

ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.98

ОПТИМИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО ОТНОШЕНИЮ К ДРУГОМУ МНОЖЕСТВУ<sup>1)</sup>

© 2023 г. М. В. Балашов<sup>1,\*</sup>, Р. А. Камалов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 117997 Москва, Профсоюзная ул., 65, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Россия

\*e-mail: balashov73@mail.ru

Поступила в редакцию 02.11.2022 г.  
Переработанный вариант 21.11.2022 г.  
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматриваются задача максимально быстрого по времени выполнения включения во множество достижимости линейной управляемой автономной системы некоторого выпуклого компакта, а также задача поиска максимального времени, при котором выполнено включение множества достижимости в некоторый выпуклый компакт. При этом ищутся начальная точка и время, для которых экстремальное время в соответственной задаче реализуется. Рассмотрена дискретизация задачи на сетке единичных векторов и с помощью сведения к задаче линейного программирования получены приближенное решение задачи, а также оценки погрешности решения. Задача объединяет общая идеология, восходящая к задаче поиска чебышёвского центра. Библ. 24. Фиг. 4. Табл. 4.

**Ключевые слова:** множество достижимости, равномерная выпуклость, условие непустой внутренности, многозначный интеграл, линейное программирование, аппроксимация в метрике Хаусдорфа.

**DOI:** 10.31857/S004446692305006X, **EDN:** PJPZUE

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1. Введение

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$x' \in Ax + U, \tag{1}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклый компакт. Пусть  $M(t)$  – множество достижимости этой системы с начальным условием  $x(0) = 0$ . Напомним, что для всякого  $t \geq 0$  множество достижимости  $M(t)$  для системы (1) есть

$$M(t) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x'(s) = Ax(s) + u(s) \text{ п.в. } s \in [0, t], u(s) \in U - \text{измеримый селектор}\}. \tag{2}$$

Хорошо известно в силу результата Ляпунова о векторных мерах (см. [1], а также [2], теорема 1, гл. 2, § 2.2, что множество достижимости выпукло и замкнуто. Легко получить представление множества достижимости для случая  $x(0) = 0$  в виде интеграла

$$M(t) = \int_0^t e^{As} U ds. \tag{3}$$

Если в системе (1)  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , то множество достижимости системы (1) с начальным условием  $x(0) = x_0$  задается выражением

$$M(x(0), t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{As} U ds = e^{At} x_0 + M(t). \tag{4}$$

<sup>1)</sup>Результаты разделов 2, 3 получены М.В. Балашовым за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/> в ИПУ РАН.

Многозначный интеграл здесь и далее мы будем понимать в смысле интеграла Аумана (см. [3])

$$\int_0^t e^{As} U ds = \left\{ \int_0^t e^{As} u(s) ds : u(s) \in U - \text{измеримый селектор} \right\}.$$

Будем понимать  $M(+\infty)$  как предел в метрике Хаусдорфа интегралов

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{As} U ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} M(t),$$

если таковой существует.

Включение  $0 \in U$  обеспечивает монотонность множеств достижимости:  $M(t_1) \subset M(t_2)$  при  $t_1 \leq t_2$ . Также заметим, что в силу аддитивности интеграла Аумана получаем

$$M(t_2) = M(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds, \quad t_1 \leq t_2.$$

Отметим, что включение  $0 \in U$  является техническим. Действительно, если  $0 \notin U$ , то для произвольной точки  $u_0 \in U$ , определив  $U_0 = U - u_0$ , имеем

$$\int_0^t e^{As} U ds = \int_0^t e^{As} U_0 ds + \int_0^t e^{As} u_0 ds.$$

Сформулируем рассматриваемые задачи.

**Задача 1.** Пусть  $M_0 \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклый компакт. Мы хотим найти минимальное время  $t \geq 0$  и такую точку  $x \in \mathbb{R}^n$ , что множество  $x + M(t)$  содержит  $M_0$ . Иными словами, ищется решение задачи

$$t \rightarrow \min_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n} x + M(t) \supset M_0. \quad (5)$$

Пусть  $t = T \geq 0$  и  $x = x_0$  – решение задачи (5). Легко видеть, что если рассмотреть траектории системы  $x' \in Ax + U$  с начальным условием  $x(0) = e^{-AT} x_0$ , то  $T$  есть минимальное время, за которое в силу (4), множество  $M(e^{-AT} x_0, T) = x_0 + M(T)$  будет содержать множество  $M_0$ . Иными словами, если известно решение  $(T, x_0)$  задачи 1, то гарантируется следующее утверждение: при начальном условии  $x(0) = e^{-AT} x_0$  нам требуется время не более  $T$ , чтобы попасть траекториями системы (1) в любую точку множества  $M_0$ . При этом для любого другого начального условия  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  найдется точка множества  $M_0$ , для достижения которой при любом выборе управления  $u(t) \in U$  в системе (1) потребуется время не меньше  $T$ .

Действительно, предположим, что есть вектор начальных условий  $x(0)$  такой, что для времени  $t_0 < T$  выполнено включение  $M(x(0), t_0) = e^{At_0} x(0) + M(t_0) \supset M_0$ . Тогда для  $x = e^{At_0} x(0)$  выполнено включение  $x + M(t_0) \supset M_0$ , что противоречит минимальности  $T$  в (5).

Таким образом, задача 1 имеет смысл задачи быстрогодействия. По ее решению  $(T, x_0)$  строится начальное условие  $x(0) = e^{-AT} x_0$  для системы (1) и определяется минимальное время  $T > 0$ , в течение которого решения системы могут достичь любой точки множества  $M_0$ . Для любого другого начального условия результат по времени будет не меньше.

**Задача 2.** Другая близкая постановка к задаче (5) – задача

$$t \rightarrow \max_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n} x + M(t) \subset M_0. \quad (6)$$

Пусть  $t = T \geq 0$  и  $x = x_0$  – решение задачи (6). Легко видеть, что концы траекторий системы  $x' \in Ax + U$  с начальным условием  $x(0) = e^{-AT} x_0$  будут в момент времени  $T$  в силу (4) содержаться

во множестве  $M_0$ , т.е.  $x(T) \in M_0$  для всех решений  $x(\cdot)$ . При этом указанное время максимально возможное по всем другим начальным условиям  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  в системе (1).

Действительно, предположим, что есть вектор начальных условий  $x(0)$  такой, что для времени  $t_0 > T$  выполнено включение  $\mathcal{M}(x(0), t_0) = e^{At_0}x(0) + M(t_0) \subset M_0$ . Тогда для  $x = e^{At_0}x(0)$  выполнено включение  $x + M(t_0) \subset M_0$ , что противоречит максимальнойности  $T$  в (6).

Если  $(T, x_0)$  – решение задачи 2, то вопрос о включении  $\mathcal{M}(e^{-AT}x_0, s) = e^{A(s-T)}x_0 + M(s) \subset M_0$  для промежуточных значений  $s \in (0, T)$  должен решаться отдельно. В общем случае для некоторых  $s < T$  предыдущее включение может быть неверно (см. [4]). Приведем простейший пример системы без управления. Пусть  $e^{At} = e^{-at} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a > 0$  – малое число. Пусть  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  – вектор начальных условий,  $x, y > 0$  и  $M_0$  есть круг радиуса  $r > 0$  с центром в нуле, содержащий  $(x, y)$ . Тогда  $\|e^{At}(x, y)^T\|^2 = e^{-2at}((x+ty)^2 + y^2)$ , и при  $t = \frac{1}{a}$  значение  $\|e^{At}(x, y)^T\|^2$  имеет порядок  $e^{-2} \frac{y^2}{a^2}$  при  $a \rightarrow +0$ . Число  $e^{-2} \frac{y^2}{a^2}$  больше  $r^2$  при малых  $a > 0$ , однако решение асимптотически устойчиво и тем самым при больших  $t$  попадает в любую окрестность нуля, в частности, и в  $M_0$ .

Заметим, что для произвольного начального условия  $x(0) \in M_0$  существует решение  $x(\cdot)$  системы (1) со свойством  $x(t) \in M_0$  при всех  $t \in [0, T]$  тогда и только тогда, когда  $(Ax + U) \cap T_B(M_0, x) \neq \emptyset$  для всех  $x \in M_0$  (см. [5], гл. 4, теорема 1, утверждение 1, с. 180, где  $T_B(M_0, x)$  – верхний касательный конус ко множеству  $M_0$  в точке  $x \in M_0$ ). Результаты о локальной по времени выживаемости всех траекторий (1) во множестве  $M_0$  можно найти в [6], Theorem 1.12.

Задача 2 имеет связь с частным случаем хорошо известной линейной задачи быстрогодействия (см. [7–10], [11, гл. 2, § 7, теорема 2.20]). Пусть требуется найти оптимальное управление и минимальное время, при котором некоторая траектория системы (1) с начальным условием  $x(0) = 0$  попадет на заданное терминальное множество  $N_0$ . То есть решается задача

$$t \rightarrow \min_{t \geq 0} M(t) \cap N_0 \neq \emptyset. \quad (7)$$

Пусть также множество  $N_0$  является каверной, т.е.  $N_0$  есть замыкание множества  $\mathbb{R}^n \setminus M_0$ , где  $M_0$  – телесный выпуклый компакт. С учетом эквивалентности условий  $M(t) \cap \text{int } N_0 = \emptyset$  и  $M(t) \subset M_0$ , приходим к постановке  $t \rightarrow \max$  при условии  $M(t) \subset M_0$ . В случае  $M(t_1) \subset \text{int } M(t_2)$  при всех  $t_1 < t_2$  последняя задача эквивалентна (7). Добавив переменную  $x$ , мы получаем задачу 2. Отметим, что если в задаче 2 зафиксировать  $x = 0$ , то получится задача, эквивалентная (7) для множества  $N_0$  – каверны.

Если  $U$  в задаче (1) есть множеством помех, то решение задачи 2 дает нам максимальное время  $T$  и начальное условие  $x(0) = e^{-AT}x_0$ , гарантирующее нахождение концов всех траекторий системы при реализации любой помехи в допустимом подмножестве  $M_0$  фазового пространства в момент времени  $T$ . При этом  $T$  максимально по всем начальным условиям  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , т.е. для любого другого начального условия  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  выполнение включения  $\mathcal{M}(x(0), t) \subset M_0$  влечет  $t \leq T$ . Кроме того, для всякого  $t \in (0, T)$  начальное условие  $x(0) = e^{-At}x_0$  обеспечивает включение  $\mathcal{M}(e^{-At}x_0, t) \subset M_0$ . Действительно, с учетом (4)

$$\mathcal{M}(e^{-At}x_0, t) = e^{At}e^{-At}x_0 + M(t) \subset x_0 + M(T) \subset M_0.$$

Эти свойства имеют важное значение для различных приложений, когда все траектории системы (1) должны попасть в заданное подмножество  $M_0$  фазового пространства в заданный момент времени  $t$ .

