

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 517.95

ЗАДАЧА СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С УСЛОВИЯМИ  
ТИПА КОШИ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ<sup>1)</sup>

© 2023 г. П. Р. Месенев<sup>1</sup>, А. Ю. Чеботарев<sup>2,3,\*</sup>

<sup>1</sup> 690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ,  
Дальневосточный центр математических исследований, Россия

<sup>2</sup> 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

<sup>3</sup> 675027 Благовещенск, шоссе Игнатьевское, 21, АмГУ, Россия

\*e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 09.08.2022 г.

Переработанный вариант 16.11.2022 г.

Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассмотрена краевая задача для стационарных уравнений сложного теплообмена с незаданным краевым условием для интенсивности излучения на части границы и условием переопределения на другой части границы. Предложен оптимизационный метод решения указанной задачи и представлен анализ соответствующей задачи граничного оптимального управления. Показано, что последовательность решений экстремальных задач сходится к решению задачи с условиями типа Коши. Эффективность алгоритма проиллюстрирована численными примерами. Библ. 27. Фиг. 2.

**Ключевые слова:** уравнения радиационно-кондуктивного теплообмена, диффузионное приближение, краевая задача с условиями типа Коши, задача оптимального управления.

DOI: 10.31857/S0044466923050162, EDN: GFVZBT

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую систему полулинейных эллиптических уравнений, которая моделирует радиационный и диффузионный (сложный) теплообмены в ограниченной липшицевой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ :

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

Через  $\theta$  и  $\varphi$  здесь обозначены температура и усредненная по всем направлениям интенсивность теплового излучения. Положительные параметры  $a$ ,  $b$ ,  $\kappa_a$  и  $\alpha$ , описывающие свойства среды, являются заданными (см. [1]).

Пусть граница области состоит из двух участков,  $\Gamma\partial\Omega := \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , так что  $\Gamma_1, \Gamma_2$  измеримы и имеют положительную меру,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . На всей границе  $\Gamma$  задается тепловой поток  $q_b$ :

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию  $\gamma$ , описывающую отражающие свойства границы (см. [1]). В случае, если эта функция неизвестна на части границы  $\Gamma_2$ , краевое условие для интенсивности излучения на  $\Gamma_2$  не ставится, а в качестве условия переопределения на  $\Gamma_1$ , в дополнение к условию на  $\varphi$ , задается температурное поле  $\theta_b$ :

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1. \quad (3)$$

Здесь через  $\partial_n$  обозначаем производную в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00113), ИПМ ДВО РАН (НИОКТР АААА-А20-120120390006-0) и Минобрнауки России (проект 122082400001-8).

Разрешимость задачи (1)–(3) в точной постановке является открытой проблемой. Поэтому в настоящей работе предлагается оптимизационный метод решения задачи, который заключается в рассмотрении граничного оптимального управления для эквивалентной системы эллиптических уравнений. Как будет показано ниже, задача оптимального управления является аппроксимацией задачи (1)–(3). Для постановки задачи управления введем новую неизвестную функцию  $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$ . Складывая первое уравнение в (1) со вторым, умноженным на  $b$ , заключаем, что  $\psi$  – гармоническая функция. Исключая  $\varphi$  из первого уравнения в (1) и используя краевые условия (2), (3), получаем краевую задачу

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \text{на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (5)$$

Здесь  $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$ ,  $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$ .

Сформулируем задачу оптимального управления, которая аппроксимирует задачу (4), (5). Задача состоит в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$\begin{aligned} J_\lambda(\theta, u) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf, \quad -a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \\ a\partial_n\theta + s\theta &= q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \quad \text{на } \Gamma_1, \quad a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \quad \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\lambda, s > 0$  – регуляризирующие параметры. Отметим, что введение параметра  $s > 0$  связано с численным решением задачи (6) и позволяет более эффективно находить решение нелинейной краевой задачи с заданным  $u$ . Представленные ниже теоретические результаты справедливы и в случае  $s = 0$ .

Интерес к граничным задачам сложного теплообмена связан с важными инженерными приложениями (см. [2]). Применение оптимизационного метода в обратных задачах для моделей теплопроводности с заданным переопределением на части границы рассмотрено, например, в [3], [4].

