

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.633.6

О СХЕМЕ РУСАНОВА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ¹⁾

© 2023 г. Е. В. Чижонков^{1,*}

¹ 119899 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 25.05.2022 г.

Переработанный вариант 02.12.2022 г.

Принята к публикации 02.02.2023 г.

Для моделирования нерелятивистских колебаний холодной плазмы предложена модификация известной схемы Русанова, имеющей третий порядок точности. Ранее для подобных расчетов в эйлеровых переменных были известны только схемы первого и второго порядков точности. Для тестовой задачи с гладким решением проведено исследование погрешностей построенной схемы, а также — сравнение с погрешностями схемы Мак-Кормака. Для задачи о свободных плазменных колебаниях, инициированных коротким мощным лазерным импульсом, приведены результаты численных экспериментов по сохранению энергии и дополнительной функции для обеих схем, а также — по точности электронной плотности в центре области. Сделан вывод о теоретическом превосходстве схемы Русанова, хотя для практических вычислений более приспособлена схема Мак-Кормака. В первую очередь это касается расчетов “долгоживущих” процессов и колебаний холодной плазмы, близких к реальным. Теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости вместе с экспериментальным наблюдением за количественными характеристиками погрешности для наиболее чувствительных величин существенно повышает достоверность вычислений. Библ. 20. Фиг. 3. Табл. 4.

Ключевые слова: численное моделирование, плазменные колебания, схемы Русанова и Мак-Кормака, порядок точности разностной схемы, законы сохранения, гиперболические системы уравнений.

DOI: 10.31857/S0044466923050083, EDN: GFRVIX

ВВЕДЕНИЕ

При расчетах гиперболических законов сохранения порядок точности метода играет важную роль [1]. Сфокусируем внимание на схемах сквозного счета, которые допускают естественное обобщение на задачи пространственной размерности более единицы. Традиционными требованиями к таким схемам являются монотонность в окрестности разрыва решения и порядок аппроксимации выше первого на гладкой части решения. Это привело к тому, что точное или приближенное решение классической задачи Римана (задачи Коши с кусочно постоянными начальными данными) для дивергентной формы уравнений является основой большинства современных алгоритмов численного решения для соответствующих постановок задач [1]. Следует отметить, что в задачах, связанных с плазменными колебаниями, постановка классической задачи Римана не имеет никакого физического смысла, так как начальная разрывная функция электрического поля уже означает бесконечную концентрацию заряда в точках разрыва. Подобная ситуация обозначается термином “опрокидывание” (см. [2], стр. 12–15). Иными словами, схемы сквозного счета, предложенные изначально для гиперболических законов сохранения в дивергентной форме, требуют специальных модификаций при использовании их для расчетов плазменных колебаний, так как в этом случае часть уравнений имеет дивергентную форму, а часть — нет. Более того, само решение уравнений с частными производными, характеризующими, например, простейшую гидродинамическую модель холодной плазмы, имеет следующую специфику: стартуя с гладких начальных данных, оно либо остается глобально гладким во времени и пространстве, либо на конечном промежутке времени приходит к градиентной катастрофе, т.е.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению 075-15-2022-284.

когда само решение остается ограниченным, а его пространственные производные (градиенты) становятся сингулярными.

Обозначим актуальность развития схем сквозного счета для подобных постановок. Они напрямую связаны с приложением результатов, удостоенных Нобелевской премии по физике 2018 года. Приведем следующие примеры практически важных задач этой тематики: лазерное ускорение электронов и ионов, быстрое зажигание термоядерного синтеза, ядерные реакции в луче лазера, синхротронное и субмиллиметровое излучение и пр. Основным методом их исследования является численное моделирование; поэтому необходимым являются разработка и обоснование соответствующих алгоритмов для систем дифференциальных уравнений, составляющих рабочую математическую модель. Численному моделированию колебаний в холодной плазме, а также — кильватерных волн, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом, посвящена монография [2].

В работе [3] впервые были предложены соответствующие модификации классических схем второго порядка точности: Мак-Кормака и Лакса—Вендрофа. При этом было показано, что первая из них имеет несомненные практические преимущества перед второй, хотя в теоретических аспектах они весьма схожи. В настоящей работе рассматривается модификация на случай расчета плазменных колебаний схемы В.В. Русанова третьего порядка точности [4], которая стала широко известной благодаря публикациям [5], [6]. Сама идея модификации проста: схема Русанова, в силу ориентации на расчет разрывных решений, излагается в терминах конечных разностей (а не аппроксимаций производных!); каждая разность представляет собой по определению интеграл либо может быть представлена в виде суммы интегралов от функций, входящих в уравнения не дивергентной формы; поэтому для замены “разности—интеграла” надо использовать квадратурную формулу с подходящей оценкой погрешности. Для схем второго порядка точности можно было ограничиться квадратурной формулой прямоугольников с узлом в центральной точке, для схемы Русанова этого недостаточно, нужна формула парабол (Симпсона) [7].

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе приведена простейшая (плоская пространственно одномерная) система уравнений, описывающая колебания холодной плазмы в эйлеровых переменных. В рассматриваемом случае она имеет гиперболический тип, однако ее форма записи имеет как дивергентное уравнение, так и не дивергентное. Также в первом разделе указаны аналитические свойства решения дифференциальной задачи: теорема существования и единственности, законы сохранения, нечетность решения при нечетности начальных данных, формула электронной плотности на оси симметрии области. Во втором разделе приведена модификация классической схемы Русанова третьего порядка точности. В третьем разделе, самом объемном, приведены результаты расчетов. Сначала они иллюстрируют порядок точности схемы Русанова на гладком специально сконструированном решении неоднородной задачи; для сравнения приводятся аналогичные расчеты по схеме Мак-Кормака. Затем демонстрируется применение схемы Русанова на расчете плазменных колебаний, инициированных коротким мощным лазерным импульсом, что также сопровождается сравнением с результатами схемы Мак-Кормака. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ СВОЙСТВА

1.1. Уравнения и начальные условия

Будем считать плазму нерелятивистской электронной жидкостью, пренебрегая рекомбинационными эффектами и движением ионов. Тогда в рамках одной из простейших моделей плазмы, которую часто называют уравнениями гидродинамики “холодной” плазмы (см., например, [8], [9]), ее плоские одномерные колебания можно описать безразмерной системой уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \rho} = -E, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = V, \quad (1)$$

где V — скорость электронов, E — электрическое поле. К системе (1) обычно добавляют уравнение

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho}, \quad (2)$$

характеризующее безразмерную плотность электронов N . Формула (2) является частным случаем теоремы Гаусса [10], которая в дифференциальной размерной форме имеет вид

$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n - n_0)$. Вывод уравнений (1), (2) можно найти в различных источниках (см., например, [2], [3], [16]).