Отличительной чертой задач 1 и 2 является оптимизация не только по времени, но и по пространственной переменной  $x$ . При этом в постановке задач 1 и 2 время и фазовая переменная разведены в разные слагаемые, что позволяет эффективно применять простые алгоритмы с вы-

пуклыми множествами для решения указанных задач. Возможны и другие постановки задач. Ниже мы будем ссылаться на задачу 1 по ссылке (5), а на задачу 2 по ссылке (6).

Заметим, что задача (5) может не иметь решения. Например, решения нет в случае, когда спектр  $\sigma(A) < 0$  и  $M(+\infty) \stackrel{*}{=} M_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x + M_0 \subset M(+\infty)\} = \emptyset$ . В свою очередь задача (6) может быть разрешима при любом  $T \geq 0$  в том смысле, что для всякого  $T \geq 0$  найдется  $x \in \mathbb{R}^n$  такой, что  $x + M(T) \subset M_0$ . Такая ситуация возможна при условии  $\sigma(A) < 0$  и  $M_0 \stackrel{*}{=} M(+\infty) \neq \emptyset$ . Ниже мы будем предполагать, что решения задач (5) и (6) существуют, строго положительны по времени и конечны.

Идея предлагаемого алгоритма состоит в дискретизации множеств  $M(t)$ ,  $M_0$ , заданных через опорные функции, на сетке единичных векторов. Кроме того, мы также будем рассматривать дискретизацию по времени  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_K = T_0$ , где параметр  $T_0 > 0$  задает максимальное время, до которого мы ищем решение.

В настоящей работе будет применяться аппроксимация множеств  $M(t)$ ,  $M_0$  с помощью опорных функций (см. детали в [12], [13]). Хорошо известно (см. [14], табл. 1), что разумная аппроксимация выпуклых компактов на сетке единичных векторов с помощью неравенств с опорной функцией реализуется в небольшой размерности:  $n \leq 5$  на современном персональном компьютере. Поэтому рассмотренные в работе алгоритмы имеют практический смысл в пространстве небольшой размерности.

Существуют также подходы к исследованию множеств достижимости со специальными множествами, например, множествами-зонотопами (см. [15]) и эллипсоидальной техникой (см. [16]). Однако аппроксимация с помощью опорных функций до сих пор является одной из наиболее распространенных.

Задача (5) очень похожа на задачу поиска чебышёвского центра множества или на более общую задачу о накрытии выпуклого компакта гомотетичным образом другого выпуклого компакта (см. [17]): для выпуклых компактов  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \in B$ , требуется решить задачу

$$t \rightarrow \min_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n} \text{ при условии } x + tB \supset A. \quad (8)$$

В [17] получены достаточные условия для единственного решения этой задачи и оценки погрешности между точным и приближенным решениями в метрике Хаусдорфа. В задаче (5) появляется еще один непрерывный параметр — время  $t$ . Поэтому здесь мы рассмотрим дискретизацию по пространственной переменной, описывая множества на языке опорных функций, и по времени. При этом мы используем идеи оценок погрешности по пространству из [17]. С помощью аналогичного подхода решается задача (6).

### 1.2. Основные обозначения и вспомогательные факты

Через  $\mathbb{R}^n$  будем обозначать вещественное евклидово пространство  $n$  измерений со скалярным произведением  $(x, y)$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $B_R(x)$  замкнутый шар с центром  $x$  радиуса  $R > 0$ .

Напомним, что суммой Минковского–Понтрягина множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  называется множество  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ , а геометрической разностью, или разностью Минковского–Понтрягина, множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  называется множество

$$A \stackrel{*}{=} B = \{x \in \mathbb{R}^n : x + B \subset A\} = \bigcap_{x \in B} (A - x).$$

Расстояние от точки  $x \in \mathbb{R}^n$  до множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  обозначим через  $\varrho_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ . Расстоянием в метрике Хаусдорфа между компактными множествами  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  называется величина

$$h(A, B) = \max \left\{ \max_{x \in A} \varrho_B(x), \max_{x \in B} \varrho_A(x) \right\}.$$

Полунормой компакта  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется число  $\|A\| = h(A, \{0\}) = \max_{a \in A} \|a\|$ .

Опорной функцией множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $p \in \mathbb{R}^n$  называется  $s(p, A) = \sup_{a \in A} (p, a)$ . Применяя теорему об отделимости, получаем, что для любого выпуклого компакта  $A$  выполняется равенство

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq s(p, A), \|p\| = 1\}.$$

Отметим, что для множества  $M(t) = \int_0^t e^{As} U ds$  легко вычислить опорную функцию при условии, что опорная функция компактного множества управлений  $U$  может быть точно вычислена аналитически, либо с помощью простого алгоритма, например, симплекс-метода, для всякого  $p \in \mathbb{R}^n$ . Тогда в силу линейности многозначного интеграла

$$s(p, M(t)) = \int_0^t s(p, e^{As} U) ds = \int_0^t s(e^{A^T s} p, U) ds. \tag{9}$$

Для выпуклого замкнутого множества  $A$  нормальным конусом в точке  $x \in A$  называется множество  $N(A, x) = \{p \in \mathbb{R}^n | (p, x - a) \geq 0 \forall a \in A\}$ . Определим также  $N_1(A, x) = N(A, x) \cap \partial B_1(0)$ . Через  $\text{co } A$ ,  $\text{cone } A$  будем обозначать соответственно выпуклую и коническую (иногда называют выпуклую коническую) оболочку множества  $A \subset \mathbb{R}^n$ . С учетом теоремы Каратеодори

$$\text{co } A = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a_k : \lambda_k \in [0, 1], \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1, a_k \in A \right\}, \quad \text{cone } A = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k : \lambda_k \geq 0, a_k \in A \right\}.$$

Обозначим через  $P_A x$  метрическую проекцию точки  $x \in \mathbb{R}^n$  на выпуклое замкнутое множество  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Для  $x, y \in \mathbb{R}^n$  определим  $(x, y) = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in (0, 1)\}$ .

Будем говорить, что выпуклое компактное множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  равномерно выпукло, если существует строго возрастающая функция  $\delta_A : [0, \text{diam } A] \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $\delta_A(0) = 0$ , модуль равномерной выпуклости, такая, что для всех  $x, y \in A$  выполнено включение  $\frac{1}{2}(x + y) + B_{\delta_A(\|x-y\|)}(0) \subset A$  (см. [18], гл. 3). Рассмотрим равномерно выпуклые множества  $A, B$  и их сумму  $C = A + B$ . Если  $c_1, c_2 \in C$ ,  $\|c_1 - c_2\| = t > 0$ , то  $c_i = a_i + b_i$ ,  $a_i \in A, b_i \in B, i = 1, 2$ . При этом либо  $\|a_1 - a_2\| \geq \frac{1}{2}t$ , либо  $\|b_1 - b_2\| \geq \frac{1}{2}t$ . Отсюда следует равномерная выпуклость суммы  $C$  с модулем

$$\delta_C(t) \geq \min \left\{ \delta_A \left( \frac{1}{2}t \right), \delta_B \left( \frac{1}{2}t \right) \right\}. \tag{10}$$

В силу теоремы Дзя–Нордлендера (см. [18, гл. 3, § 3]) максимальный модуль равномерной выпуклости среди центрально-симметричных тел диаметра  $2R$  имеет евклидов шар, для него  $\delta_{B_R(0)}(t) = R - \sqrt{R^2 - \frac{t^2}{4}} \geq \frac{t^2}{8R}$ . Отметим наконец, что в  $\mathbb{R}^n$  класс строго и равномерно выпуклых компактов совпадает. Это легко вытекает из определения модуля выпуклости и соображений компактности.

Множество  $A$  называется  $R$ -сильно выпуклым (или сильно выпуклым с радиусом  $R$ ) (см. [12], [19]), если оно может быть представлено в виде пересечения замкнутых шаров радиуса  $R$ . Легко видеть, что для сильно выпуклого множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  с радиусом  $R$  модуль выпуклости не меньше, чем для шара радиуса  $R$  при всех допустимых значениях аргумента  $t$ , т.е.  $\delta_A(t) \geq \frac{t^2}{8R}$ . Известно (см. [12], следствие 2), что для  $R_i$ -сильно выпуклых множеств  $A_i, i = 1, 2$ , множество  $A_1 + A_2$  является  $(R_1 + R_2)$ -сильно выпуклым.

Сеткой  $\mathbb{G} = \{p_i\}_{i=1}^I$  мы будем называть набор единичных векторов  $p_i$ . Будем говорить, что сетка  $\mathbb{G}$  имеет *мелкость*  $\Delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  (см. [12, определение 6], а также [20, § 2.6], [22]), если для всякого единичного вектора  $p \in \mathbb{R}^n$  существуют множество  $I_p \subset \{1, \dots, I\}$  и числа  $\alpha_i > 0, i \in I_p$ , такие, что

$$p = \sum_{i \in I_p} \alpha_i p_i, \quad \|p_i - p_j\| < \Delta \quad \forall i, j \in I_p.$$

Мы будем рассматривать внешнюю *многогранную аппроксимацию* выпуклого компактного множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  на сетке  $\mathbb{G}$  вида

$$\hat{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_i, x) \leq s(p_i, A), p_i \in \mathbb{G}\}. \quad (11)$$

**Предложение 1** (см. [23], теорема 2.2). Пусть выпуклый компакт  $A \subset \mathbb{R}^n$  является равномерно выпуклым с модулем  $\delta_A(\cdot)$ . Пусть  $\mathbb{G}$  – сетка мелкости  $\Delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  и  $\frac{\Delta}{4 - \Delta^2} < \frac{\delta_A(\text{diam} A)}{\text{diam} A}$ . Тогда

$$h(A, \hat{A}) \leq \frac{8}{7} \varepsilon(\Delta) \Delta,$$

где  $\varepsilon(\cdot)$  – решение уравнения  $\frac{\delta_A(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\Delta}{4 - \Delta^2}$ .