Нелинейные модели сложного теплообмена в рамках  $P_1$ -приближения для уравнения переноса теплового излучения достаточно полно изучены. В работах [5–7] представлен анализ различных прямых краевых задач для системы (1). Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена изучены в [8–11]. Обратные задачи с конечномерным переопределением и задачи с данными типа Коши на границе для температуры рассмотрены в [12–17]. В [18–22] представлены интересные результаты анализа краевых задач сложного теплообмена без использования  $P_1$ -приближения.

## 2. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим пространства  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ ,  $V'$  – пространство, сопряженное с  $V$ . Пространство  $H$  отождествляем с пространством  $H'$  так, что  $V \subset H = H' \subset V'$ . Через  $U$  обозначаем пространство управлений  $L^2(\Gamma_2)$ . Стандартную норму в  $H$  обозначаем  $\|\cdot\|$ ,  $(f, v)$  – значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H$ .

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

(i)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda, s = \text{Const} > 0$ ;

(ii)  $0 < \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$ ,  $\theta_b, r \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $q_b \in L^2(\Gamma)$ .

Определим операторы  $A_{1,2} : V \rightarrow V'$ ,  $B_1 : L^2(\Gamma_1) \rightarrow V'$ ,  $B_2 : U \rightarrow V'$ , используя равенства, справедливые для любых  $y, z \in V$ ,  $f, v \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $h, w \in U$ :

$$(A_1 y, z) = a(\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma_1} yz d\Gamma, \quad (A_2 y, z) = \alpha(\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma_1} \gamma yz d\Gamma,$$

$$(B_1 f, v) = \int_{\Gamma_1} f v d\Gamma, \quad (B_2 h, w) = \int_{\Gamma_2} h w d\Gamma.$$

Заметим, что билинейная форма  $(A_1 y, z)$  определяет скалярное произведение в пространстве  $V$  и норма  $\|z\|_V = \sqrt{(A_1 z, z)}$  эквивалентна стандартной норме  $V$ . Кроме того, определены непрерывные обратные операторы  $A_{1,2}^{-1} : V' \mapsto V$ . Для  $y \in V$ ,  $f \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $h \in V'$  справедливы неравенства

$$\|y\| \leq K_0 \|y\|_V, \quad \|B_1 f\|_{V'} \leq K_1 \|f\|_{L^2(\Gamma_1)}, \quad \|B_2 h\|_{V'} \leq K_2 \|h\|_U. \quad (7)$$

Здесь постоянные  $K_j > 0$  зависят только от  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и параметров  $a, s$ .

Используя введенные операторы, слабую формулировку краевой задачи, на решениях которой минимизируется функционал (6), нетрудно записать в виде

$$A_1 \theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi + f_1, \quad A_2 \psi = f_2 + B_2 u, \quad (8)$$

где  $f_1 = B_1(q_b + s\theta_b) + B_2 q_b$ ,  $f_2 = B_1 r$ .

Для формализации задачи оптимального управления определим оператор ограничений  $F(\theta, \psi, u) : V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$ :

$$F(\theta, \psi, u) = \left\{ A_1 \theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi - f_1, A_2 \psi - f_2 - B_2 u \right\}.$$

**Задача  $(P_\lambda)$ .** Найти тройку  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\} \in V \times V \times U$  такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \psi, u) = 0. \quad (9)$$

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия (i), (ii),  $u \in U$ . Тогда существует единственное решение системы (8) и при этом

$$\|\theta\|_V \leq \frac{K_0^2 \kappa_a}{\alpha} \|\psi\|_V + \|f_1\|_{V'}, \quad \|\psi\|_V \leq \|A_2^{-1}\| (\|f_2\|_{V'} + K_2 \|u\|_U). \quad (10)$$