Ниже мы будем изучать в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}, \theta > 0\}$ решение задачи Коши для (1) с начальными условиями

$$V(\rho, 0) = V_0(\rho), \quad E(\rho, 0) = E_0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Система (1) относится к гиперболическому типу. Хорошо известно, что для таких систем существует локально по времени единственное решение задачи Коши того же класса, что и начальные данные, в нашем случае это C^2 . Также известно, что для таких систем потеря решением гладкости происходит по одному из следующих сценариев: либо сами компоненты решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность, либо они остаются ограниченными, но в бесконечность обращаются их производные [11]. Последняя возможность реализуется, например, для однородных законов сохранения, к которым относятся уравнения газовой динамики, где возникновение особенности соответствует образованию ударной волны.

Следует отметить, что моделирование нерелятивистских колебаний холодной плазмы можно проводить также на основе системы уравнений Эйлера–Пуассона, которая имеет смешанный тип: гиперболический и эллиптический одновременно [12]. Однако при таком подходе отсутствует расщепление уравнений, аналогичное (1), (2), что автоматически увеличивает примерно в полтора раза объем вычислительной работы при дальнейшем использовании любого численного алгоритма.

1.2. Свойства решения

Напомним основные свойства решения задачи (1), (3), впервые полученные в работе [13] (подробные доказательства приведены в [14]).

Теорема существования и единственности (Для рассматриваемой постановки принципиально важной является теорема существования глобального по времени решения [13], [14]). Пусть начальные данные (3) принадлежат классу $C^2(\mathbb{R})$. Для существования и единственности непрерывно дифференцируемого по обеим переменным 2π -периодического по времени при всех $\theta > 0$ решения $V(\theta, \rho)$, $E(\theta, \rho)$ задачи (1), (3) необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $\rho \in (-\infty, \infty)$ было выполнено неравенство

$$(V'_0(\rho))^2 + 2E'_0(\rho) - 1 < 0. \quad (4)$$

Если же существует хотя бы одна точка ρ , для которой выполняется неравенство, противоположное (4), то в течение конечного времени производные решения обращаются в бесконечность.

Следствие. Если необходимое и достаточное условие существования решения (4) выполнено в начальный момент времени, то оно сохраняется во времени и пространстве, т.е. для произвольной точки (ρ, θ) справедливо

$$\left(\frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right)^2 + 2\frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho} - 1 < 0. \quad (5)$$

Даже если же условие (4) не выполнено, то сами функции $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$ все равно остаются ограниченными, в силу равенства $V^2 + E^2 = V_0^2(\rho_0) + E_0^2(\rho_0) = \text{const}$, справедливого для произвольной характеристики системы (1), стартующей из точки ρ_0 . Отсюда следует, что разрушение решения может иметь только вид градиентной катастрофы. В частности, нарушение условия (4) приводит к обращению электронной плотности в бесконечность, т.е. к опрокидыванию колебаний.

Следует отметить, что, в силу соотношения (2), из (5) вытекают строгая положительность и отделенность от нуля функции электронной плотности:

$$N(\rho, \theta) > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, из приведенной информации следует, что решение задачи (1) с начальными условиями (3) полностью характеризуется поведением функций $V(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$ и их пространственных производных (градиентов).

Законы сохранения. Дифференциальная форма записи закона сохранения полной энергии электрического поля и электронов плазмы в рассматриваемом случае имеет вид [3], [15]

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(E^2 + NV^2) + \frac{\partial}{\partial \rho}(NV^3) = 0. \quad (6)$$

После интегрирования этого соотношения по области $\rho \in (-\infty, \infty)$ при использовании однородных условий на бесконечности получим сохранение во времени величины

$$En(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} [E^2(\rho, \theta) + N(\rho, \theta)V^2(\rho, \theta)] d\rho \equiv \text{const}. \quad (7)$$

В работе [3] также приведен закон сохранения некоторой вспомогательной функции. В дифференциальной форме он имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} N(E^2 + V^2) + \frac{\partial}{\partial \rho} NV(E^2 + V^2) = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) при использовании однородных условий на бесконечности следует сохранение во времени величины

$$Af(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} N(\rho, \theta) [E^2(\rho, \theta) + V^2(\rho, \theta)] d\rho. \quad (9)$$

Обратим внимание, что соотношение (8) не противоречит закону сохранения энергии (6): разница между соответствующими выражениями есть просто утверждение теоремы Гаусса (2), умноженное на подходящую комбинацию функций.

Нечетность решения. Предположим, что начальные условия (3) нечетны относительно оси симметрии области, т.е. прямой $\rho = 0$. Покажем, что в этом случае решение системы (1) будет оставаться нечетным в течение всего времени его существования.

Рассмотрим решение $V(\theta, \rho)$, $E(\theta, \rho)$ задачи (1) с нечетными начальными условиями (3). Одновременно с ним рассмотрим пару функций $\hat{V}(\theta, \rho) = -V(\theta, -\rho)$, $\hat{E}(\theta, \rho) = -E(\theta, -\rho)$. При $\theta = 0$, в силу нечетности (3), справедливы равенства

$$\hat{V}(0, \rho) = -V(0, -\rho) = V(0, \rho), \quad \hat{E}(0, \rho) = -E(0, -\rho) = E(0, \rho).$$

Кроме того, функции $\hat{V}(\theta, \rho)$, $\hat{E}(\theta, \rho)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial \theta} + \hat{V} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \rho} = -\hat{E}, \quad \frac{\partial \hat{E}}{\partial \theta} + \hat{V} \frac{\partial \hat{E}}{\partial \rho} = \hat{V}, \quad (10)$$

что несложно проверяется непосредственной подстановкой в (1).

В результате имеем, что пары функций $V(\theta, \rho)$, $E(\theta, \rho)$ и $\hat{V}(\theta, \rho)$, $\hat{E}(\theta, \rho)$ удовлетворяют одинаковым уравнениям и одинаковым начальным условиям. Отсюда, в силу Теоремы 1 о существовании и единственности решения системы (1) с начальными условиями (3), получаем совпадение функций в произвольный момент времени θ

$$\hat{V}(\theta, \rho) = V(\theta, \rho), \quad \hat{E}(\theta, \rho) = E(\theta, \rho).$$

Теперь, вспоминая определения функций $\hat{V}$, $\hat{E}$ получаем нечетность решения V , E для любого θ , если начальные данные были нечетными.