Если  $A$  – произвольный выпуклый компакт, то в качестве  $\varepsilon(\Delta)$  в предложении 1 нужно взять диаметр множества  $A$ .

Для сильно выпуклого множества с радиусом  $R > 0$  погрешность аппроксимации уточняется в следующем предложении.

**Предложение 2** (см. [22], замечание 1). Пусть  $R > 0$ ,  $\mathbb{G}$  – сетка мелкости  $\Delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  и  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_i, x) \leq 1, p_i \in \mathbb{G}\}$ . Тогда  $B_1(0) \subset M$  и

$$h(B_R(0), RM) \leq R \frac{\Delta^2}{1 - \frac{1}{2} \Delta^2}. \quad (12)$$

Если множество  $B \subset \mathbb{R}^n$  является  $R$ -сильно выпуклым, то погрешность аппроксимации задается такой же формулой:  $h(B, \hat{B}) \leq R \frac{\Delta^2}{1 - \frac{1}{2} \Delta^2}$ .

В силу теоремы Дзя–Нордлендера  $\varepsilon(\Delta)$  в типичных ситуациях имеет порядок  $\Delta^\alpha, \alpha \in (0, 1]$ .

Нам также понадобится один комбинаторный результат, доказанный в [17].

**Предложение 3** (см. [17], лемма 1). Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  – такие выпуклые компакты, что  $B \stackrel{*}{=} A = \{x_0\}$ . Определим  $D = (A + x_0) \cap \partial B$  и

$$P = \bigcup_{x \in D} N_1(B, x).$$

Тогда  $0 \in \text{co} P$ . Заметим, что по теореме Каратеодори  $0 \in \text{co}\{p_i\}_{i=1}^m, m \leq n + 1, p_i \in P$ .

## 2. ЗАДАЧА (5), АЛГОРИТМ И ПОГРЕШНОСТЬ

Дискретный вариант задачи (5) имеет вид

$$t_i \rightarrow \min_{i, x \in \mathbb{R}^n} x + \hat{M}(t_i) \supset \hat{M}_0, \quad (13)$$

где  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T_0$  – некоторое разбиение отрезка  $[0, T_0]$ . Для выпуклого компактного множества  $M_0$  через  $\hat{M}_0$ , как и выше, будем обозначать его сеточную аппроксимацию на сетке  $\mathbb{G}$ . Договоримся решать задачу на отрезке времени  $[0, T_0]$ . Если при выбранном  $T_0$  решение не найдено, то либо увеличиваем  $T_0$ , либо возвращаем null.

Легко видеть, что если система неравенств

$$(p_j, x) + s(p_j, M(t_i)) \geq s(p_j, M_0) \quad \forall p_j \in \mathbb{G} \tag{14}$$

несовместна, то истинное решение задачи (5)  $T > t_i$ .

Пусть  $t_k$  – минимальное время из дискретного набора, для которого система (14) совместна, а  $\hat{x}_0$  – некоторое решение системы (14).

**Лемма 1.** Пусть  $\varepsilon > 0$  выбрано так, что  $\varepsilon \geq h(\hat{M}(t_k), M(t_k))$  и  $\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$ , где  $t_k$  – минимальное время, для которого система (14) разрешима. Тогда для любого решения  $\hat{x}_0$  задачи (14) для  $i = k$  истинное решение  $T$  задачи (5) удовлетворяет включению

$$-\hat{x}_0 \in (M(T) + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} M_0. \tag{15}$$

**Доказательство.** Пусть  $\hat{x}_0$  – решение (14) для  $i = k$ . Тогда

$$-\hat{x}_0 \in \hat{M}(t_k) \overset{*}{\subset} \hat{M}_0 \subset (M(t_k) + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M_0. \tag{16}$$

Как было показано выше,  $T > t_{k-1}$ . Если  $T \in (t_{k-1}, t_k]$ , то из включения (16) получаем

$$-\hat{x}_0 \in \left( M(T) + \int_T^{t_k} e^{As} U ds + B_\varepsilon(0) \right) \overset{*}{\subset} M_0 \subset (M(T) + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} M_0. \tag{17}$$

Если  $T > t_k$ , то  $M(t_k) \subset M(T)$  и

$$-\hat{x}_0 \in (M(t_k) + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M_0 \subset (M(T) + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M_0. \tag{18}$$

Объединяя формулы (17) и (18), получаем, что в любом случае выполнена формула (15). Лемма 1 доказана.

Включение  $\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$  легко проверить. Для его справедливости надо, чтобы шаг по времени  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  удовлетворял условию  $\Delta t_k \leq \frac{\varepsilon}{\mu \|U\|}$ , где  $\mu = \max_{s \in [0, t]} \|e^{As}\|$ , а  $\|U\| = \max_{u \in U} \|u\|$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(T, x_0)$  – решение задачи (5) и  $T < +\infty$ . Пусть выполнены условия  $\varepsilon \geq h(\hat{M}(t_k), M(t_k))$  и  $\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$ , где  $t_k$  – наименьшее время из дискретного набора, при котором верно (14).

**1.** Пусть множество  $M(T)$  равномерно выпукло с модулем  $\delta_{M(T)}$ . Тогда

$$\delta_{M(T)+B_{2\varepsilon}(0)}(\|x_0 - \hat{x}_0\|) \leq 2\varepsilon.$$

Заметим, что множество  $M(T) + B_{2\varepsilon}(0)$  равномерно выпукло (см. (10)).

**2.** Определим  $D = (M_0 - x_0) \cap \partial(M(T))$  и  $P = \bigcup_{x \in D} N_1(M(T), x)$ . Пусть  $\delta > 0$  и  $B_\delta(0) \subset \text{co } P$ . Тогда  $\|x_0 - \hat{x}_0\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}$ .

**Доказательство.** Доказательство повторяет доказательство теорем 1 и 2 из [17].

Прежде всего покажем, что решение  $(T, x_0)$  единственно в условиях пунктов 1 и 2 теоремы.

Пусть множество  $M(T)$  равномерно строго выпукло. Если допустить, что есть две точки  $x_1$  и  $x_2$ , для которых  $x_i + M(T) \supset M_0$ ,  $i = 1, 2$ , то в силу строгой выпуклости  $M(T)$  выполнено включение

ние  $\frac{x_1 + x_2}{2} + \text{int } M(T) \ni x$  для всякой точки  $x \in M_0$ . В силу компактности  $M_0$  имеем  $\frac{x_1 + x_2}{2} + \text{int } M(T) \supset M_0$ . Это противоречит минимальности  $T$ .

Пункт 2 теоремы также гарантирует единственность решения  $(T, x_0)$ . Действительно, если вектор  $v \neq 0$ , то найдется вектор  $p \in P$  такой, что  $(p, v) > 0$ . От противного, если для всех  $p \in P$  верно  $(p, v) \leq 0$ , то для любой выпуклой комбинации  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i$  для любых  $p_i \in P$  выполнено  $(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i, v) \leq 0$ . Отсюда  $\sup_{p \in \text{co } P} (p, v) \leq 0$ , т.е.  $0$  – граничная точка  $\text{co } P$ . Получили противоречие с условием  $B_\delta(0) \subset \text{co } P$ . Итак, пусть  $p \in P$  и  $(p, v) > 0$ . Если  $x \in D$  и  $p \in N(M(T), x)$ , то  $(p, x + v) = (p, x) + (p, v) > s(p, M(T))$ . Таким образом, сдвиг множества  $M - x_0$  на любой вектор  $v \neq 0$  выходит из  $M(T)$ , так как  $x \in M - x_0$  и  $x + v \notin M(T)$ .

**1.** Без ограничения общности будем считать, что  $x_0 = 0$ . Фиксируем произвольное решение  $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  задачи (13), (14). По лемме 1 выполнено включение (15). Это означает, что для любого  $x \in D = M_0 \cap \partial(M(T))$  выполнено включение  $x - \hat{x}_0 \in M(T) + B_{2\varepsilon}(0)$ .

В силу предложения 3 найдутся точки  $x_i \in D$ , векторы  $p_i \in N_1(M(T), x_i)$  и числа  $\lambda_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq m \leq n + 1$  такие, что  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  и  $\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i = 0$ . Отсюда  $\sum_{i=1}^m \lambda_i (-\hat{x}_0, p_i) = 0$ . Следовательно, найдется индекс  $i \in \{1, \dots, m\}$  такой, что  $(p_i, -\hat{x}_0) \geq 0$ ,  $p_i \in N_1(M(T), x_i)$ ,  $x_i \in D$ . Зафиксируем данное  $i$  и соответствующие  $x_i, p_i$ .

Пусть  $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_i, x) \geq (p_i, x_i)\}$ . Тогда  $x_i - \hat{x}_0 \in H^+ \cap (M(T) + B_{2\varepsilon}(0)) =: S$ , причем гиперплоскость  $\partial H^+ + 2\varepsilon p_i$  опорная ко множеству  $M(T) + B_{2\varepsilon}(0)$  в точке  $x_i + 2\varepsilon p_i$ .

Итак, вписанный шар максимального радиуса во множестве  $M(T) + B_{2\varepsilon}(0)$  с центром в сегменте  $S$  имеет радиус не более  $2\varepsilon$  ( $2\varepsilon$  – расстояние между параллельными гиперплоскостями  $\partial H^+$  и  $\partial H^+ + 2\varepsilon p_i$ ). Поэтому расстояние от  $x_i$  до  $x_i - \hat{x}_0$ , т.е.  $\|\hat{x}_0\|$ , оценивается из условия  $2\varepsilon \geq \delta_{M(T)+B_{2\varepsilon}(0)}(\|\hat{x}_0 - 0\|)$ . Пункт 1 доказан.

**2.** Снова, не ограничивая общности, можно считать  $x_0 = 0$ . Фиксируем  $\tau \in (0, 1)$ . Пусть  $P_1 \subset P$  – такое конечное множество, что  $h(P, P_1) < (1 - \tau)\delta$ . Тогда  $B_{\tau\delta}(0) \subset \text{co } P_1$ .

