

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 517.956

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ¹⁾

© 2023 г. А. М. Денисов^{1,*}

¹ 119999 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия

*e-mail: den@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 10.09.2022 г.
Переработанный вариант 10.09.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением рассматривается обратная задача, состоящая в определении граничного условия по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Доказано, что приближенное решение обратной задачи может быть получено на основе использования конечного числа членов разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру. Библ. 11.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение теплопроводности, сингулярное возмущение, обратная задача, приближенное решение.

DOI: 10.31857/S0044466923050095, EDN: PKNZWI

В многообразии обратных задач для уравнений в частных производных можно выделить класс, в котором обратные задачи рассматриваются для сингулярно возмущенных уравнений. Методы приближенного решения обратных задач, основанные на замене исходного дифференциального уравнения сингулярно возмущенным, были предложены в [1] и получили затем развитие в [2–6] и ряде других работ. Обратные задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений исследовались в [7–11].

В работе [11] для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением были предложены методы приближенного решения обратных задач, основанные на использовании разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру. Эта статья посвящена применению этого подхода для приближенного решения обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением.

Рассмотрим начально-краевую задачу для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением

$$\varepsilon^2 u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \varepsilon^2 \int_0^t K(t, \tau) u(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (2)$$

$$u_x(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (4)$$

где $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$, $Q_{t_0} = \{(x, t) : 0 < x < \pi, 0 < t \leq t_0\}$.

Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(4) от параметра ε , будем обозначать его через $u(x, t; \varepsilon)$.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект 075-15-2022-284).

Предположим, что функция $\mu \in C^2[0, T]$, $\mu(0) = 0$, а $K(t, \tau) \in C(\Delta_{t_0})$, где $\Delta_{t_0} = \{(t, \tau), 0 \leq \tau \leq t \leq t_0\}$. Из метода разделения переменных следует формула для решения задачи (1)–(4)

$$u(x, t; \varepsilon) = \mu(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} T_n(t; \varepsilon) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \quad (5)$$

где функции $T_n(t; \varepsilon)$ являются решениями задачи Коши для интегродифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 T_n'(t; \varepsilon) = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 T_n(t; \varepsilon) + \varepsilon^2 \int_0^t K(t, \tau) T_n(\tau; \varepsilon) d\tau - \varepsilon^2 \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right], \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (6)$$

$$T_n(0, \varepsilon) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (6) с начальным условием (7), получим, что $T_n(t; \varepsilon)$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$T_n(t; \varepsilon) = \int_0^t B(t, \tau; \varepsilon, n) T_n(\tau; \varepsilon) d\tau + \psi(t; \varepsilon, n), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (8)$$

где

$$B(t, \tau; \varepsilon, n) = \int_{\tau}^t \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4\varepsilon^2}(t-\theta)\right) K(\theta, \tau) d\theta, \quad (9)$$

$$\psi(t; \varepsilon, n) = -\int_0^t \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4\varepsilon^2}(t-\tau)\right) \left[\mu'(\tau) - \int_0^{\tau} K(\tau, \theta) \mu(\theta) d\theta \right] d\tau. \quad (10)$$

Сформулируем обратную задачу. Пусть функция $K(t, \tau)$ и число ε заданы, а функция $\mu(t)$ неизвестна. Требуется определить $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(4)

$$u(x_0, t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (11)$$

где x_0 – заданное число, $x_0 \in (0, \pi]$, а $g(t; \varepsilon)$ – заданная функция.

Из формулы (5) и уравнения (8) следует, что можно получить разложение $u(x, t; \varepsilon)$ по малому параметру ε .

Рассмотрим вопрос о возможности построения приближенного решения обратной задачи на основе использования этого разложения.

Так как функция $T_n(t; \varepsilon)$ является решением уравнения (8), то для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$\max_{[0, t_0]} |T_n(t; \varepsilon)| \leq c_1 \frac{\varepsilon^2}{(2n+1)^2}.$$

Здесь и далее через c обозначаются постоянные, не зависящие от ε и n .