Это свойство решения исходной задачи позволяет уменьшить область определения решения в два раза (было $\rho \in (-\infty, \infty)$, стало $\rho \in (0, \infty)$). При этом, вследствие свойства нечетности на оси $\rho = 0$ симметрии, формируются граничные условия:

$$V(\theta, 0) = E(\theta, 0) = 0 \quad \forall \theta.$$

Формула для плотности на оси симметрии. Продолжим изучение решения системы (1) с нечетными начальными данными (3). Учитывая его нечетность, выпишем соответствующее разложение в ряд Тейлора в окрестности прямой $\rho = 0$:

$$V(\theta, \rho) = \rho \frac{\partial V(\theta, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} + O(\rho^3), \quad E(\theta, \rho) = \rho \frac{\partial E(\theta, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} + O(\rho^3).$$

Нас интересует поведение производных на оси симметрии $\rho = 0$

$$W(\theta) = \frac{\partial V(\theta, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0}, \quad D(\theta) = \frac{\partial E(\theta, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0},$$

чтобы с помощью общей формулы (2) получить частную формулу

$$N(\rho = 0, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\theta, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 1 - D(\theta).$$

После подстановки разложений Тейлора в систему (1) и учета условия $\rho = 0$ приходим к вспомогательной задаче для функций $W(\theta)$ и $D(\theta)$ с вещественными начальными данными:

$$\begin{aligned} W' &= -D - W^2, & D' &= (1 - D)W, \\ W(0) &= \beta, & D(0) &= \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Эти начальные данные есть производные по ρ начальных функций из (3), взятые при $\rho = 0$.

Справедливо следующее (см. [16])

Утверждение. Пусть величина $s = (1 - \alpha)/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ удовлетворяет условию $s > 1$, тогда решение (11) имеет вид

$$W(\theta) = \frac{\cos(\theta + \theta_2)}{s + \sin(\theta + \theta_2)}, \quad D(\theta) = \frac{\sin(\theta + \theta_2)}{s + \sin(\theta + \theta_2)}, \quad (12)$$

где

$$\cos \theta_2 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (13)$$

В дальнейшем будет полезен частный случай этого решения, когда $W(0) = \beta = 0$. Это дает: $\theta_2 = \pi/2$, $s = (1 - \alpha)/\alpha$, следовательно,

$$N(\rho = 0, \theta) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha(1 - \cos \theta)}, \quad \alpha = E'_0(\rho = 0). \quad (14)$$

Функция электронной плотности N традиционно является очень важной для описания процессов в холодной плазме, при этом — наиболее сильно изменяющейся в сравнении с V и E . Предполагается использовать формулу (14) для анализа точности численного метода решения задачи (1), (3).

2. СХЕМА РУСАНОВА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

2.1. Формулы для дивергентной записи уравнения

Пусть исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \rho} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, \rho, \theta), \quad (15)$$

где $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{S}$ — вектор-функции, рассматриваемые в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \theta \geq 0, \rho \in \mathbb{R}\}$, и в момент времени $\theta = 0$ заданы начальные условия

$$\mathbf{U}(\rho, \theta = 0) = \mathbf{U}^0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Будем считать, что нас интересует приближенное решение задачи Коши, определенной соотношениями (15), (16), про которое известно, что оно существует, единственно и обладает достаточной гладкостью.

Определим дискретизацию независимых переменных с помощью постоянных параметров τ и h так, что

$$\theta^n = n\tau, \quad n \geq 0, \quad \rho_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и будем обозначать зависящую переменную $U(\rho, \theta)$ в узле сетки (ρ_i, θ^n) как U_i^n . Стандартная схема Русанова третьего порядка точности, предложенная в [4], состоит из трех этапов вычислений и может быть представлена как

$$U_{i+1/2}^{(1)} = (U_{i+1}^n + U_i^n)/2 - \frac{\tau}{3h}(F_{i+1}^n - F_i^n) + \frac{\tau}{3}(S_{i+1}^n + S_i^n)/2, \quad (17)$$

$$U_i^{(2)} = U_i^n - \frac{2\tau}{3h}(F_{i+1/2}^{(1)} - F_{i-1/2}^{(1)}) + \frac{2\tau}{3}(S_{i+1/2}^{(1)} + S_{i-1/2}^{(1)})/2, \quad (18)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{3\tau}{8h}(F_{i+1}^{(2)} - F_{i-1}^{(2)}) + \tau(S_i^n + 3S_i^{(2)})/4 - \frac{\tau}{24h}(-2F_{i+2}^n + 7F_{i+1}^n - 7F_{i-1}^n + 2F_{i-2}^n) - w_{32}(U_{i+2}^n - 4U_{i+1}^n + 6U_i^n - 4U_{i-1}^n + U_{i-2}^n), \quad (19)$$

где верхний индекс обозначает промежуточный шаг ((1) или (2)) или номер временного слоя (n или $n+1$). Обратим внимание, что значения функций, помеченные индексом (1), относятся к моменту времени $\theta^n + \tau/3$, поэтому величина $S_{i+1/2}^{(1)}$ вычисляется как $S(U_{i+1/2}^{(1)}, \rho_i + h/2, \theta^n + \tau/3)$.

Аналогично — индекс (2) относится к моменту времени $\theta^n + 2\tau/3$, поэтому, например, величина $S_i^{(2)}$ вычисляется как $S(U_i^{(2)}, \rho_i, \theta^n + 2\tau/3)$.

Отметим также, что последнее слагаемое в (19) не связано с точностью метода, так как пропорционально разностному оператору четвертого порядка. Зато оно влияет на устойчивость. В частности, в [4–6] для модельного уравнения $u_t + cu_x = 0$, $c = \text{const}$ показано, что устойчивость обеспечивается выполнением неравенств

$$|v| \leq 1, \quad 4v^2 - v^4 \leq 24w_{32} \leq 3, \quad \text{где} \quad v = c\tau/h. \quad (20)$$

Приведенная выше схема хорошо известна и давно используется в вычислительной практике. Ее свойства представлены в популярных монографиях, посвященных численному анализу и математическому моделированию (см., например, [18], [19]). Напомним, что она на гладких решениях имеет порядок аппроксимации $O(\tau^3 + h^4/\tau)$ и условие устойчивости $\tau = O(h)$, поэтому ее традиционно называют “схемой третьего порядка точности”.

2.2. Модификация на основе формулы Симпсона

Как правило, разностные методы формулируются для дивергентной формы уравнений (15), поэтому определенный интерес представляет “обход” недивергентной записи уравнения, описывающего динамику электрического поля,

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = V.$$

Определим с этой целью в произвольный требуемый момент времени θ , в данном случае играющий роль параметра, вспомогательную функцию $\phi(\rho, \theta)$ соотношениями

$$\frac{d\phi}{d\rho} = V \frac{\partial E}{\partial \rho}, \quad \phi(a, \theta) = \phi_a(\theta). \quad (21)$$

Заметим, что при достаточной гладкости определяющих правую часть функций $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$, функция $\phi(\rho, \theta)$ существует, единственна и обладает гладкостью не меньшей, чем $E(\rho, \theta)$.