Пусть  $L$  – грань множества  $\text{co } P_1$ ,  $L = \text{co}\{p_j\}_{j=1}^J$ ,  $p_j \in P_1$ . Заметим, что  $\text{co}(L \cup \{0\})$  есть  $n$ -мерная пирамида с боковыми ребрами длины 1, вершиной 0 и основанием  $L$ . Определим  $e = P_{\text{aff } L} 0$ ,  $\|e\| \geq \tau\delta$  ( $\text{aff } L$  – аффинная оболочка  $L$ ).

Угол  $\varphi$  между векторами  $e$  и  $p_j$  для всякого  $j = 1, \dots, J$  можно оценить как  $\cos \varphi = \frac{\|e\|}{\|p_j\|} = \|e\| \geq \tau\delta$ . Через  $\angle(a, b)$  будем обозначать угол между ненулевыми векторами  $a, b \in \mathbb{R}^n$ .

Если решение задачи (13), (14)  $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяет включению  $-\hat{x}_0 \in \text{cone}\{p_j\}_{j=1}^J = \text{cone } L$ , то найдется такой номер  $j$ ,  $1 \leq j \leq J$ , что  $\angle(-\hat{x}_0, p_j) \leq \varphi$ . Покажем это. Пусть  $w = \{-t\hat{x}_0 \mid t \geq 0\} \cap \text{aff } L$  и  $R = \sqrt{1 - \|e\|^2} = \|p_j - e\|$  для любого  $j$ . Пусть точка  $w$  – относительно внутренняя точка симплекса  $\text{co}\{p_j\}_{j=1}^m$ ,  $m \leq n$ , и  $a_j = p_j - w$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Так как  $w$  относительно внутренняя точка, то найдутся  $\lambda_j > 0$ ,  $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ , для которых  $\sum_{j=1}^m \lambda_j p_j = w$  или  $\sum_{j=1}^m \lambda_j a_j = 0$ . Отсюда  $\sum_{j=1}^m \lambda_j (a_j, w) = 0$  и, значит, найдется номер  $j$ , для которого  $(a_j, w) \geq 0$ .

Для этого номера  $j$  в треугольнике  $p_i 0w$   $\angle(p_i - w, -w) \geq \frac{1}{2}\pi$  и тем самым  $\|p_i - w\|^2 + \|e\|^2 \leq \|p_i - w\|^2 + \|w\|^2 \leq 1$ , т.е.  $r = \|p_i - w\| \leq R$ .

По теореме косинусов из треугольника  $p_i 0w$  косинус угла  $\gamma = \angle(-\hat{x}_0, p_i) = \angle(w, p_i)$  равен

$$\cos \gamma = \frac{1 + \|w\|^2 - r^2}{2\|w\|} \geq \frac{1 + \|w\|^2 - R^2}{2\|w\|} = \frac{\|w\|^2 + \|e\|^2}{2\|w\|} \geq \|e\| = \cos \varphi.$$

Итак,  $\angle(-\hat{x}_0, p_i) \leq \varphi$ .

Рассмотрим соответствующую точку  $x_i \in D = M_0 \cap \partial(M(T))$ , для которой  $p_i \in N_1(M(T), x_i)$ . Для краткости обозначим  $z_0 = x_i$ ,  $p_0 = p_i$ .

Пусть  $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_0, x - z_0) \geq 0\}$ . В силу формулы (15) точка  $z_0 - \hat{x}_0$  лежит между плоскостями  $\partial H^+$  и  $\partial H^+ + 2\epsilon p_0$ , и угол между  $-\hat{x}_0$  и  $p_0$  не более  $\varphi$ . Отсюда

$$\|\hat{x}_0\| \leq \frac{2\epsilon}{\cos \angle(-\hat{x}_0, p_0)} \leq \frac{2\epsilon}{\cos \varphi} \leq \frac{2\epsilon}{\tau\delta}.$$

Устремляя  $\tau \rightarrow 1 - 0$ , получаем утверждение теоремы. В заключение отметим, что условие непустой внутренности  $B_\delta(0) \subset \text{co } P$  в п. 2 теоремы является ключевым. Именно оно гарантирует выполнение линейной оценки по  $\epsilon$  в п. 2. Теорема доказана.

Опорную функцию множества достижимости  $M(t)$  для любого единичного вектора  $p \in \mathbb{R}^n$  легко вычислить по формуле (9). Если  $U$  – любое компактное множество, для которого точно вычисляется опорная функция  $s(p, U)$ , то функция  $s(p, e^{As}U) = s(e^{A^T s} p, U)$  точно вычисляется для каждого  $s$  и является липшицевой по  $s$ . Поэтому проблем с ее интегрированием по отрезку  $[0, t]$  не возникает. В частности, в рассмотренных ниже примерах погрешность вычисления соответствующего интеграла может быть сделана сколь угодно малой.

**Замечание 1.** Напомним, что во введении мы предположили, что решение задачи (5) существует и реализуется за конечное время. Достаточно, чтобы нашлось  $t > 0$ , для которого  $M(t) \stackrel{*}{=} M_0 \neq \emptyset$ .

Для строгой=равномерной выпуклости  $M(T)$  достаточно, чтобы множество  $U$  удовлетворяло условию: для любого единичного вектора  $p \in \mathbb{R}^n$  опорное подмножество  $(e^{As}U)(p)$  одноточечно для п.в.  $s \in [0, T]$ . При этом опорное множество  $M(T)(p) = \int_0^T (e^{As}U)(p) ds$  одноточечно для любого  $\|p\| = 1$ , и, значит, множество  $M(T)$  строго выпукло. При этом множество  $M(T)$  не обязательно сильно выпукло. Например, для системы с нулевой динамикой  $x' \in 0 \cdot x + U = U$ ,  $x(0) = 0$ ,  $U$  – строго, но не сильно выпуклый компакт (например,  $U$  – шар  $\ell_\alpha^n$ -нормы при  $\alpha > 2$ ).

Вопрос о модуле равномерной выпуклости  $M(T)$  для конкретных матриц  $A$  и множеств  $U$  должен решаться отдельно и в настоящей работе не рассматривается. Отметим, что если  $M(T)$  сильно выпукло с радиусом  $R$ , оценка  $\|x_0 - \hat{x}_0\|$  в п. 1 имеет порядок  $\sqrt{(R + \epsilon)\epsilon} \asymp R\Delta$  по радиусу и мелкости сетки.

Заметим, что и для нестрого выпуклого множества  $U$  (например, отрезка) множество  $M(T)$  может быть строго-равномерно, но не сильно выпуклым. Соответствующий пример будет рассмотрен в приложении 2.

В п. 2 теоремы 1 требуется выполнение включения  $B_\delta(0) \subset \text{co } P$ , которое априори бывает трудно проверить. Тем не менее, если из каких-то соображений это включение установлено, то, как показано в примерах, возможно оценить погрешность алгоритма. Иногда проверить указанное условие можно после решения на сетке задачи-аппроксимации. Ниже приводится такой пример.

**Пример 1.** Рассмотрим пример, в котором обсудим ряд условий, позволяющих установить включение  $0 \in \text{int co } P$  в теореме 1 по решению задачи (13). Пусть  $D = \{d_i\}_{i=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n$  и  $M_0 = \text{co } D$  –

полноразмерный симплекс. Допустим, что сетка  $\mathbb{G}$  выбирается так, что  $\hat{M}_0 = M_0$ . Предположим, что некоторое решение  $\hat{x}_0, t_k$  задачи (13) удовлетворяет условиям  $\hat{x}_0 = 0, M_0 \cap \partial \hat{M}(t_k) = D$ . Предположим, что внутренность  $M(t_k)$  содержит шар радиуса  $r > 0$  и  $r > 10\epsilon$ . Потребуем строгую выпуклость  $M(T)$ .

Определим грани  $S_i = \text{co}(D \setminus \{d_i\})$  для всех  $1 \leq i \leq n + 1$ .

Тогда в обозначениях теоремы 1 по лемме 1

$$\hat{M}(t_k) \subset M(t_k) + B_\epsilon(0) \subset M(T) + B_{2\epsilon}(0), \quad M'_k := \hat{M}(t_k) \overset{*}{\subset} B_{2\epsilon}(0) \subset M(T). \tag{19}$$

Предположим, что для каждого  $i$  найдется вектор  $v_i \neq 0$  такой, что  $S_i + v_i \subset M'_k \overset{*}{\subset} B_{2\epsilon}(0)$ . Последнее условие означает, что сетка  $\mathbb{G}$  имеет достаточно малую мелкость, а симплекс  $M_0$  имеет ребра меньшие, чем характерный размер  $M'_k$ . Отметим, что проверка существования векторов  $v_i$  сводится к нахождению ненулевых векторов  $v = v_i$ , удовлетворяющих системе линейных неравенств  $s(p, S_i) + (p, v) + 4\epsilon \|p\| \leq s(p, \hat{M}(t_k))$  для всех  $p \in \mathbb{G}$  и может быть решена с помощью линейного программирования. Покажем, что если требуемые векторы  $v_i$  существуют, то  $(x + M_0) \cap \partial M(T) = D$  для некоторого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Действительно, найдется вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  такой, что выполнено включение  $x + M_0 \subset M(T)$ , а значит, для всякого  $i$  имеют место включения  $x + S_i \subset M(T), S_i + v_i \subset M'_k \overset{*}{\subset} B_{2\epsilon}(0) \subset M(T) \overset{*}{\subset} B_{2\epsilon}(0) \subset \text{int } M(T)$ . При этом, в силу непрерывности операции сложения векторов, можно выбрать  $v_i \neq x$  и сохранить включение  $S_i + v_i \subset M'_k \overset{*}{\subset} B_{2\epsilon}(0) \subset \text{int } M(T)$ . Следовательно,  $S_i + (x, v_i] \subset \text{int } M(T)$  для всех  $1 \leq i \leq n + 1$ . Если для некоторого  $i$  точка  $x + d_i$  является внутренней для множества  $M(T)$ , то найдется  $\lambda \in (0, 1)$  такое, что  $(S_i + \lambda v_i + (1 - \lambda)x) \cup (d_i + \lambda v_i + (1 - \lambda)x) \subset \text{int } M(T)$ . Это противоречит минимальности  $T$ . Утверждение  $(x + M_0) \cap \partial M(T) = D$  доказано. Также из строгой выпуклости  $M(T)$  и замечания 1 вытекает, что  $M(T) \overset{*}{\subset} M_0 = \{x\}$ . Далее можно считать  $x = 0$ , заменив  $M_0$  на  $M_0 + x$ .