**Доказательство.** Из второго уравнения в (8) следует, что  $\psi = A_2^{-1}(f_2 + B_2 u)$  и поэтому

$$\|\psi\|_V \leq \|A_2^{-1}\| (\|f_2\|_{V'} + K_2 \|u\|_U).$$

Однозначная разрешимость первого уравнения (8) с монотонностью хорошо известна (см., например, [23]). Умножим скалярно это уравнение на  $\theta$ , отбросим неотрицательное слагаемое  $(g(\theta), \theta)$  и оценим правую часть, используя неравенство Коши–Буняковского. Тогда, с учетом неравенств (7), получаем

$$\|\theta\|_V^2 \leq \frac{\kappa_a}{\alpha} \|\psi\|_V \|\theta\| + \|f_1\|_{V'} \|\theta\|_V \leq \frac{K_0^2 \kappa_a}{\alpha} \|\psi\|_V \|\theta\|_V + \|f_1\|_{V'} \|\theta\|_V.$$

В результате получаем оценки (10).

**Теорема 1.** При выполнении условий (i), (ii) существует решение задачи  $(P_\lambda)$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $j_\lambda$  точную нижнюю грань целевого функционала  $J_\lambda$  на множестве  $u \in U$ ,  $F(\theta, \psi, u) = 0$  и рассмотрим последовательности такие, что  $u_m \in U$ ,  $\theta_m \in V$ ,  $\psi_m \in V$ ,  $J_\lambda(\theta_m, u_m) \rightarrow j_\lambda$ ,

$$A_1 \theta_m + g(\theta_m) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi_m + f_1, \quad A_2 \psi_m = f_2 + B_2 u_m. \quad (11)$$

Из ограниченности последовательности  $u_m$  в пространстве  $U$  следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_m\|_V \leq C, \quad \|\psi_m\|_V \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)} \leq C.$$

Здесь через  $C > 0$  обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от  $m$ . Переходя при необходимости к подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка  $\{\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\psi}\} \in U \times V \times VP$

$$u_m \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } U, \theta_m \rightarrow \hat{\theta}, \psi_m \rightarrow \hat{\psi} \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \quad (12)$$

Заметим также, что  $\forall v \in V$  имеем

$$|([\theta_m]^4 - [\hat{\theta}]^4, v)| \leq 2\|\theta_m - \hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \left( \|\theta_m\|_{L_6(\Omega)}^3 + \|\hat{\theta}\|_{L_6(\Omega)}^3 \right). \quad (13)$$

Результаты о сходимости (12) и неравенство (13) позволяют перейти к пределу в (11). В итоге получим

$$A_1 \hat{\theta} + g(\hat{\theta}) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \hat{\psi} + f_1, \quad A_2 \hat{\psi} = f_2 + B_2 \hat{u}. \quad (14)$$

Поскольку целевой функционал слабо полунепрерывен снизу, то  $j_\lambda \leq J_\lambda(\hat{\theta}, \hat{u}) \leq \underline{\lim} J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$ , и поэтому тройка  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$  есть решение задачи  $(P_\lambda)$ .

### 3. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Воспользуемся принципом Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач (см. [24]). Невырожденность условий оптимальности гарантируется условием, что образ производной оператора ограничений  $F(y, u)$ , где  $y = \{\theta, \psi\} \in V \times V$ , совпадает с пространством  $V' \times V'$ . Последнее означает, что линейная система

$$A_1 \xi + g'(\theta) \xi - \frac{\kappa_a}{\alpha} \eta = q_1, \quad A_2 \eta = q_2$$

разрешима для всех  $\theta \in V, q_1, q_2 \in V'$ . Здесь  $g'(\theta) = 4b\kappa_a |\theta|^3 + \kappa_a/\alpha$ . Из второго уравнения получаем  $\eta = A_2^{-1} q_2$ . Разрешимость первого уравнения при известном  $\eta \in V$  очевидным образом следует из леммы Лакса–Мильграма. Отметим, что справедливость остальных условий принципа Лагранжа также очевидна.

Функция Лагранжа задачи  $(P_\lambda)$  имеет вид

$$L(\theta, \psi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + \left( A_1 \theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi - f_1, p_1 \right) + (A_2 \psi - f_2 - B_2 u, p_2),$$

где  $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$  – сопряженное состояние.