Обратим также внимание, что в формулах (17)–(19) участвуют не просто значения φ в узлах сетки (либо с целыми, либо с дробными узлами), а разности этих значений, например, $(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$, представляющие собой по определению интегралы вида

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i \equiv \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{d\varphi}{d\rho} d\rho = \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} V \frac{\partial E}{\partial \rho} d\rho. \quad (22)$$

В целях аппроксимации интеграла в (22) воспользуемся квадратурной формулой Симпсона (парабол) [7], т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] + O((b-a)^5).$$

Учитывая, что в (22) длина отрезка интегрирования равна h , имеем

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{h}{6} \left[\left(V \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_i} + 4 \left(V \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_{i+1/2}} + \left(V \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_{i+1}} \right] + O(h^5).$$

Теперь, вспоминая, что при условии устойчивости вида $\tau = O(h)$ порядок точности метода Русанова на конечном отрезке интегрирования есть $O(\tau^3 + h^4/\tau)$ (см. [18], [19]), получаем, что локальная погрешность на одном шаге по времени, равная $O(\tau^4 + h^4)$, не ухудшится вследствие замены точного значения интеграла его аппроксимацией по формуле Симпсона, в силу погрешности последней порядка $O(h^5)$. Вышесказанное означает, что на гладких решениях разница в погрешности аппроксимации для дивергентной и недивергентной форм записи исходных уравнений не должна быть существенной.

Однако реализация такого подхода, впервые предложенного в работе [3], требует дополнительной вычислительной работы. В частности, для вычисления промежуточных величин

$$V(\rho_{i+1/2}, \theta), \quad \frac{\partial E}{\partial \rho}(\rho_{i+1/2}, \theta), \quad \frac{\partial E}{\partial \rho}(\rho_i, \theta)$$

необходимы формулы высокого порядка аппроксимации. Приведем их для полноты описания алгоритма:

$$y'(x) = \frac{-y(x+2h) + 8y(x+h) - 8y(x-h) + y(x-2h)}{12h} + O(h^4), \quad (23)$$

$$y'(x+h/2) = \frac{-y(x+2h) + 27y(x+h) - 27y(x) + y(x-h)}{24h} + O(h^4), \quad (24)$$

$$y(x+h/2) = \frac{-y(x+2h) + 9y(x+h) + 9y(x) - y(x-h)}{16} + O(h^4). \quad (25)$$

Конечно, от приближаемых величин здесь требуется повышенная гладкость: формулы (23) и (24) требуют $y(x) \in C^{(5)}$, а формула (25) — $y(x) \in C^{(4)}$. Заметим также, что вычисление электронной плотности по формуле (2) проводится с помощью соотношения (23).

В заключение раздела следует обратить внимание, что предложенная модификация известного метода никак не влияет на его условие устойчивости в классической версии — (20), которое было получено на основе как спектрального признака устойчивости и метода замороженных коэффициентов, так и метода дифференциального приближения (см. [18], [19]). Это связано с тем, что источникные члены в уравнениях плазменных колебаний изначально линейны, а линеаризация и дивергентной формы уравнений, и недивергентной, порождает одинаковые выражения при замораживании переменных коэффициентов.

Отметим, что обсуждаемая модификация схемы Русанова (17)–(19) на основе формулы Симпсона теоретически безупречна для расчета гладких решений, хотя вычислительные затраты при ее реализации представляются чрезмерными. Тем не менее упрощение модификации за счет использования более простой (и менее точной!) формулы прямоугольников, как это сделано в работе [3], не представляется возможным потому, что подобная замена понизит порядок точно-

сти по пространству до второго, точнее — до $O(h^3 / \tau)$, а это сразу приведет к потере смысла формул (17)–(19).

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

3.1. Тестовые расчеты с гладким решением

Рассмотрим задание решения в окрестности прямой $\rho = 0$ с помощью функции

$$F(x) = \alpha x \exp \left\{ -2 \frac{x^2}{\rho_*^2} \right\}, \quad \alpha = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2, \quad (26)$$

где параметры ρ_* и a_* характеризуют масштаб области локализации и максимальную величину $F_{\max} = a_*^2 / (\rho_* 2\sqrt{e}) \approx 0.3 a_*^2 / \rho_*$. Здесь $e = 2.71828\dots$ — основание натурального логарифма. Вид функции (26) выбран из соображений, что подобное возмущение электрического поля может возбуждаться в разреженной плазме ($\omega_i \gg \omega_p$) лазерным импульсом с частотой ω_i при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы, см. детали в [20]).

Построим с помощью (26) в области $[-d, d]$, $d = 5\rho_*$ тестовое гладкое решение системы уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \rho} + E = G_V, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} - V = G_E. \quad (27)$$

Правые части уравнений — функции $G_V(\rho, \theta)$ и $G_E(\rho, \theta)$ — определим с помощью точного решения

$$V(\rho, \theta) = F(\rho - \beta\rho_* \sin \theta) \sin \theta, \quad E(\rho, \theta) = F(\rho + \beta\rho_* \sin \theta) \cos \theta, \quad (28)$$

где для определенности зафиксированы параметры:

$$\beta = 0.5, \quad \rho_* = 0.6, \quad \alpha = 0.25.$$

Недостающие начальные и граничные условия берутся из формул (28), а контроль вычислений, кроме искомых функций $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$, дополнительно осуществляется за электронной плотностью

$$N(\rho, \theta) = 1 - F_x(\rho + \beta\rho_* \sin \theta) \cos \theta, \quad (29)$$

так как она является наименее гладкой из всех интересующих физических величин.

Применим для численного решения системы (27) модификацию схемы Русанова на основе формулы Симпсона из п. 2.2 с целью экспериментального наблюдения за порядком точности.

Результаты расчетов при $\tau = h$ ($|v| \leq 0.1$) и $w_{32} = 2 \times 10^{-3}$ приведены в табл. 1.

Колонка $\text{Err}(V)$ содержит величины погрешностей для скорости V , посчитанные по формуле $\max_{\rho, \theta} |V_i^n - V(\rho_i, \theta^n)|$ для области $\rho \in [-d, d]$, $\theta \in [0, 20.1]$, а колонка $\text{Rel}(V)$ — отношение погрешностей, взятых при $2h$ и h . Аналогичный смысл имеют колонки таблицы, характеризующие погрешности и их отношения для функций электрического поля E и плотности электронов N .