Проанализируем множество  $P = \bigcup_{1 \leq i \leq n+1} N_1(M(T), d_i)$  и установим выполнение условия  $0 \in \text{int } \text{co } P$ .

В силу предложения 3  $0 \in \text{co } P$ . Предположим, что  $0 \in \partial \text{co } P$ . Тогда по теореме Каратеодори найдутся  $n$  векторов  $p_i \in N_1(M(T), d_i)$  (без ограничения общности с номерами  $1 \leq i \leq n$ ) таких, что  $0 \in \text{co}\{p_i\}_{i=1}^n$ . Рассмотрим  $S_{n+1}$ . Как показано выше, это множество можно сдвинуть на вектор  $v = v_{n+1} \neq 0: S_{n+1} + v \subset \text{int } M(T)$ . Значит,  $S_{n+1} + (0, v] \subset \text{int } M(T)$ . Так как для всякого  $1 \leq i \leq n$  точка  $d_i + v \in \text{int } M(T)$ , то  $(p_i, v) < 0$ . Тем самым для любой нетривиальной выпуклой комбинации  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$  векторов  $\{p_i\}_{i=1}^n$  (где  $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ) имеем  $(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i, v) < 0$ . Значит, выпуклая комбинация  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$  не может равняться нулю. Противоречие показывает, что  $0 \in \text{int } \text{co } P$ .

Оценим теперь  $|T - t_k|$ . С одной стороны,  $T > t_{k-1}$ . Для оценки  $T$  сверху предположим, что  $T > t_k$ . Тогда

$$\emptyset \neq M(T) \overset{*}{\subset} M_0 = \left( M(t_k) + \int_{t_k}^T e^{As} U ds \right) \overset{*}{\subset} M_0,$$

причем  $T$  минимально возможное. По формуле (16)  $(M(t_k) + B_\epsilon(0)) \overset{*}{\subset} M_0 \neq \emptyset$ , откуда  $T \leq \tau$ , где  $\tau > t_k$  – минимально возможное число, для которого

$$\int_{t_k}^{\tau} e^{As} U ds \supset B_\epsilon(0). \tag{20}$$

Условие (20) достаточно трудно для проверки и, в частности, оно может не выполняться. В реальных задачах это условие может проверяться численно. В случае  $0 \in \text{int } U$  можно дать оценку сверху на  $T$  через  $\varepsilon$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\mu = \min_{\|h\|=1, t \in [0, T_0]} \|e^{At} h\|$  и  $B_d(0) \subset U$  для некоторого  $d > 0$ . Тогда если  $t_k + \frac{\varepsilon}{\mu d} \leq T_0$ , то

$$t_{k-1} < T \leq t_k + \frac{\varepsilon}{\mu d}.$$

**Доказательство.** Из определения  $\mu$  получаем

$$\int_{t_k}^{\tau} e^{As} U ds \supset \int_{t_k}^{\tau} \mu B_d(0) ds = (\tau - t_k) \mu d \cdot B_1(0).$$

Поэтому  $(\tau - t_k) \mu d \leq \varepsilon$  и  $T \leq \tau \leq t_k + \frac{\varepsilon}{\mu d}$ .

Некоторые оценки типа (20) для плоского случая содержатся в приложении 1.

### 3. ЗАДАЧА (6), АЛГОРИТМ И ПОГРЕШНОСТЬ. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим теперь задачу (6). Напомним, что мы ищем решение  $t$  на отрезке  $[0, T_0]$ . Дискретный вариант задачи (6) имеет вид

$$t_i \rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}^n} x + \hat{M}(t_i) \subset \hat{M}_0, \tag{21}$$

все обозначения имеют тот же смысл, что и в разд. 2. Включение  $x + \hat{M}(t_i) \subset \hat{M}_0$  имеет вид системы

$$(p_j, x) + s(p_j, M(t_i)) \leq s(p_j, M_0) \quad \forall p_j \in \mathbb{G}. \tag{22}$$

**Лемма 3.** Пусть  $t_k$  – решение (21), и  $\hat{x}_0$  – некоторое решение системы (22). Определим  $\varepsilon > 0$  так, что  $\varepsilon \geq h(M_0, \hat{M}_0)$  и  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$ . Тогда для  $i = k$  и для истинного решения  $T$  задачи (6) выполнено включение

$$\hat{x}_0 \in (M_0 + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} M(T). \tag{23}$$

**Доказательство.** Пусть  $\hat{x}_0$  – решение (21) для  $i = k$ . С учетом равенства  $M(t_{k+1}) = M(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{As} U ds \subset M(t_k) + B_\varepsilon(0)$  имеем

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 \in \hat{M}_0 \overset{*}{\subset} \hat{M}(t_k) &\subset (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M(t_k) = \\ &= (M_0 + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} (M(t_k) + B_\varepsilon(0)) \subset (M_0 + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} M(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Легко видеть, что если  $\hat{M}_0 \overset{*}{\subset} \hat{M}(t_i) = \emptyset$ , то и  $M_0 \overset{*}{\subset} M(t_i) = \emptyset$ . Отсюда  $M_0 \overset{*}{\subset} M(t_{k+1}) = \emptyset$  и тем самым  $T < t_{k+1}$ . Следовательно,  $M(T) \subset M(t_{k+1})$  и выполнено включение (23).

Используя формулу (23), получаем аналогично разд. 2 следующий результат относительно погрешности  $\|x_0 - \hat{x}_0\|$  при условии, что  $t_k$  – решение (21).

**Теорема 2.** Пусть  $(T, x_0)$  – решение задачи (6) и  $T < +\infty$ . Пусть  $\varepsilon \geq h(M_0, \hat{M}_0)$  и  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$ , где  $t_k$  – наибольшее время из дискретного набора, при котором верно (22).

1. Пусть множество  $M_0$  равномерно выпуклое с модулем  $\delta_{M_0}$ . Тогда

$$\delta_{M_0 + B_{2\varepsilon}(0)}(\|x_0 - \hat{x}_0\|) \leq 2\varepsilon.$$

2. Определим  $D = (M(T) + x_0) \cap \partial M_0$  и  $P = \bigcup_{x \in D} N_1(M_0, x)$ . Пусть  $\delta > 0$  и  $B_\delta(0) \subset \text{co } P$ . Тогда  $\|x_0 - \hat{x}_0\| \leq 2\varepsilon/\delta$ .

**Замечание 2.** Как и в теореме 1, решение  $(T, x_0)$  единственно. Замечание, аналогичное замечанию 1, имеет место и для теоремы 2.

Предположим,  $T < t_k$ . Тогда из включения

$$\hat{x}_0 \in (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M(t_k) = (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M(T) \overset{*}{\subset} \int_T^{t_k} e^{As} U ds$$

получаем, что  $T$  не менее максимального числа  $\tau$ ,  $\tau < t_k$ , которое определяется из условия

$$\int_\tau^{t_k} e^{As} U ds \supset B_\varepsilon(0). \quad (24)$$

Действительно, из доказательства леммы 3 и выполнения включения (24) имеем

$$\emptyset \neq (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M(t_k) = \left( (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} \int_\tau^{t_k} e^{As} U ds \right) \overset{*}{\subset} M(\tau) \subset M_0 \overset{*}{\subset} M(\tau),$$

и тем самым  $\tau \leq T$  ( $T$  – максимально число, для которого  $M_0 \overset{*}{\subset} M(T) \neq \emptyset$ ).

**Лемма 4.** Пусть  $\mu = \min_{\|h\|=1, t \in [0, T_0]} \|e^{At} h\|$  и  $B_d(0) \subset U$  для некоторого  $d > 0$ . Тогда  $t_k - \frac{\varepsilon}{\mu d} \leq T < t_{k+1}$ .

**Доказательство.** Повторяет доказательство леммы 2.

Заметим, что если  $t_k - \frac{\varepsilon}{\mu d} \leq 0$ , то оценка леммы 4 не информативна, так как утверждает, что  $0 \leq T < t_{k+1}$ .

Доказательство лемм 2 и 4 основано на включении (20) или (24), они доказываются при условии, что  $0$  – внутренняя точка множества  $U$ . Однако может выполняться включение  $0 \in \partial U$ . В этом случае удастся доказать включение (20) или (24) для некоторых конкретных видов матрицы  $A$  и множества  $U$ . Этим вопросам посвящено приложение 1, где рассматривается ряд примеров в плоском случае.

В заключение рассмотрим, как меняется множество достижимости при изменении начальной точки и времени на их приближенные значения. Пусть  $(T, x_0)$  – истинное решение задачи (5) или (6), а  $(\hat{T}, \hat{x}_0)$  – некоторое их приближение. Без ограничения общности считаем, что  $T \leq \hat{T}$ . Тогда отличие множеств достижимости системы (1) с начальными условиями  $x(0) = e^{-AT} x_0$  и  $x(0) = e^{-A\hat{T}} \hat{x}_0$  и временами  $T$  и  $\hat{T}$  соответственно есть (см. (4))

$$\begin{aligned} & \left\| e^{AT} e^{-AT} x_0 + \int_0^T e^{As} U ds, e^{A\hat{T}} e^{-A\hat{T}} \hat{x}_0 + \int_0^{\hat{T}} e^{As} U ds \right\| \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + \\ & + \left\| \int_0^T e^{As} U ds, \int_0^T e^{As} U ds + \int_T^{\hat{T}} e^{As} U ds \right\| \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + \left\| \int_T^{\hat{T}} e^{As} U ds \right\| \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + C \|U\| \cdot |T - \hat{T}|, \end{aligned}$$

где  $C = \max_{s \in [T, \hat{T}]} \|e^{As}\|$ .

Таким образом, основной вклад в погрешность вносит погрешность по времени  $|T - \hat{T}|$ .

Для сильно выпуклого множества достижимости с радиусом  $R$  погрешность  $\|x_0 - \hat{x}_0\|$  решения задач (13) и (21) имеет порядок  $\sqrt{(R + \varepsilon)\varepsilon}$ . В случае условия непустой внутренней (пункт 2 в теоремах 1 и 2) указанная погрешность имеет порядок  $\varepsilon$ .

