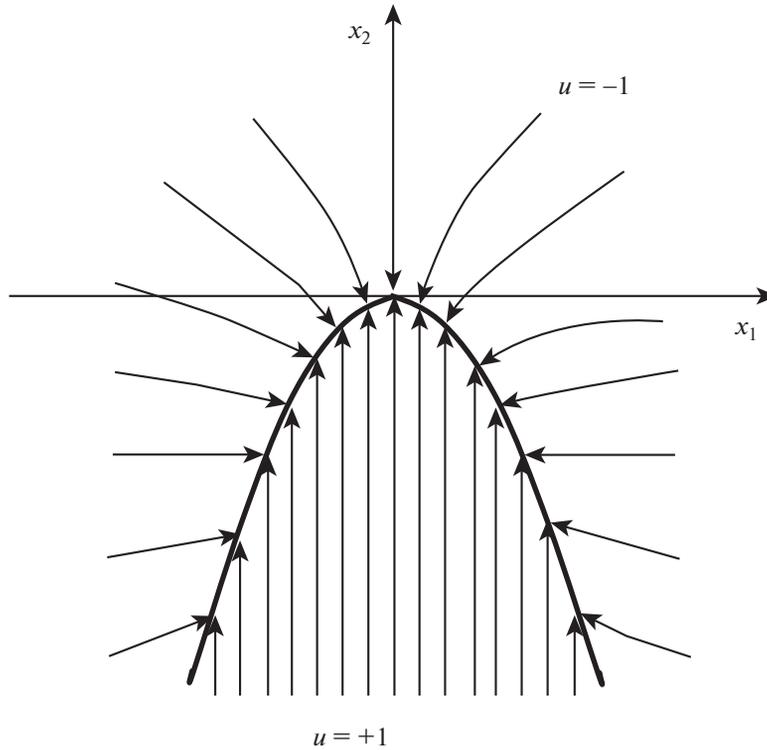
Приведенные результаты полностью совпадают с выводами [11]. Экспоненциальная устойчивость вытекает из оценки (16) и неравенства $x'Wx \leq \mu \|x\|^2$, где μ – максимум квадратичной формы $x'Wx$ на сфере $\|x\| = 1$.

5.2. Квазилинейные системы

Пусть в задаче (20) матрицы A , C , W по-прежнему отвечают предположениям п. 5.1 и переменная матрица $s_x(x)B(x)$ имеет ранг m на многообразии $s(x) = 0$ при $s(x) = B(x)'Wx$. Тогда утверждения теоремы остаются верными.

Проиллюстрируем сказанное на примере билинейной системы. Положим

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Фиг. 1. Фазовый портрет оптимальной синтезированной системы в примере. Движение фазовой точки к началу координат происходит по оси ординат или по параболе в режиме скольжения.

В соответствии с выводами теоремы находим оптимальное релейное управление $u(x_1, x_2) = -\text{sign}(x_1^2 + x_2)$, область скольжения $x_1^2 + x_2 = 0$ и уравнения скольжения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1(1 - v(x_2)), & \dot{x}_2 &= -2x_2(1 - v(x_2)), \\ v(x_2) &= x_2/(1 - 2x_2), & x_1^2 + x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Область прошивания отсутствует. Картина расположения оптимальных траекторий показана на фигуре.

Выберем малое $\varepsilon > 0$ и зафиксируем произвольную точку $\xi(\tau) = (|\tau|, -\tau^2)$, $|\tau| > \varepsilon$, области скольжения. Рассмотрим две траектории, исходящие в момент $t = 0$ из точки $\xi(\tau)$: пробную траекторию $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $t \geq 0$, исходной системы уравнений при $u = 0$ и оптимальную траекторию $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \geq 0$, описываемую уравнениями скольжения (21).

Сравним траектории $x(t), y(t)$ по переходным периодам t_1, t_2 – соответствующим моментам первого попадания на границу квадрата $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon < |\tau|$. Для пробной траектории верны тождества

$$\dot{y}_1(t)/y_1(t) \equiv -1, \quad \dot{y}_2(t)/y_2(t) \equiv -3, \quad t \geq 0, \tag{22}$$

и уравнения

$$|y_1(\theta_1)| = \varepsilon, \quad y_2(\theta_2) = -\varepsilon \tag{23}$$

имеют единственные положительные корни θ_1, θ_2 . Проинтегрируем тождества (22) по t на отрезках $[0, \theta_1]$ и $[0, \theta_2]$ соответственно с использованием начальных значений и равенств (23). Получим

$$\theta_1 = \ln(|\tau|/\varepsilon) > \theta_2 = \ln(\tau^2/\varepsilon)^{1/3}.$$

Следовательно, $t_2 = \theta_1 = \ln(|\tau|/\varepsilon)$. Таким же способом находим переходный период t_1 оптимальной траектории

$$t_1 = t_2 - \frac{1}{6} \ln \frac{1 + 3\tau^2}{1 + 3\varepsilon^2}, \quad |\tau| > \varepsilon.$$

Из полученной формулы вытекает, что для любых τ , $|\tau| > \varepsilon$, оптимальная траектория имеет меньший переходный период, чем пробная траектория, и разность $t_2 - t_1$ неограниченно возрастает с увеличением $|\tau|$. Кроме того, в силу точной нижней оценки (6) оптимальная траектория оказывается лучше пробной еще и по целевому функционалу.

В общем случае пробная траектория системы (1) (при управлении $u = 0$) оптимальна во вспомогательной задаче (3) в том и только в том случае, если полностью лежит в области скольжения. Этот вывод непосредственно следует из точной нижней оценки (6) целевого функционала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уткин В.И.* Системы с переменной структурой: состояние, проблемы, перспективы // Автоматика и телемехан. 1983. № 9. С. 5–25. *Utkin V. I.* Variable structure systems: present and future // Automat. Remote Control. 1983. V. 44. № 9. P. 1105–1120.
2. *Ferrara A., Incremona G.P., Cucuzzella M.* Advanced and optimization based sliding mode control. Philadelphia: SIAM, 2019.
3. *Steinberger M., Horn M., Fridman L.M.* Variable-structure systems and sliding-mode control. Berlin: Springer, 2020.
4. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1960. Т. 51 (93). № 1. С. 99–128.
5. *Уткин В.И., Орлов Ю.В.* Системы управления с векторным реле // Автоматика и телемехан. 2019. № 9. С. 143–155. *Utkin V.I., Orlov Yu.V.* Control systems with vector relays // Automat. Remote Control. 2019. V. 80. № 9. P. 1671–1680.
6. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
7. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.
8. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностр., 1969.
9. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986.
10. *Параев Ю.И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск: Томский ун-т, 1989.
11. *Ащепков Л.Т.* Аналитическое конструирование регулятора с амплитудным ограничением // Автоматика и телемехан. 2022. № 7. С. 49–58. *Ashchepkov L. T.* Analytical synthesis of an amplitude-constrained controller // Automat. Remote Control. 2022. V. 83. № 7. P. 1050–1058.