Таблица 1. Погрешности схемы Русанова для решения с $\alpha = 0.25$

$1/h$	$\text{Err}(V)$	$\text{Rel}(V)$	$\text{Err}(E)$	$\text{Rel}(E)$	$\text{Err}(N)$	$\text{Rel}(N)$
200	0.14907×10^{-6}	—	0.13879×10^{-6}	—	0.42601×10^{-5}	—
400	0.17971×10^{-7}	8.30	0.16715×10^{-7}	8.30	0.53217×10^{-6}	8.01
800	0.22035×10^{-8}	8.16	0.20492×10^{-8}	8.16	0.65903×10^{-7}	8.08
1600	0.27267×10^{-9}	8.08	0.25357×10^{-9}	8.08	0.81895×10^{-8}	8.05
3200	0.33927×10^{-10}	8.04	0.31571×10^{-10}	8.03	0.10267×10^{-8}	7.98

Таблица 2. Погрешности схемы Мак-Кормака для решения с $\alpha = 0.25$

$1/h$	$\text{Err}(V)$	$\text{Rel}(V)$	$\text{Err}(E)$	$\text{Rel}(E)$	$\text{Err}(N)$	$\text{Rel}(N)$
200	0.22015×10^{-4}	—	0.21057×10^{-4}	—	0.88364×10^{-3}	—
400	0.55348×10^{-5}	3.98	0.52656×10^{-5}	4.00	0.23465×10^{-3}	3.77
800	0.13860×10^{-5}	3.99	0.13161×10^{-5}	4.00	0.59433×10^{-4}	3.95
1600	0.34669×10^{-6}	4.00	0.32905×10^{-6}	4.00	0.14916×10^{-4}	3.98
3200	0.86687×10^{-7}	4.00	0.82267×10^{-7}	4.00	0.37327×10^{-5}	4.00

Смысл отношений весьма прост: как только погрешность решения начинает характеризоваться первым (главным) членом асимптотики, отношение должно быть похоже на 2^s , где s — порядок точности метода. Более точно, пусть для схемы Русанова, в силу порядка точности $s = 3$, справедливо

$$\text{Err}(V) = c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots,$$

где постоянные c_i , $i = 3, 4, \dots$, не зависят от параметров дискретизации, тогда если $\text{Rel}(V) = 8.16$, то шаг $h = 1/800$ еще слишком велик, чтобы правильно характеризовать главный член погрешности $c_3 h^3$. С другой стороны, шаг $h = 1/3200$ уже достаточно хорош, так как для него $\text{Rel}(V) = 8.04$, т.е. влияние младших членов погрешности на асимптотику не превышает 0.5%.

Главный вывод, который можно сделать на основе табл. 1: численные эксперименты наглядно демонстрируют теоретический (третий) порядок точности схемы Русанова, причем ее модификация на случай недивергентной формы уравнений этот порядок не ухудшает. Однако для преобладания в погрешности главного члена асимптотики требуется использование достаточно малых параметров дискретизации.

С целью сравнения со схемой Русанова приведем в табл. 2 результаты аналогичных расчетов для схемы Мак-Кормака, модификация которой для уравнений недивергентной формы опубликована в [3]. Все параметры задачи и смысл значений колонок полностью совпадают с аналогичными для схемы Русанова.

Схема Мак-Кормака имеет второй порядок точности ($s = 2$), т.е. погрешность для конкретной функции можно охарактеризовать формулой

$$\text{Err}(V) = \hat{c}_2 h^2 + \hat{c}_3 h^3 + \dots,$$

где постоянные $\hat{c}_i$, $i = 2, 3, \dots$, не зависят от параметров дискретизации.

Из данных табл. 2 следует, что влияние на главные члены погрешностей искомых функций $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$, не превосходящее 0.5%, достигается уже при $h = 1/800$, т.е. эффект преобладания достигается существенно быстрее, чем для схемы Русанова. Это легко объяснить ростом производных решения, т.е. доминированием величин c_3 над $\hat{c}_2$, c_4 над $\hat{c}_3$ и т.д.

В целом для задачи с гладким решением $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$ поведение погрешностей для схем различных порядков точности в табл. 1 и 2 вполне естественно. Их абсолютные значения для более точной схемы на несколько порядков меньше аналогов для менее точной схемы, что напрямую связано с различными объемами вычислительной работы при реализации этих схем. Экспериментальные данные свидетельствуют, что при одинаковых сеточных параметрах расчет по схеме Русанова длится примерно в 3.95 дольше, чем по схеме Мак-Кормака. Правда, оптимизация именно на предмет сокращения объема вычислительной работы для каждой из схем целенаправленно не производилась, но трехкратное увеличение вычислений в схеме Русанова по сравнению со схемой Мак-Кормака можно считать правдоподобным.

Менее очевидной является динамика погрешности для электронной плотности N , так как она полностью характеризуется порядком точности схемы. Плотность представляет собой констатату за вычетом градиента электрического поля E , поэтому формальный порядок точности градиента функции должен быть на единицу меньше порядка точности самой функции, однако расчеты свидетельствуют об одинаковых порядках. Это можно объяснить в рамках гипотезы о главном члене погрешности, т.е. при приближенном вычислении гладкой функции главный член

погрешности также является гладкой функцией. Иными словами, получаемое сеточное решение E_i^n является следом на сетке (проекцией) суммы достаточно гладких функций

$$E_i^n = E(\rho_i, \theta^n) + h^3 P(\rho_i, \theta^n) + o(h^3),$$

где $E(\rho, \theta)$ — гладкое решение дифференциального уравнения, а $P(\rho, \theta)$ — гладкий множитель, характеризующий главный член погрешности. В этом случае использование формулы (23) с погрешностью $O(h^4)$ для приближенного вычисления электронной плотности N приведет к сохранению порядка точности схемы Русанова. Аналогичные рассуждения справедливы и для величин меньшего порядка, порождаемых схемой Мак-Кормака и приведенных в табл. 2. Краткий вывод, связанный с поведением погрешности электронной плотности N , таков: порядок точности в обеих схемах такой же, как для $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$, хотя сами абсолютные значения погрешностей примерно на порядок больше.

3.2. Расчеты с менее гладким решением

Рассмотрим традиционную постановку для моделирования нерелятивистских колебаний в холодной плазме [2]. Положим, что скорость электронов в начальный момент времени ($\theta = 0$) равна нулю

$$V_0(\rho) \equiv V(\rho, \theta = 0) = 0, \quad (30)$$

а колебания возбуждаются в начальный момент времени электрическим полем следующего вида:

$$E_0(\rho) \equiv E(\rho, \theta = 0) = F(\rho). \quad (31)$$

Для однозначного задания начальных условий зафиксируем параметры: $\rho_* = 0.6$, $a_* = 0.414$. В результате получим $\alpha = 0.4761$. Обратим внимание, что условия (30), (31) удовлетворяют критерию (3), т.е. единственное 2π -периодическое по времени решение уравнений (1) глобально существует. Однако оно является менее гладким, чем рассмотренное в предыдущем разделе. Например, электронная плотность при $\alpha = 0.4761$ колеблется в диапазоне $[0.52, 10.96]$ (границы указаны с двумя верными знаками после десятичной точки), т.е. изменяется на периоде примерно в 20 раз. Тогда как при $\alpha = 0.25$ она изменяется за период всего в два раза.