Величина  $|T - \hat{T}|$  в силу лемм 2 и 4 оценивается  $\varepsilon/(\mu d)$  в обозначениях этих лемм. В случае, если точка  $0$  – граничная точка множества  $U \subset \mathbb{R}^2$  и спектр матрицы  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  не вещественный, получаем, что  $|T - \hat{T}|$  имеет порядок  $\varepsilon^{1/3}$  в случае гладкой границы  $U$ , когда возможно касание  $0$  шаром, целиком содержащимся в  $U$ . В случае, когда  $0$  лежит на отрезке, являющемся частью гра-

ницы  $\partial U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , получаем, что  $|T - \hat{T}|$  имеет порядок  $\varepsilon^{1/2}$ . Эти плоские случаи рассмотрены в приложении 1.

#### 4. ПРИМЕРЫ

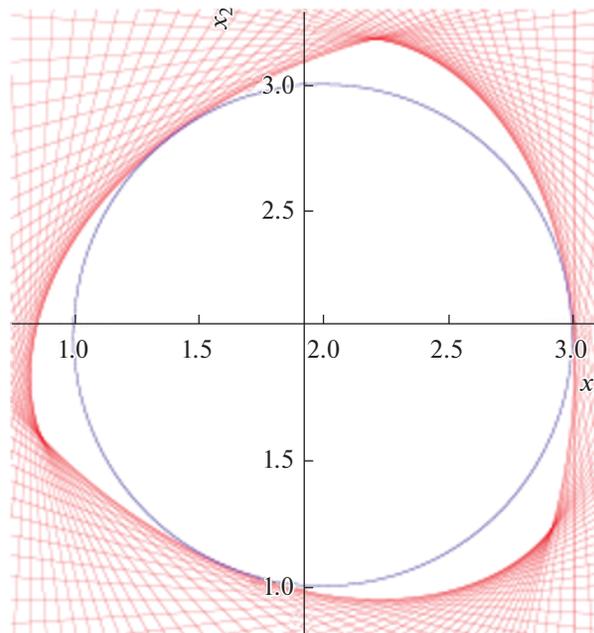
В примерах используется равномерная сетка в  $\mathbb{R}^2$  вида  $\left\{ \left( \cos \frac{2\pi k}{I}, \sin \frac{2\pi k}{I} \right) \right\}_{k=0}^{I-1}$ , где  $I$  – число элементов сетки. Мелкость сетки имеет порядок  $1/I$ . Все картинки нарисованы для  $I = 100$ . Во всех примерах для всех  $i$  шаг по времени  $t_{i+1} - t_i = 10^{-7}$  (избыточно малый). Мы старались подобрать условия примеров так, чтобы читатель мог их максимально просто интерпретировать.

**Пример 2.** Рассмотрим матрицу  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = e^{-s} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Пусть множество  $U \subset \mathbb{R}^2$  является треугольником  $\text{co}\{(-1,1), (1,-1), (\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$ , а множество  $M_0 \subset \mathbb{R}^2$  является кругом  $M_0 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1\}$ .

Решается задача (5) (см. фиг. 1). В табл. 1 приведены результаты численного моделирования для данного примера. Все обозначения соответствуют ранее описанным, и их значения были получены с помощью алгоритмов, описанных выше. Радиус сильной выпуклости множеств  $M(t_k)$  равен примерно  $R = 2.81$  и вычисляется численно, его можно также оценить чисто теоретически (см. следствие теоремы 1 из [24]). В условиях п. 2 теоремы 2 значение  $\delta = 0.5$ . Истинное время оценивается из условия  $t_k - 10^{-7} \leq T \leq \tau$ . Последняя строка данной таблицы подтверждает оценку  $\|x_0 - \hat{x}_0\|$ , полученную в п. 2 теоремы 2. Скорость сходимости алгоритма по пространственной переменной является квадратичной по мелкости сетки и соответственно линейной по  $\varepsilon = h(\hat{M}(t_k), M(t_k))$  в силу неравенства  $\delta > 0$ .



Фиг. 1. Пример 1.

Таблица 1

$I$	200	400	600	2000	10 000
$t_k$	1.70047	1.70056	1.70058	1.70059	1.70060
$\hat{x}_0$	(1.89550, 1.40899)	(1.89548, 1.40902)	(1.89547, 1.40901)	(1.89548, 1.40901)	(1.89548, 1.40901)
$\varepsilon$	0.00275	0.00069	0.00031	$2.77699 \times 10^{-5}$	$1.11079 \times 10^{-6}$
$\tau$ (20)	1.91705	1.80585	1.77063	1.72128	1.70475
$\tau$ по лемме 6	1.93234	1.80997	1.77225	1.72155	1.70475
$\frac{1}{I^2} \ \hat{x}_0 - \hat{x}_0(10\,000)\ $	1.07092	2.93539	0.710737	1.96163	0

**Пример 3.** Снова матрица  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = e^{-s} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix},$$

$U = \text{co}\{(-1, 1), (1, -1), (\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$ , а множество  $M_0 \subset \mathbb{R}^2$  является эллипсом с центром симметрии  $x_0 = (-1, 1)^T$  и матрицей  $Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ .

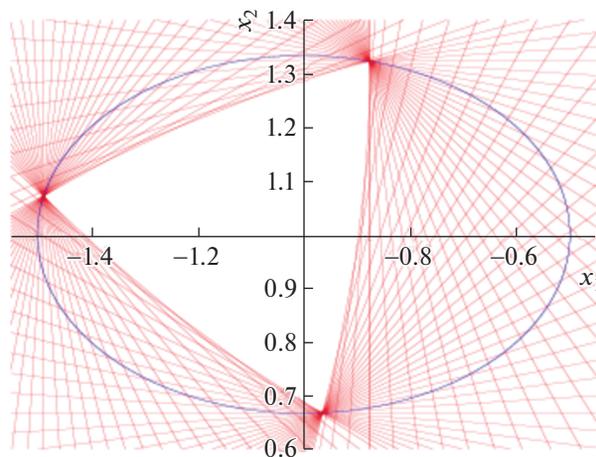
По теореме 3 (см. [12]) множество  $M_0$  является сильно выпуклым с радиусом  $R = 3/4$ .

Решается задача (6) (см. фиг. 2). В условиях п. 2 теоремы 2 значение  $\delta = 0.11$ . Истинное время  $T$  оценивается из условия  $\tau \leq T \leq t_k + 10^{-7}$ . В табл. 2 приводятся результаты численного моделирования для данного примера.

**Пример 4.** Пусть матрица  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  задана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}.$$

Зададим  $U = \text{co}\{(0.5, 0), (-0.5, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ . Множество  $M_0 \subset \mathbb{R}^2$  является эллипсом с центром симметрии  $x_0 = (2, 2)^T$  и матрицей  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \\ 0 & 1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$ . Тогда по теореме 3 (см. [12]) множество  $M_0$  является сильно выпуклым с радиусом  $R = \frac{25}{3}$ .



Фиг. 2. Пример 2.

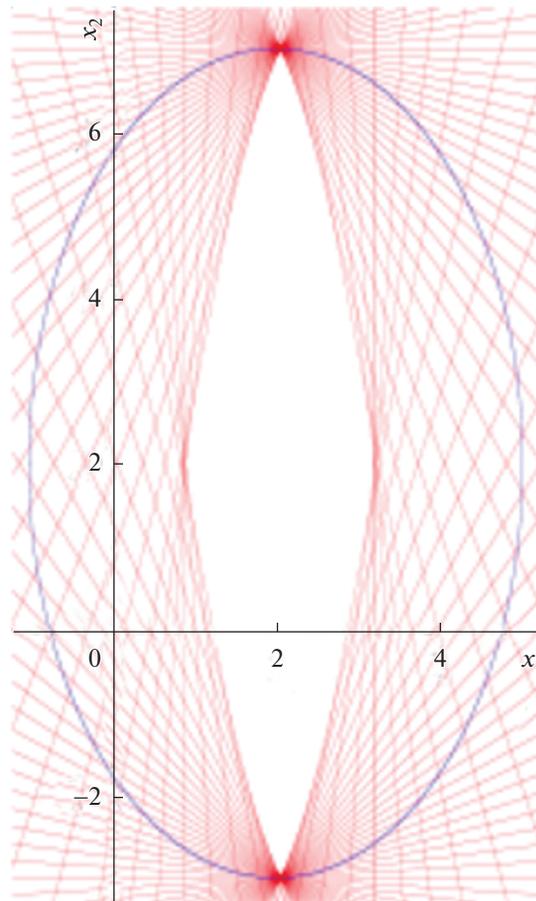
Таблица 2

$I$	200	400	600	2000	10 000
$t_k$	0.26734	0.26729	0.26729	0.26729	0.26728
$\hat{x}_0$	(-1.22649, 0.86960)	(-1.22653, 0.86966)	(-1.22653, 0.86965)	(-1.22653, 0.86966)	(-1.22653, 0.86966)
$\varepsilon$	0.00074	0.00019	$8.22512 \times 10^{-5}$	$7.40224 \times 10^{-6}$	$2.96088 \times 10^{-7}$
$\tau$ (24)	0.21863	0.24216	0.25083	0.26243	0.26634
$\tau$ по лемме 6	0	0.07499	0.12055	0.20153	0.24479
$\frac{1}{I^2} \ \hat{x}_0 - \hat{x}_0(10\,000)\ $	2.79663	0.26175	2.65212	0.71218	0

На фиг. 3 изображено решение задачи (6). В отличие от предыдущего примера здесь не реализуется случай п. 2 теоремы 2 ( $\delta = 0$ ). При этом  $0$  – внутренняя точка множества  $U$ , а именно,  $B_{1/\sqrt{5}}(0) \subset U$ . Истинное время  $T$  оценивается из условия  $\tau \leq T \leq t_k + 10^{-7}$ . В табл. 3 приведены результаты численного моделирования для данного примера.

**Пример 5.** Пусть матрица  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  задана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = \begin{pmatrix} e^{-0.5s} & 0 \\ 0 & e^{-3s} \end{pmatrix}.$$



Фиг. 3. Пример 3.