Из предыдущего неравенства и формулы (5) следует, что для $u(x, t; \varepsilon)$ справедливо представление

$$u(x, t; \varepsilon) = \mu(t) + \varepsilon^2 w_0(x, t; \varepsilon), \quad (12)$$

где

$$\max_{Q_{t_0}} |w_0(x, t; \varepsilon)| \leq c_2.$$

Определив приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$ следующим образом $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon)$ и используя представление (12), имеем

$$\max_{[0, t_0]} |\mu(t) - \tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)| = \varepsilon^2 \max_{[0, t_0]} |w_0(x_0, t; \varepsilon)| \leq c_2 \varepsilon^2.$$

Таким образом, при малых значениях ε функцию $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$ можно считать приближенным решением обратной задачи.

Рассмотрим вариант построения приближенного решения обратной задачи, использующий более высокие члены разложения $u(x, t; \varepsilon)$ по малому параметру.

Введем функцию $f_1(x) = x^2/2 - \pi x$.

Теорема 1. Пусть функции $K(t, \tau)$, $\mu(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$K(t, \tau), K_t(t, \tau) \in C(\Delta_{t_0}), \quad \|K\|_{C(\Delta_{t_0})} t_0 |f_1(x_0)| \varepsilon_0^2 < 1, \tag{13}$$

$\mu \in C^2[0, t_0]$, $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, $\mu(t_0) = m_0$, где m_0 – заданное число. Тогда, если функция $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ является решением задачи

$$\varepsilon^2 f_1(x_0) \tilde{\mu}'_1(t; \varepsilon) + \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon) - \varepsilon^2 f_1(x_0) \int_0^t K(t, \tau) \tilde{\mu}_1(\tau; \varepsilon) d\tau = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_0, \tag{14}$$

$$\tilde{\mu}_1(t_0; \varepsilon) = m_0, \tag{15}$$

то

$$\max_{[0, t_0]} |\mu(t) - \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)| \leq c_3 \varepsilon^4. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим функции $T_n(t; \varepsilon)$, являющиеся решением интегрального уравнения (8). Используя резольвенту $R(t, \tau; \varepsilon, n)$ ядра $B(t, \tau; \varepsilon, n)$, имеем

$$T_n(t; \varepsilon) = \psi(t; \varepsilon, n) + \int_0^t R(t, \tau; \varepsilon, n) \psi(\tau; \varepsilon, n) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0. \tag{17}$$

Интегрируя по частям интеграл в формуле (9), получим следующую оценку:

$$\max_{\Delta_{t_0}} |B(t, \tau; \varepsilon, n)| \leq c_4 \frac{\varepsilon^2}{(2n+1)^2},$$

из которой следует, что

$$\max_{\Delta_{t_0}} |R(t, \tau; \varepsilon, n)| \leq c_5 \frac{\varepsilon^2}{(2n+1)^2}. \tag{18}$$

Преобразуя формулу (10), имеем

$$\psi(t; \varepsilon, n) = -\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2} \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] + w_1(t; \varepsilon, n), \tag{19}$$

где

$$w_1(t; \varepsilon, n) = \frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4\varepsilon^2}(t-\tau)\right) \left[\mu''(\tau) - K(\tau, \tau) \mu(\tau) - \int_0^\tau K_\tau(\tau, \theta) \mu(\theta) d\theta \right] d\tau, \tag{20}$$

а

$$\max_{[0, t_0]} |w_1(t; \varepsilon, n)| \leq c_6 \frac{\varepsilon^4}{(2n+1)^4}. \tag{21}$$

Из формул (17), (19), (20) и оценок (18), (21) следует, что

$$T_n(t; \varepsilon) = -\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2} \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] + w_2(t; \varepsilon, n), \quad (22)$$

где

$$\max_{|0, t_0|} |w_2(t; \varepsilon, n)| \leq c_7 \frac{\varepsilon^4}{(2n+1)^4}. \quad (23)$$

Используя формулы (5), (22), оценку (23) и равенство

$$f_1(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi(2n+1)^3} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right),$$

получим, что для $u(x, t; \varepsilon)$ справедливо представление

$$u(x, t; \varepsilon) = \mu(t) + \varepsilon^2 f_1(x) \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] + \varepsilon^4 w_3(x, t; \varepsilon), \quad (24)$$

где $\max_{\bar{Q}_0} |w_3(x, t; \varepsilon)| \leq c_8$.