Заметим, что на больших расстояниях от прямой $\rho = 0$, в силу начального условия (31), плазменные колебания не возбуждаются. Поэтому будем считать, что выполнены следующие условия:

$$V(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad E(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0. \quad (32)$$

Однако в целях численного моделирования плазменных колебаний расчетную область необходимо ограничить; определим ее по переменной ρ как отрезок $[-d, d]$, на концах которого следует задать искусственные граничные условия. Обсуждению их построения посвящен разд. 3.6 в [2], здесь же мы ограничимся “обрезанием” бесконечной области с помощью однородных граничных условий первого рода:

$$V(\pm d, \theta) = E(\pm d, \theta) = 0.$$

Конечно, параметр d следует выбирать достаточно большим. В силу экспоненциального затухания функции $E_0(\rho)$, достаточно положить $d = 4.5\rho_*$. В этом случае имеем $\exp^2\{-d^2/\rho_*^2\} \approx 2.5768 \times 10^{-18}$. Это означает, что при вычислениях с двойной точностью величина скачка начальной функции E_0 в точках $\rho = \pm d$ соизмерима с машинной точностью, т.е. с обычной погрешностью округления данных. Другими словами, при численном моделировании колебаний эффект обрезания начальных условий замечен совершенно не будет, что полностью соответствует понятию “искусственной границы”. Учитывая сказанное, параметр d , характеризующий искусственную границу, положим $d = 4.5\rho_*$. Ограничение расчетной области по переменной θ примем как отрезок $[0, 40\pi]$, считая, что 20 периодов достаточно для наблюдения за решением.

Вычисления проведем на последовательности вложенных сеток: $\tau = h \in \{1/1600, 1/3200, 1/6400, 1/12800\}$, удовлетворяющих условию устойчивости используемых численных алгоритмов. Основным интерес будут представлять эксперименты с расчетами по схеме Русанова третье-

Таблица 3. Погрешности схемы Русанова для решения с $\alpha = 0.4761$

$1/h$	$\text{Err}(Ax)$	$\text{Rel}(Ax)$	$\text{Err}(En)$	$\text{Rel}(En)$	$\text{Err}(Af)$	$\text{Rel}(Af)$
1600	0.17070×10^0	—	0.23101×10^{-4}	—	0.23101×10^{-4}	—
3200	0.74069×10^{-1}	2.30	0.37742×10^{-5}	6.12	0.37742×10^{-5}	6.12
6400	0.22495×10^{-1}	3.29	0.52576×10^{-6}	7.18	0.52576×10^{-6}	7.18
12800	0.45987×10^{-2}	4.89	0.67610×10^{-7}	7.78	0.67609×10^{-7}	7.78

го порядка точности, для сравнения будут использоваться вычисления схеме Мак-Кормака, имеющей второй порядок точности [3].

В данном случае аналитическое решение уравнений (1) в рассматриваемой области отсутствует, поэтому будем наблюдать за сохранением величин $En(\theta)$ (7) и $Af(\theta)$ (9), а также — за погрешностью формулы (14), характеризующей динамику электронной плотности на оси симметрии области.

Сделаем замечание о влиянии ограничения области по переменной ρ на сохранение величин $En(\theta)$ и $Af(\theta)$. В начальный момент времени $\theta = 0$ для начальных условий (30), (31) несложно вычислить точно

$$En(0) = Af(0) = \frac{a_*^4 \sqrt{\pi}}{\rho_* 16}.$$

Затем, используя составную формулу трапеций [7], вычислим приближенное значение тех же величин, но по ограниченной области $[-d, d]$:

$$En^d(0) = \int_{-d}^d E_0^2(\rho) d\rho, \quad Af^d(0) = \int_{-d}^d N_0(\rho) E_0^2(\rho) d\rho.$$

Относительная ошибка, возникающая вследствие замены ∞ на d с соответствующими знаками, для различных пространственных шагов h не превышала по порядку величины 10^{-14} , что дает основание пренебречь эффектом обрезания области.

Применим для численного решения системы (1) с начальными условиями (30), (31) модификацию схемы Русанова с целью экспериментального наблюдения за точностью решения. Результаты расчетов при $\tau = h$ ($|v| \leq 0.1$) и $w_{32} = 2 \times 10^{-3}$ приведены в табл. 3.

Колонка $\text{Err}(Ax)$ содержит величины относительных погрешностей для значений электронной плотности N на оси симметрии ($\rho = 0$), а колонка $\text{Rel}(Ax)$ — отношение этих погрешностей, взятых при $2h$ и h . В свою очередь, колонка $\text{Err}(En)$ содержит величины максимумов по времени для относительных погрешностей значений энергии En , т.е. результатов расчетов по формуле $\max_{\theta^n} |En(\theta^n) - En(0)| / En(0)$ для области $\rho \in [-d, d]$, $\theta \in [0, 40\pi]$. Для вычисления приближенных значений $En(\theta^n)$ использовалась составная формула трапеций [7]. Колонка $\text{Rel}(En)$ содержит отношения погрешностей, взятых при $2h$ и h . Аналогичный смысл имеют колонки таблицы, характеризующие относительные погрешности и их отношения для функции Af .

Главной особенностью результатов из табл. 3 является иллюстрация чрезвычайно медленного доминирования главного члена асимптотики для погрешностей рассматриваемых функций. Причиной этого может быть в разложении локальной погрешности

$$\text{Err}(Ax) = c_3 h^3 + c_4 h^4 + c_5 h^5 + \dots$$

сильный рост постоянных, т.е. $c_{k+1} \gg c_k$, $k \geq 3$, связанных с недостаточной гладкостью функции электронной плотности N в окрестности прямой $\rho = 0$. Ситуация с интегральными характеристиками En и Af заметно лучше, но отношения погрешностей, характеризующих порядок точности схемы Русанова, весьма далеки от их аналогов для гладкого решения (см. табл. 1).

С целью сравнения со схемой Русанова приведем в табл. 4 результаты аналогичных расчетов для схемы Мак-Кормака, где сохранены все параметры задачи и смысл значений колонок.

Таблица 4. Погрешности схемы Мак-Кормака для решения с $\alpha = 0.4761$

$1/h$	$\text{Err}(Ax)$	$\text{Rel}(Ax)$	$\text{Err}(En)$	$\text{Rel}(En)$	$\text{Err}(Af)$	$\text{Rel}(Af)$
1600	0.41861×10^{-1}	—	0.62113×10^{-5}	—	0.37771×10^{-4}	—
3200	0.12439×10^{-1}	3.36	0.15588×10^{-5}	3.98	0.96216×10^{-5}	3.93
6400	0.32984×10^{-2}	3.77	0.39010×10^{-6}	4.00	0.24177×10^{-5}	3.98
12800	0.83870×10^{-3}	3.93	0.97564×10^{-7}	4.00	0.60520×10^{-6}	3.99

Легко заметить, что асимптотический показатель скорости сходимости для схемы Мак-Кормака, равный двум, при уменьшении параметров дискретизации наблюдается гораздо быстрее, т.е. эффект насыщения погрешности достигается при меньших h . Соответственно, для разложения погрешности