Таблица 3

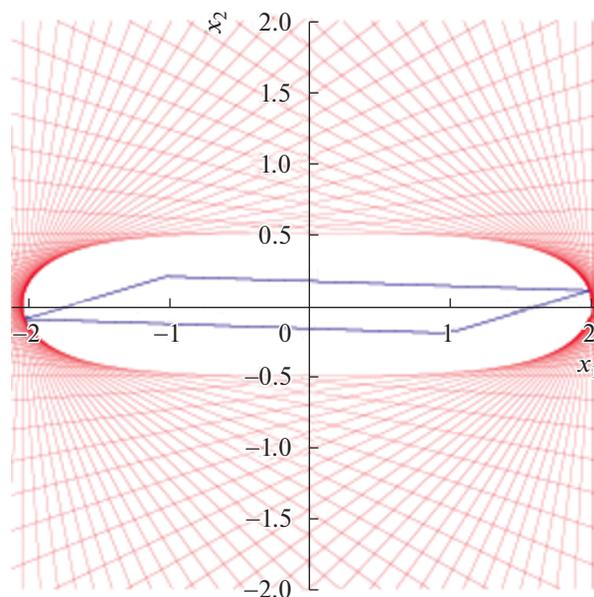
$I$	200	400	600	2000	10 000
$t_k$	1.19895	1.19895	1.19895	1.19895	1.19895
$\hat{x}_0$	(2.02830, 2)	(2.01418, 2)	(2.00949, 2)	(2.00303, 2)	(2.00158, 2)
$\varepsilon$	0.00823	0.00206	0.00091	$8.22471 \times 10^{-5}$	$3.28987 \times 10^{-6}$
$\tau$ (24)	1.19393	1.19769	1.19839	1.19890	1.19895
$\tau$ по лемме 4	0.99780	1.14868	1.17661	1.19694	1.19887
$\frac{1}{I^2} \ \hat{x}_0 - \hat{x}_0(10\,000)\ $	5.34503	5.04090	4.74569	2.90680	0

Таблица 4

$I$	200	600	2000	10 000
$t_k$	2.23484	2.23490	2.23491	2.23491
$\hat{x}_0$	(-0.00021, 0.00052)	(-0.00021, 0.00054)	( $-3.90502 \times 10^{-5}$ , $1.02372 \times 10^{-5}$ )	( $-2.93699 \times 10^{-5}$ , $7.72814 \times 10^{-5}$ )
$\varepsilon$	0.06393	0.00710	0.00064	$2.55644 \times 10^{-5}$
$\frac{1}{I^2} \ \hat{x}_0 - \hat{x}_0(10\,000)\ $	0.09606	0.29784	0.05379	0

Зададим  $U = B_{1,5}(0)$ . Множество  $M_0 \subset \mathbb{R}^2$  является параллелограммом с вершинами  $(-2, -0.1)$ ,  $(-1, 0.2)$ ,  $(2, 0.1)$ ,  $(1, -0.2)$ .

Решается задача (5). В табл. 4 приведены результаты численного моделирования для данного примера. Радиус сильной выпуклости множества  $M(t_k)$  примерно равен 64.76 и может быть вычислен по формуле  $\int_0^{t_k} R(s) ds$  (см. [19]), где  $R(s) = \lambda_1^2(s)/\lambda_2(s) = \frac{3}{2}e^{-2s}$  – радиус сильной выпуклости эллипса  $e^{As}B_{3/2}(0)$  с максимальной полуосью  $\lambda_1(s) = \frac{3}{2}e^{-0.5s}$  и минимальной полуосью



Фиг. 4. Пример 4.

$\lambda_2(s) = \frac{3}{2}e^{-3s}$ . Для  $I = 3000$  векторов в сетке время  $\tau$ , полученное из включения (20), равно  $\tau = 2.44260$ . При меньшем  $I$  получается  $\tau = 0$  в силу малости параметра  $\mu = e^{-3t_k}$  из леммы 2. Скорость сходимости алгоритма по фазовой переменной является линейной по мелкости сетки, что обусловлено равенством  $\delta = 0$ .

Приложение 1

ВНУТРЕННОСТЬ МНОГОЗНАЧНОГО ИНТЕГРАЛА В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

**Лемма 5.** Пусть собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  – комплексно-сопряженные числа  $\alpha \pm i\beta$ ,  $\beta > 0$ , и  $e^{As} = e^{\alpha s} Q(\beta s)$ , где  $Q(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}$ . Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  – выпуклый компакт,  $r > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|x\| = r$  и выполняются условия  $B_r(x) \subset U$ ,  $0 \in B_r(x) \cap \partial U$ . Определим  $C = \min\{e^{\alpha t_1}, e^{\alpha t_2}\}$ . Тогда для любых  $0 < t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset B_\delta(0),$$

где  $\delta = Cr(t_2 - t_1) \left( 1 - \frac{\sin(\beta(t_2 - t_1)/2)}{\beta(t_2 - t_1)/2} \right)$ .

Отметим, что условия леммы означают гладкость границы множества  $U$  в точке 0. Более того, внутри множества  $U$  точку  $0 \in \partial U$  можно коснуться шаром радиуса  $r$ .

**Доказательство.** Имеем цепочку включений

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset \int_{t_1}^{t_2} e^{As} B_r(x) ds \supset C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) B_r(x) ds = C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) B_r(0) ds + C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) x ds.$$

Первое слагаемое справа с учетом равенства  $Q(\beta s) B_r(0) = B_r(0)$  оценивается как

$$C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) B_r(0) ds \supset Cr(t_2 - t_1) B_1(0).$$

Пусть  $x = r(\cos \theta, \sin \theta)^T$  для некоторого  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Для второго слагаемого получаем

$$C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) x ds = \frac{2Cr \sin(\beta(t_2 - t_1)/2)}{\beta} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta(t_2 + t_1)}{2} + \theta\right) \\ \sin\left(\frac{\beta(t_2 + t_1)}{2} + \theta\right) \end{pmatrix} =: z.$$

Для точки  $z$  имеем  $\|z\| = \frac{2Cr \sin(\beta(t_2 - t_1)/2)}{\beta}$ , откуда

$$\delta \geq Cr(t_2 - t_1) - \|z\| = Cr(t_2 - t_1) \left( 1 - \frac{\sin(\beta(t_2 - t_1)/2)}{\beta(t_2 - t_1)/2} \right).$$

**Лемма 6.** Пусть собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  – комплексно-сопряженные числа  $\alpha \pm i\beta$ ,  $\beta > 0$ , и  $e^{As} = e^{\alpha s} Q(\beta s)$ , где  $Q(s)$  из леммы 5. Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  – выпуклый компакт,  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  и  $I = \text{co}\{\pm r(\cos \theta, \sin \theta)^T\} \subset \partial U$ . Определим  $C = \min\{e^{\alpha t_1}, e^{\alpha t_2}\}$ . Тогда для любых  $0 < t_1 < t_2$ ,  $t_2 - t_1 < \pi/\beta$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset B_\delta(0),$$

где  $\delta = \frac{2}{\beta} Cr \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2}\beta(t_2 - t_1)\right)\right)$ .

**Доказательство.** Имеем цепочку включений  $\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset \int_{t_1}^{t_2} e^{As} I ds \supset C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) I ds$ . Пусть  $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$  – единичный вектор. Тогда

$$s \left( p, \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \right) \geq C \int_{t_1}^{t_2} s(p, Q(\beta s) I) ds = Cr \int_{t_1}^{t_2} |\sin(\beta s + \psi)| ds,$$

где  $\psi = \theta - \varphi + \pi/2$ . Делая замену переменной  $\tau = \beta s + \psi$ , для  $T_i = \beta t_i + \psi$ ,  $i = 1, 2$ , получаем  $s \left( p, \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \right) \geq \frac{1}{\beta} Cr \int_{T_1}^{T_2} |\sin \tau| d\tau$ . Поскольку  $T_2 - T_1 < \pi$ , то

$$\int_{T_1}^{T_2} |\sin \tau| d\tau \geq 2 \int_0^{\frac{1}{2}(T_2 - T_1)} \sin \tau d\tau = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2}(T_2 - T_1)\right)\right).$$

Подставляя последнюю оценку в предыдущее неравенство, получаем утверждение леммы.

Заметим, что лемма 6 дает второй порядок радиуса шара по  $t_2 - t_1$ , а лемма 5 – третий.

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  – выпуклый компакт. Допустим, что существует такое число  $\rho > 0$ , что  $U \cap B_\rho(0) \supset H \cap B_\rho(0)$ , где  $H = \{x \in \mathbb{R}^2 | (p, x) \leq 0\}$  – полупространство для некоторого единичного вектора  $p \in \mathbb{R}^2$ . Тогда  $\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \asymp (t_2 - t_1)^2$ ,  $t_2 - t_1 \rightarrow +0$ .

Действительно, пусть  $I$  – отрезок с центром в нуле такой, что  $I \subset \partial H$ . Рассмотрим круг  $B_R(x)$ ,  $\|x\| = R$ , который касается  $\partial H$  в точке 0 и  $I + B_R(x) \supset U$ . Такие  $R$  и отрезок  $I$  можно подобрать в силу компактности  $U$  и того, что  $\partial H$  – опорная прямая к  $U$  в точке 0. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \subset \int_{t_1}^{t_2} e^{As} I ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{As} B_R(x) ds.$$

По леммам 5, 6 слагаемые в правой части последней формулы имеют порядок  $(t_2 - t_1)^2 + (t_2 - t_1)^3 \asymp (t_2 - t_1)^2$ ,  $t_2 - t_1 \rightarrow +0$ .

Таким образом, наличие отрезка во множестве  $U$ ,  $0 \in \partial U$ , с центром в нуле важнее телесности  $U$  для максимальности вписанного в интеграл шара с центром в нуле.

**Лемма 7.** Пусть  $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ , где  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Определим  $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 > 0$  и  $C = \min\{e^{\lambda_2 t_1}, e^{\lambda_2 t_2}\}$ .

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  – выпуклый компакт и  $I \subset \partial U$ , где  $I = \text{co}(\pm r(\cos \theta, \sin \theta)^T)$ ,  $r > 0$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\theta \neq \pi/2$ . Тогда для любых  $0 < t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset B_\delta(0),$$

где  $\delta = Cr \frac{\lambda K^2 \sin \theta}{\pi^2} (t_2 - t_1)^2$ . Здесь  $K = K(t_1, t_2, \lambda, \theta) = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{e^{\lambda t_i} |\text{ctg} \theta|}{1 + e^{2\lambda t_i} \text{ctg} \theta} \right\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $M = \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds$ . Тогда

$$M \supset \int_{t_1}^{t_2} e^{\lambda_2 s} \begin{pmatrix} e^{\lambda s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I ds \supset Cr \int_{t_1}^{t_2} \text{co}(\pm(e^{\lambda s} \cos \theta, \sin \theta)^T) ds.$$

Пусть  $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$  – единичный вектор,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Тогда для

$$J = \int_{t_1}^{t_2} |e^{\lambda s} \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta| ds$$

имеем  $s(p, M) \geq CrJ$ . Оценим  $J$  снизу.