Положив в равенстве (24) $x = x_0$ и используя условие (11), имеем

$$\mu(t) + \varepsilon^2 f_1(x_0) \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] = g(t; \varepsilon) - \varepsilon^4 w_3(x_0, t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (25)$$

Пусть $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ – решение задачи (14), (15). Рассмотрим функцию $z(t; \varepsilon) = \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon) - \mu(t)$. Из уравнения (14), равенства (25) и условия (15) получаем, что $z(t; \varepsilon)$ является решением задачи

$$z'(t; \varepsilon) + (\varepsilon^2 f_1(x_0))^{-1} z(t; \varepsilon) - \int_0^t K(t, \tau) z(\tau; \varepsilon) d\tau = \varepsilon^2 (f_1(x_0))^{-1} w_3(x_0, t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad z(t_0, \varepsilon) = 0.$$

Следовательно, $z(t; \varepsilon)$ является решением интегрального уравнения

$$z(t; \varepsilon) = -\int_t^{t_0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varepsilon^2 f_1(x_0)}\right) \int_0^\tau K(\tau, \theta) z(\theta; \varepsilon) d\theta d\tau - \varepsilon^2 (f_1(x_0))^{-1} \int_t^{t_0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varepsilon^2 f_1(x_0)}\right) w_3(x_0, \tau; \varepsilon) d\tau.$$

Используя это уравнение, условие (13) и оценку для функции $w_3(x_0, t; \varepsilon)$, имеем

$$\max_{|0, t_0|} |z(t; \varepsilon)| \leq c_3 \varepsilon^4.$$

Следовательно, справедлива оценка (16) и теорема 1 доказана.

Замечание 1. Очевидно, что при замене начального условия (15) на $\tilde{\mu}_1(0; \varepsilon) = 0$ решение уравнения (14) с этим условием не будет приближенным решением обратной задачи.

Покажем, что при дополнительных предположениях можно получить приближенное решение обратной задачи с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^6)$.

Введем функцию

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi(2n+1)^5} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) = \frac{x^4}{24} - \frac{\pi x^3}{6} + \frac{\pi^3 x}{3}.$$

Рассмотрим следующую задачу для функции $y(t; \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^4 f_2(x_0) y''(t; \varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0) y'(t; \varepsilon) + y(t; \varepsilon) = H(t; \varepsilon) + \\ & + \varepsilon^4 f_2(x_0) \left[2K(t, t) y(t; \varepsilon) + \int_0^t \left(K_t(t, \tau) - K_\tau(t, \tau) - \int_\tau^t K(t, \theta) K(\theta, \tau) d\theta \right) y(\tau; \varepsilon) d\tau \right] + \\ & + \varepsilon^2 f_1(x_0) \int_0^t K(t, \tau) y(\tau; \varepsilon) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$y(t_0; \varepsilon) = y_0, \quad y'(t_0; \varepsilon) = y_1, \tag{27}$$

где $H(t; \varepsilon)$ – заданная функция, а y_0 и y_1 – заданные числа.

Введем числа

$$a = -\frac{f_1(x_0)}{2f_2(x_0)} > 0, \quad b = \sqrt{\frac{4f_2(x_0) - (f_1(x_0))^2}{4(f_2(x_0))^2}}.$$

Лемма. Если выполнены следующие условия: $K \in C^1(\Delta_{t_0})$, $H \in C[0, t_0]$,

$$\frac{\varepsilon_0^2}{abf_2(x_0)} \left[\|K\|_{C(\Delta_{t_0})} (|f_1(x_0)|t_0 + 2\varepsilon^2 f_2(x_0)) \right] + \frac{\varepsilon_0^4}{ab} \left[(\|K_t\|_{C(\Delta_{t_0})} + \|K_\tau\|_{C(\Delta_{t_0})}) t_0 + \|K\|_{C(\Delta_{t_0})}^2 t_0^2 / 2 \right] < 1, \tag{28}$$

то существует единственная функция $y \in C^2[0, t_0]$, являющаяся решением задачи (26), (27).