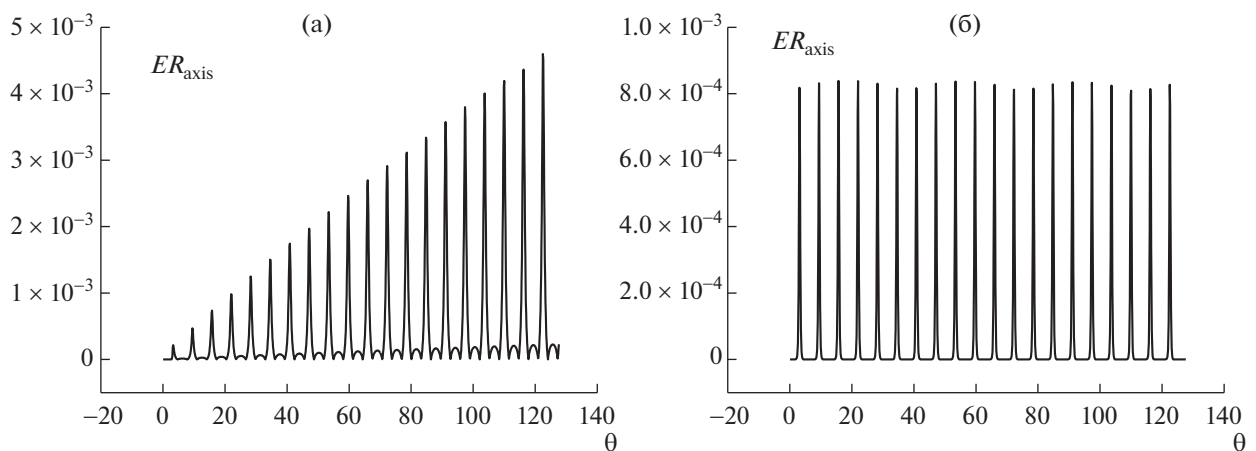
$$\text{Err}(Ax) = \hat{c}_2 h^2 + \hat{c}_3 h^3 + \hat{c}_4 h^4 + \dots;$$

здесь можно предположить, что рост постоянных $\hat{c}_k$ также имеет место, но он не столь значителен, как для схемы Русанова. Весьма любопытным является то, что сами погрешности $\text{Err}(Ax)$ при всех использованных параметрах τ и h для схемы Мак-Кормака меньше, чем для схемы Русанова. Видимо, это объясняется большой разницей постоянных при главных членах погрешностей в схемах, т.е. $\hat{c}_2 \ll c_3$.

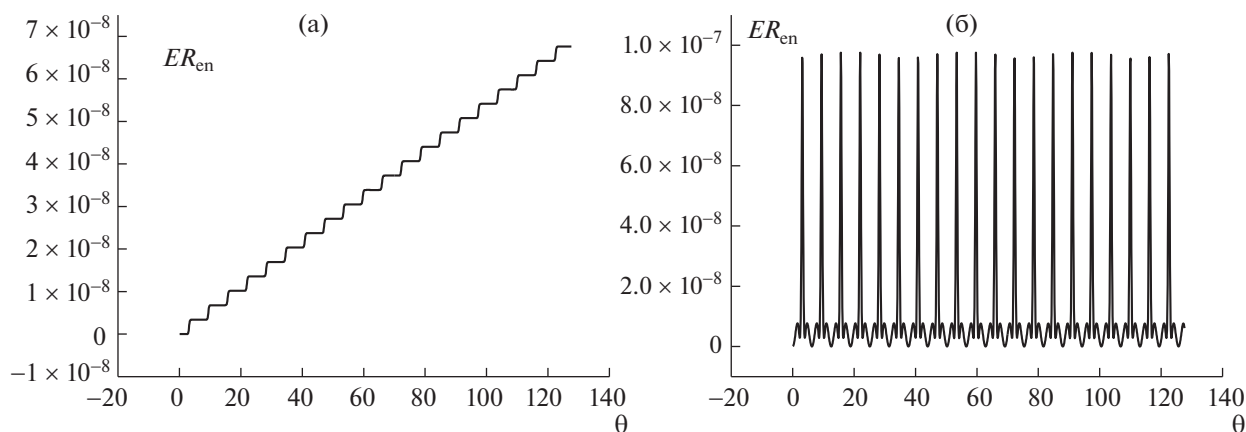
Таким образом, сравнение схем Мак-Кормака и Русанова на менее гладком решении (с $\alpha = 0.4761$) указывает, что схема Русанова точнее в теоретическом плане, а для практики предпочтительнее схема Мак-Кормака. Иными словами, преимущество схемы Русанова станет заметно только при достаточно малых параметрах дискретизации, возможно недостижимых для реальных расчетов колебаний холодной плазмы. Заметим, что параметры задачи ρ_* и a_* в обсуждаемых численных экспериментах не являются критическими, т.е. градиенты решения еще весьма далеки от сингулярных. Формально дифференциальная задача еще хороша, а посчитать ее по схеме Русанова уже трудно.

В завершение процедуры сравнения двух рассматриваемых схем рассмотрим качественную динамику их погрешностей на больших временах (порядка 20 периодов); все иллюстрации сделаны на основании расчетов при $\tau = h = 1/12800$.

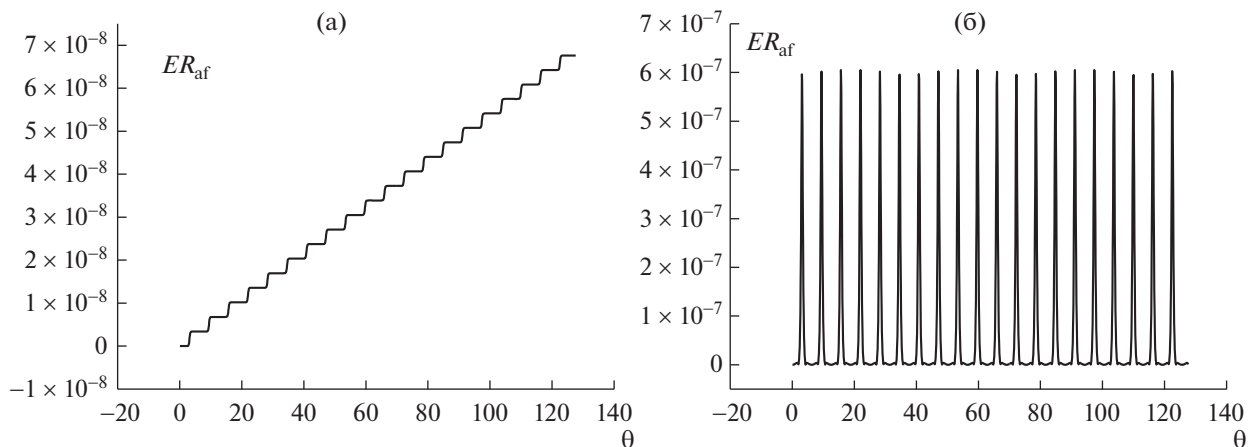
На фиг. 1 представлена посчитанная по обеим схемам динамика относительной погрешности плотности электронов в центре области. Легко заметить качественное отличие в поведении погрешности для представленных схем. Для схемы Мак-Кормака погрешность является равномерно ограниченной величиной, изменяющейся в течение каждого периода пропорционально функции электронной плотности. При этом само ограничивающее значение убывает строго в



Фиг. 1. Динамика относительной погрешности плотности электронов в центре области $N(\rho = 0, \theta)$; а — для схемы Русанова, б — для схемы Мак-Кормака.