1. Рассмотрим случай  $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ . Здесь

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta e^{2\lambda s}} |\sin(\alpha(s) + \varphi)| ds,$$

где  $\alpha(s) = \operatorname{arctg}(e^{\lambda s})$ . Введем новую переменную  $\tau = \alpha(s) + \varphi$ ,  $ds = \frac{d\tau}{\alpha'(s)} = \frac{1 + e^{2\lambda s} \operatorname{ctg}^2 \theta}{\lambda e^{\lambda s} \operatorname{ctg} \theta} d\tau$ . Отсю-

да, с учетом включения  $\alpha(s) \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ ,

$$\begin{aligned} J &= \frac{\sin \theta}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(s))^{3/2}}{\operatorname{tg} \alpha(s)} |\sin \tau| d\tau = \frac{\sin \theta}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} \frac{|\sin \tau|}{(\tau - \varphi) \cos^3(\tau - \varphi)} d\tau \geq \\ &\geq \frac{\sin \theta}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} |\sin \tau| d\tau \geq \frac{2 \sin \theta}{\lambda} \int_0^{\frac{1}{2}(\alpha(t_2) - \alpha(t_1))} \sin \tau d\tau = \frac{4 \sin \theta}{\lambda} \sin^2 \left( \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{4} \right) \geq \\ &\geq \frac{4 \sin \theta}{\lambda} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{4^2} (\alpha(t_2) - \alpha(t_1))^2 \frac{\sin \theta}{\lambda \pi^2} (\alpha(t_2) - \alpha(t_1))^2. \end{aligned}$$

По теореме о среднем найдется  $\xi \in [t_1, t_2]$  такое, что

$$|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| = \frac{\lambda e^{\lambda \xi} |\operatorname{ctg} \theta|}{1 + e^{2\lambda \xi} \operatorname{ctg}^2 \theta} (t_2 - t_1) \geq \lambda K (t_2 - t_1).$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

2. Пусть  $\theta \in (\frac{1}{2}\pi, \pi)$ . Заменой  $\psi = \pi - \theta$ ,  $\alpha(s) = \operatorname{arctg}(e^{\lambda s} \operatorname{ctg} \psi)$  и  $\tau = \alpha(s) + \varphi$  приводим интеграл  $J$  к виду

$$\begin{aligned} J &= \frac{\sin \psi}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(s))^{3/2}}{\operatorname{tg} \alpha(s)} |\cos(\alpha(s) + \varphi)| d\tau \geq \frac{\sin \theta}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi - \frac{1}{2}\pi}^{\alpha(t_2)+\varphi - \frac{1}{2}\pi} |\sin \tau| d\tau \geq \\ &\geq \frac{2 \sin \theta}{\lambda} \int_0^{\frac{1}{2}(\alpha(t_2) - \alpha(t_1))} |\sin \tau| d\tau. \end{aligned}$$

Далее доказательство повторяет пункт 1.

**Лемма 8.** Пусть  $e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Определим  $C = \min\{e^{\lambda t_1}, e^{\lambda t_2}\}$ . Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  – выпуклый компакт и  $I \subset \partial U$ , где  $I = \operatorname{co}(\pm r(\cos \theta, \sin \theta)^T)$ ,  $r > 0$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ . Тогда для любых  $0 < t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset B_\delta(0),$$

где  $\delta = Cr \frac{K^2 \sin \theta}{\pi^2} (t_2 - t_1)^2$ . Здесь  $K = K(t_1, t_2, \theta) = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{1 + (t_i + \operatorname{ctg} \theta)^2} \right\}$ .

**Доказательство.** Повторяя рассуждения леммы 7, получаем для  $M = \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds$ ,  $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  и  $J = \int_{t_1}^{t_2} |(\cos \theta + s \sin \theta) \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi| ds$  имеем  $s(p, M) \geq CrJ$ . Для  $J$  получаем  $J = \sin \theta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (s + \operatorname{ctg} \theta)^2} |\sin(\alpha(s) + \varphi)| ds$ , где  $\alpha(s) = \operatorname{arctg}(s + \operatorname{ctg} \theta)$ . Заменой  $\tau = \alpha(s) + \varphi$  находим

$$\begin{aligned} J &= \sin \theta \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} (1 + (s + \operatorname{ctg} \theta)^2)^{3/2} |\sin \tau| d\tau = \sin \theta \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(s))^{3/2} |\sin \tau| d\tau = \\ &= \sin \theta \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} \frac{|\sin \tau|}{|\cos^3(\tau - \varphi)|} d\tau \geq 2 \sin \theta \int_0^{\frac{1}{2}(\alpha(t_2)-\alpha(t_1))} \sin \tau d\tau = 4 \sin \theta \sin^2 \left( \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{4} \right). \end{aligned}$$

Отсюда  $J \geq 4 \sin \theta \frac{4}{\pi^2} \frac{(\alpha(t_2) - \alpha(t_1))^2}{4^2}$ . Применение теоремы о среднем завершает доказательство.

## Приложение 2

### ОДИН ПРИМЕР МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ

Приведем пример множества достижимости нетривиальной линейной системы, которое строго выпукло, но не сильно выпукло. Напомним, что  $f(s) \asymp g(s)$ ,  $s \rightarrow 0$ , если существует такое  $\delta > 0$ , что  $C_1 \leq \frac{f(s)}{g(s)} \leq C_2$  для всех  $s \in (-\delta, \delta)$  и некоторых  $C_2 \geq C_1 > 0$ . Пусть  $U = \operatorname{co}\{(0, 0, \pm 1)\}$ ,

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad e^{As} = e^{\lambda s} \begin{bmatrix} 1 & s & \frac{1}{2}s^2 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Для } \varepsilon \in (0, 1) \text{ рассмотрим векторы } p = \frac{1}{3}(2, -2, 1) \text{ и}$$

$q = q(\varepsilon) = \frac{(2, -2, 1 - \varepsilon)}{\sqrt{9 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}}$ . Легко проверить, что  $\|p - q\| \asymp \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и для  $t > 1 + \sqrt{\varepsilon}$  ( $s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$  есть корни уравнения  $(e^{A^T s} q(\varepsilon), (0, 0, 1)^T) = 0$ )

$$M(t)(p) - M(t)(q) = \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} e^{\lambda s} (s^2, 2s, 2)^T ds, \quad \|M(t)(p) - M(t)(q)\| \geq \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} 2e^{\lambda s} ds \asymp \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для произвольного фиксированного  $R > 0$  значение  $\sqrt{\varepsilon}/(R\varepsilon)$  не ограничено сверху при малых  $\varepsilon > 0$ . Следовательно,  $M(t)$  не сильно выпукло, так как для сильно выпуклого множества с радиусом  $R > 0$  опорные элементы этого множества должны удовлетворять условию Липшица на единичной сфере с константой  $R$  (см. [19], [12], следствие 4). Заметим, что множество  $M(t)$  строго выпукло, так как для всякого вектора  $p \in \partial B_1(0)$  множество  $(e^{As} U)(p)$  одноточечно при всех  $s \in [0, t]$ , за исключением не более чем двух значений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liapounoff A.A.* Sur les fonctions-vecteurs completement additives // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1940. V. 4. № 6. P. 465–478.
2. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley; 1st Printing, ed. 1967, 588 p.
3. *Aumann R.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. № 1. P. 1–12.
4. *Polyak B.T., Smirnov G.* Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems // Automatica. 2016. V. 74. P. 297–307.
5. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions, Springer-Verlag, 1984.
6. *Aubin J.-P.* A Survey of viability theory // SIAM J. Control and Optimizat. 1990. V. 28. № 4. P. 749–788.

7. Kelley H.J. Gradient theory of optimal flight paths // ARSJ. 1960. V. 30. P. 947–953.  
<https://doi.org/10.2514/8.5282>
8. Bryson A.E., Denham W.F. A steepest-ascent method for solving optimum programming problems // J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 247–257; <https://www.gwern.net/docs/ai/1962-bryson.pdf>
9. Eichmeir Ph., Lauß Th., Oberpeilsteiner S., Nachbagauer K., Steiner W. The adjoint method for time-optimal control problems // J. Comput. Nonlinear Dynam. 2021. V. 16. № 2. P. 021003 (12 pages).  
<https://doi.org/10.1115/1.4048808>
10. Cannarsa P., Sinestrari C. Convexity properties of the minimum time function // Calcul. Variat. Part. Different. Equat. 1995. V. 3. № 3. P. 273–298;  
<https://doi.org/10.1007/bf01189393>
11. Boltyanskii V.G. Mathematical methods of optimal control, Holt, Rinehart and Winston (1st ed.), 1971.
12. Половинкин Е.С. Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 103–130.
13. Le Guernic C., Girard A. Reachability analysis of linear systems using support functions // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2010. V. 4. P. 250–262.
14. Althoff M., Frehse G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis // Ann. Rev. Control, Robotics, and Autonomous Systems, Ann. Rev. 2021. V. 4. № 1. hal-03048155.  
<https://doi.org/10.1146/annurev-control-071420-081941>
15. Serry M., Reissig G. Over-approximating reachable tubes of linear time-varying systems, arXiv:2102.04971v1.
16. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes, ser. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhauser/Springer, 2014, theory and computation.
17. Балашов М.В. Покрытие множества выпуклым компактом: оценки погрешности и вычисление // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 3. С. 337–349.
18. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств, Киев, Вища школа, 1980.
19. Frankowska H., Olech C. R-convexity of the integral of the set-valued functions, Contributions to analysis and geometry, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1981. P. 117–129.
20. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа, М., Физматлит, 2007. 2-е изд.
21. Балашов М.В., Половинкин Е.С. M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 27–64.
22. Balashov M.V. On polyhedral approximations in an  $n$ -dimensional space // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. № 10. P. 1679–1685.
23. Balashov M.V., Repovš D. Polyhedral approximations of strictly convex compacta // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 374. P. 529–537.
24. Балашов М.В. Сильная выпуклость множеств достижимости линейных систем // Матем. сб. 2022. Т. 213. № 5. С. 30–49.