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для функции $v(t; \varepsilon)$

$$\varepsilon^4 f_2(x_0) v''(t; \varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0) v'(t; \varepsilon) + v(t; \varepsilon) = Q(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \tag{29}$$

$$v(t_0, \varepsilon) = y_0, \quad v'(t_0, \varepsilon) = y_1. \tag{30}$$

Так как $f_1(x_0) < 0$, $f_2(x_0) > 0$ и $4f_2(x_0) - (f_1(x_0))^2 > 0$, то корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \frac{f_1(x_0)}{\varepsilon^2 f_2(x_0)} \lambda + \frac{1}{\varepsilon^4 f_2(x_0)} = 0$$

равны $\lambda_{1,2} = a/(\varepsilon^2) \pm ib/(\varepsilon^2)$.

Решение задачи (29), (30) определяется формулой

$$\begin{aligned} v(t; \varepsilon) = & y_0 \exp\left(\frac{a}{\varepsilon^2}(t - t_0)\right) \cos\left(\frac{b}{\varepsilon^2}(t - t_0)\right) + \frac{y_1 \varepsilon^2 - ay_0}{b} E(t - t_0; \varepsilon) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2 f_2(x_0) b} \int_t^{t_0} E(t - \tau; \varepsilon) Q(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0, \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$E(t - \tau; \varepsilon) = \exp\left(\frac{a}{\varepsilon^2}(t - \tau)\right) \sin\left(\frac{b}{\varepsilon^2}(t - \tau)\right).$$

Пусть функция $y(t; \varepsilon)$ является решением задачи (26), (27). Используя формулу (31), получим, что $y(t; \varepsilon)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} y(t; \varepsilon) = & y_0 \exp\left(\frac{a}{\varepsilon^2}(t - t_0)\right) \cos\left(\frac{b}{\varepsilon^2}(t - t_0)\right) + \frac{y_1 \varepsilon^2 - ay_0}{b} E(t - t_0; \varepsilon) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2 f_2(x_0) b} \int_t^{t_0} E(t - \tau; \varepsilon) H(\tau; \varepsilon) d\tau - \\ & - \frac{1}{f_2(x_0) b} \int_t^{t_0} E(t - \tau; \varepsilon) \left[f_1(x_0) \int_0^\tau K(\tau, \theta) y(\theta; \varepsilon) d\theta + 2\varepsilon^2 f_2(x_0) K(\tau, \tau) y(\tau; \varepsilon) \right] d\tau - \end{aligned} \tag{32}$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{b} \int_t^{t_0} E(t-\tau; \varepsilon) \int_0^\tau \left[K_\tau(\tau, \theta) - K_\theta(\tau, \theta) - \int_\theta^\tau K(\tau, \xi) K(\xi, \theta) d\xi \right] y(\theta; \xi) d\theta d\tau.$$

Уравнение (32) является уравнением Фредгольма II рода для функции $y(t; \varepsilon)$. Из условий леммы следует, что оно имеет единственное решение $y \in C^2[0, t_0]$, которое является решением задачи (26), (27). Лемма доказана.

Предположим, что известны значения функции $\mu(t)$ и ее производной при $t = t_0$: $\mu(t_0) = m_0$, $\mu'(t_0) = m_1$. Пусть $K \in C^1(\Delta_{t_0})$ и выполнено условие (28). Тогда из леммы следует, что существует единственная функция $\tilde{\mu}_2(t; \varepsilon) \in C^2[0, t_0]$, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 f_2(x_0) \tilde{\mu}_2''(t; \varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0) \tilde{\mu}_2'(t; \varepsilon) + \tilde{\mu}_2(t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon) + \\ + \varepsilon^4 f_2(x_0) \left[2K(t, t) \tilde{\mu}_2(t; \varepsilon) + \int_0^t \left(K_t(t, \tau) - K_\tau(t, \tau) - \int_\tau^t K(t, \theta) K(\theta, \tau) d\theta \right) \tilde{\mu}_2(\tau; \varepsilon) d\tau \right] + \\ + \varepsilon^2 f_1(x_0) \int_0^t K(t, \tau) \tilde{\mu}_2(\tau; \varepsilon) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tilde{\mu}_2(t_0; \varepsilon) = m_0, \quad \tilde{\mu}_2'(t_0; \varepsilon) = m_1. \quad (34)$$