Фиг. 2. Динамика относительной погрешности энергии $En(\theta)$; а — для схемы Русанова, б — для схемы Мак-Кормака.



Фиг. 3. Динамика относительной погрешности функции $Af(\theta)$; а — для схемы Русанова, б — для схемы Мак-Кормака.

соответствии с теорией как величина второго порядка малости, т.е. при уменьшении параметров τ и h в два раза оно убывает в четыре раза. В свою очередь, для схемы Русанова из графика наблюдаем, что верхняя огибающая колеблющейся погрешности представляет собой линейную по времени функцию. Учитывая, что свойства аппроксимации и устойчивости имеют асимптотический характер, т.е. справедливы при достаточно малых параметрах дискретизации, можно предположить, что линейный рост погрешности при больших значениях времени наблюдения за решением приведет к отсутствию близости точного и приближенного решений задачи. Напомним также, что сами ограничивающие погрешности величины различаются примерно в 5 раз в пользу схемы Мак-Кормака.

На фиг. 2 представлена посчитанная по обеим схемам динамика относительной погрешности энергии. Как и при анализе погрешности аксиального решения для плотности электронов, погрешность энергии, посчитанная по схеме Мак-Кормака, ведет себя в полном соответствии с теорией: при уменьшении параметров дискретизации она квадратично убывает и, кроме того, — равномерно ограничена по времени. Расчеты, проведенные по схеме Русанова, также близки к теоретическим, а сами значения погрешности меньше, чем для схемы Мак-Кормака. Однако здесь для схемы Русанова также наблюдается линейный рост погрешности в зависимости от длины интервала времени, что нельзя никак отнести к достоинству схемы.

На фиг. 3 представлена посчитанная по обеим схемам динамика относительной погрешности дополнительной функции $Af(\theta)$ (9). Как и при анализе погрешностей плотности и энергии, погрешность дополнительной функции, посчитанная по схеме МакКормака, ведет себя практиче-

ски идеально: при уменьшении параметров дискретизации она квадратично убывает и, кроме того, — равномерно ограничена по времени. Расчеты, проведенные по схеме Русанова, также согласуются с теорией, однако относительная погрешность, как и в предыдущих расчетах, линейно растет во времени. Можно также отметить, что погрешность дополнительной функции $A_f(\theta)$ для схемы Русанова асимптотически стремится к погрешности энергии $En(\theta)$: на малых временах они немного отличаются, зато на больших практически совпадают.

На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1) при проведении многопериодного моделирования традиционных (не очень гладких!) плазменных колебаний схема Мак-Кормака обладает несомненными преимуществами по сравнению со схемой Русанова как качественного (равномерное ограничение всех видов погрешностей), так и количественного характера (при доступных параметрах дискретизации погрешность важнейшей физической характеристики — электронной плотности — меньше);

2) схемы более высокого порядка точности имеют преимущества на более гладких решениях;

3) для повышения достоверности вычислений, кроме стандартных теоретических исследований аппроксимации и устойчивости, необходимо использовать контроль как за частными аналитическими решениями, так и за сохранением энергии и других дополнительных функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для моделирования нерелятивистских колебаний холодной плазмы предложена модификация классической схемы Русанова, имеющей третий порядок точности. Отметим, что ранее для расчетов в эйлеровых переменных были известны только схемы первого [15] и второго [3] порядков точности. Для тестовой задачи с гладким решением проведено исследование погрешностей построенной схемы, а также — сравнение с погрешностями схемы Мак-Кормака [3]. Для задачи о свободных плазменных колебаниях, инициированных коротким мощным лазерным импульсом, приведены результаты численных экспериментов по сохранению энергии и дополнительной функции для обеих схем, а также по точности электронной плотности в центре области (при $\rho = 0$). На основании проведенных расчетов можно сделать вывод о теоретическом превосходстве схемы Русанова, хотя для практических вычислений следует рекомендовать схему Мак-Кормака. В первую очередь это касается расчетов “долгоживущих” процессов и колебаний холодной плазмы, близких к реальным. Кроме этого, подтвердим точку зрения, что теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости вместе с экспериментальным наблюдением за количественными характеристиками погрешности для наиболее чувствительных величин существенно повышает достоверность вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2012. С. 46–100.
2. Чижонков Е.В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018. С. 12–240.
3. Чижонков Е.В. О схемах второго порядка точности для моделирования плазменных колебаний // Вычисл. методы и программирование. 2020. Т. 21. С. 115.
4. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303.
5. Rusanov V.V. On difference schemes of third order of accuracy for non-linear hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 1970. V. 5. № 3. P. 507.
6. Burstein S.Z., Mirin A.A. Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comput. Phys. 1970. V. 5. № 3. P. 547.
7. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решения задач и упражнения. Серия Классический университетский учебник. Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. и дополн. М.: Лаборатория знаний, 2016. С. 95–96.
8. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. школа, 1988. С. 102–113.
9. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975. С. 112–124.
10. Davidson R.C. Methods in nonlinear plasma theory. New York: Academic Press, 1972. P. 33–53.
11. Dafermos C.M. Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. The 4th Edition, Berlin-Heidelberg: Springer, 2016. P. 221–225.

12. *Engelberg S., Liu H., Tadmor E.* Critical Thresholds in Euler – Poisson Equations // *Indiana University Math. J.* 2001. V. 50. P. 109.
13. *Розанова О.С., Чижонков Е.В.* О существовании глобального решения одной гиперболической задачи // *Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. Т. 492. № 1. С. 97.
14. *Rozanova O.S., Chizhonkov E.V.* On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // *Z. Angew. Math. Phys.* 2021. V. 72. № 13. P. 1.
15. *Фролов А.А., Чижонков Е.В.* О применении закона сохранения энергии в модели холодной плазмы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 3. С. 503.
16. *Розанова О.С., Чижонков Е.В.* Об аналитическом и численном решении одномерных уравнений холодной плазмы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 9. С. 1508.
17. *MacCormack R.W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // *J. Spacecr. Rockets.* 2003. V. 40. № 5. P. 757.
18. *Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. С. 251–252.
19. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990. С. 179–180.
20. *Sheppard C.J.R.* Cylindrical lenses – focusing and imaging: a review [Invited] // *Applied Optics.* 2013. V. 52. № 4. P. 538.