Теорема 2. *Предположим, что $\mu \in C^3[0, t_0]$, $\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$, $\mu(t_0) = m_0$, $\mu'(t_0) = m_1$, $K \in C^2(\Delta_{t_0})$ и выполнено условие (28). Тогда*

$$\max_{[0, t_0]} |\tilde{\mu}_2(t; \varepsilon) - \mu(t)| \leq c_9 \varepsilon^6. \quad (35)$$

Доказательство. Преобразуем формулу (19) для свободного члена $\psi(t; \varepsilon, n)$ уравнения (8)

$$\begin{aligned} \psi(t; \varepsilon, n) = -\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2} \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] + w_1(t; \varepsilon, n) = -\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2} \times \\ \times \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] + \frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4} \left[\mu''(t) - K(t, t) \mu(t) - \int_0^t K_t(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] + w_4(t; \varepsilon, n), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\max_{[0, t_0]} |w_4(t; \varepsilon, n)| \leq c_{10} \frac{\varepsilon^6}{(2n+1)^6}.$$

Для резольвенты $R(t, \tau; \varepsilon, n)$ ядра $B(t, \tau; \varepsilon, n)$ справедливо представление

$$R(t, \tau; \varepsilon, n) = B(t, \tau; \varepsilon, n) + R_1(t, \tau; \varepsilon, n), \quad \max_{\bar{Q}_{t_0}} |R_1(t, \tau; \varepsilon, n)| \leq c_{11} \frac{\varepsilon^4}{(2n+1)^4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^t R(t, \tau; \varepsilon, n) \psi(\tau; \varepsilon, n) d\tau = -\frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4} \int_0^t K(t, \tau) \left[\mu'(\tau) - \int_0^\tau K(\tau, \xi) \mu(\xi) d\xi \right] d\tau + w_5(t; \varepsilon, n) = \\ = -\frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4} K(t, t) \mu(t) + \frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4} \int_0^t \left[K_\tau(t, \tau) + \int_\tau^t K(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi \right] \mu(\tau) d\tau + w_5(t; \varepsilon, n), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\max_{[0, t_0]} |w_5(t; \varepsilon, n)| \leq c_{12} \frac{\varepsilon^6}{(2n+1)^6}.$$

Учитывая формулы (36), (37), получаем следующее представление для функции $T_n(t; \varepsilon)$, являющейся решением интегрального уравнения (8)

$$T_n(t; \varepsilon) = -\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2} \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau)\mu(\tau)d\tau \right] + \frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4} \left[\mu''(t) - K(t, t)\mu(t) - \int_0^t K_t(t, \tau)\mu(\tau)d\tau \right] - \frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4} \left[K(t, t)\mu(t) - \int_0^t \left[K_\tau(t, \tau) + \int_\tau^t K(t, \xi)K(\xi, \tau)d\xi \right] \mu(\tau)d\tau \right] + w_6(t; \varepsilon, n), \tag{38}$$

где

$$\max_{[0, t_0]} |w_6(t; \varepsilon, n)| \leq c_{13} \frac{\varepsilon^6}{(2n+1)^6}.$$

Из формул (5), (38) и определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ следует асимптотическое представление решения задачи (1)–(4)

$$u(x, t; \varepsilon) = \mu(t) + \varepsilon^2 f_1(x) \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t, \tau)\mu(\tau)d\tau \right] + \varepsilon^4 f_2(x) \mu''(t) - \varepsilon^4 f_2(x) \left[2K(t, t)\mu(t) + \int_0^t \left[K_t(t, \tau) - K_\tau(t, \tau) - \int_\tau^t K(t, \xi)K(\xi, \tau)d\xi \right] \mu(\tau)d\tau \right] + w_7(x, t; \varepsilon),$$

где

$$\max_{Q_{t_0}} |w_7(x, t; \varepsilon)| \leq c_{14} \varepsilon^6.$$

Положив $x = x_0$ и используя условие (11), имеем

$$\varepsilon^4 f_2(x_0) \mu''(t) + \varepsilon^2 f_1(x_0) \mu'(t) + \mu(t) = g(t; \varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0) \int_0^t K(t, \tau)\mu(\tau)d\tau + 2\varepsilon^4 f_2(x_0) K(t, t)\mu(t) + \varepsilon^4 f_2(x_0) \int_0^t \left[K_t(t, \tau) - K_\tau(t, \tau) - \int_\tau^t K(t, \xi)K(\xi, \tau)d\xi \right] \mu(\tau)d\tau + w_7(x_0, t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_0. \tag{39}$$

Введем функцию $z(t; \varepsilon) = \mu(t) - \mu_2(t; \varepsilon)$. Из уравнений (39), (33) и условий (34) следует, что функция $z(t; \varepsilon)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} & \varepsilon^4 f_2(x_0) z''(t; \varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0) z'(t; \varepsilon) + z(t; \varepsilon) = w_7(x_0, t; \varepsilon) + \\ & + \varepsilon^4 f_2(x_0) \left[2K(t, t)z(t; \varepsilon) + \int_0^t \left(K_t(t, \tau) - K_\tau(t, \tau) - \int_\tau^t K(t, \theta)K(\theta, \tau)d\theta \right) z(\tau; \varepsilon)d\tau \right] + \\ & + \varepsilon^2 f_1(x_0) \int_0^t K(t, \tau)z(\tau; \varepsilon)d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ & z(t_0; \varepsilon) = 0, \quad z'(t_0; \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству леммы, используя формулу (31), получим, что $z(t; \varepsilon)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
z(t; \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon^2 f_2(x_0) b} \int_t^{t_0} E(t - \tau; \varepsilon) w_7(x_0, \tau; \varepsilon) d\tau - \\
& -\frac{1}{f_2(x_0) b} \int_t^{t_0} E(t - \tau; \varepsilon) \left[f_1(x_0) \int_0^\tau K(\tau, \theta) z(\theta; \varepsilon) d\theta + 2\varepsilon^2 f_2(x_0) K(\tau, \tau) z(\tau; \varepsilon) \right] d\tau - \\
& -\frac{\varepsilon^2}{b} \int_t^{t_0} E(t - \tau; \varepsilon) \int_0^\tau \left[K_\tau(\tau, \theta) - K_\theta(\tau, \theta) - \int_\theta^\tau K(\tau, \xi) K(\xi, \theta) d\xi \right] z(\theta; \xi) d\theta d\tau.
\end{aligned} \tag{40}$$

Уравнение (40) является уравнением Фредгольма II рода для функции $z(t; \varepsilon)$. Для свободного члена этого уравнения справедлива оценка

$$\max_{|0, t_0|} \left| \frac{1}{\varepsilon^2 f_2(x_0) b} \int_t^{t_0} E(t - \tau; \varepsilon) w_7(x_0, \tau; \varepsilon) d\tau \right| \leq c_{15} \varepsilon^6.$$

Из этого неравенства, условия (28) и уравнения (40) следует оценка (35) и теорема 2 доказана.

Замечание 2. Очевидно, что при замене начальных условий (34) на

$$\tilde{\mu}_2(0; \varepsilon) = 0, \quad \tilde{\mu}'_2(0; \varepsilon) = 0,$$

решение уравнения (33) с этими условиями не будет приближенным решением обратной задачи.

Замечание 3. Используя более высокие члены разложения задачи (1)–(4) по малому параметру, можно получить приближенное решение с более высокой по порядку оценкой погрешности. Однако интегральное уравнение для приближенного решения будет очень громоздким.

Замечание 4. В случае, когда $K(t, \tau) = 0$, т.е. уравнение (1) представляет собой обычное уравнение теплопроводности, построенные приближенные решения определяются простыми явными формулами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир. 1970.
2. Иванов В.К. Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. ур-ния. 1972. Т. 8. № 4. С. 652–658.
3. Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Едиториал УРСС. Москва. 2004.
4. Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Е. Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики // Известия уральского университета. 2008. № 58. С. 78–87.
5. Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д. О решении граничной обратной задачи методом квазиобращения // Вестник ЮУГУ, серия Математика. Механика, Физика. 2012. Вып. 6. С. 8–13.
6. Денисов А.М., Соловьева С.И. Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 7. С. 919–928.
7. Денисов А.М. Асимптотика решений обратных задач для гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 5. С. 744–752.
8. Belov Yury Ya., Kopylova Vera G. Determination of source function in composite type system of equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2014. Т. 7. Вып. 3. С. 275–288.
9. Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T. Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // J. Inverse and Ill posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
10. Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A. Solving coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of reaction front // Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation. 2021. V. 99. 105824.
11. Денисов А.М. Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2040–2049.