Пусть  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$  – решение задачи  $(P_\lambda)$ . Вычислив производные Гато функции Лагранжа по  $\theta, \psi$  и  $u$ , получаем в силу принципа Лагранжа (см. [24], теорема 1.5) следующие равенства  $\forall v \in V, w \in U$ :

$$(B_1(\hat{\theta} - \theta_b), v) + (A_1 v + g'(\hat{\theta}) v, p_1) = 0, \quad -\frac{\kappa_a}{\alpha}(v, p_1) + (A_2 v, p_2) = 0, \quad (15)$$

$$\lambda(B_2 \hat{u}, w) - (B_2 w, p_2) = 0. \quad (16)$$

Из условий (15), (16) вытекают уравнения для сопряженного состояния, которые вместе с уравнениями (14) для оптимальной тройки дают систему оптимальности задачи  $(P_\lambda)$ .

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия (i),(ii). Если  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$  – решение задачи  $(P_\lambda)$ , то существует единственная пара  $\{p_1, p_2\} \in V \times V$  такая, что*

$$A_1 p_1 + g'(\hat{\theta}) p_1 = -B_1(\hat{\theta} - \theta_b), \quad A_2 p_2 = \frac{\kappa_a}{\alpha} p_1, \quad \lambda \hat{u} = p_2|_{\Gamma_2}. \quad (17)$$

**Замечание 1.** Если рассмотреть приведенный целевой функционал  $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$ , где  $\theta(u)$  – компонента решения задачи (8), соответствующая управлению  $u \in U$ , то градиент функционала  $\tilde{J}_\lambda(u)$  равен  $\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$ . Здесь  $p_2$  – компонента решения сопряженной системы (17), где  $\hat{\theta} := \theta(u)$ .

#### 4. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Определим слабое решение задачи (1)–(3). Пару  $\{\theta, \varphi\} \in V \times V$  будем называть слабым решением задачи (1)–(3), если найдется функция  $q \in L^2(\Gamma_2)$  такая, что для всех  $v \in V$  справедливы равенства

$$a(\nabla\theta, \nabla v) + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi, v) = \int_{\Gamma} q_b v d\Gamma, \quad (18)$$

$$\alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma\varphi v d\Gamma + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3, v) = \int_{\Gamma_1} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q v d\Gamma \quad (19)$$

и при этом  $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$ .

Покажем, что если существует единственное слабое решение задачи (1)–(3), то решения задачи  $(P_\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow +0$  аппроксимируют решение задачи (1)–(3).

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия (i), (ii) и существует единственное слабое решение  $\{\theta, \varphi\}$  задачи (1)–(3). Если  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  – решение задачи  $(P_\lambda)$  для  $\lambda > 0$ , то при  $\lambda \rightarrow +0$*

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \frac{1}{ab}(\psi_\lambda - a\theta_\lambda) \rightarrow \varphi_* \quad \text{слабо в } V, \quad \text{сильно в } H.$$

**Доказательство.** Умножим равенство (18) на  $\alpha$ , (19) на  $ab$  и сложим равенства. Тогда, полагая  $\psi = a\theta + ab\varphi$ ,  $u = abq + \alpha q_b|_{\Gamma_2}$ , получаем

$$\alpha(\nabla\psi, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma\psi v d\Gamma = \int_{\Gamma_1} rv d\Gamma + \int_{\Gamma_2} uv d\Gamma.$$

Здесь  $r = ab\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$ . Поэтому  $A_2\psi = f_2 + B_2u$ .

Из (18), с учетом условия  $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$ , выводим равенство  $A_1\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi + f_1$ . Таким образом, тройка  $\{\theta, \psi, u\} \in V \times V \times U$  является допустимой для задачи  $(P_\lambda)$  и, следовательно,

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\|\theta_\lambda - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|_U^2 \leq J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|_U^2.$$

Тогда

$$\|u_\lambda\|_U^2 \leq \|u\|_U^2, \quad \|\theta_\lambda - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +0.$$

Из ограниченности последовательности  $u_\lambda$  в пространстве  $U$  следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_\lambda\|_V \leq C, \quad \|\psi_\lambda\|_V \leq C,$$

где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $\lambda$ . Поэтому можно выбрать последовательность  $\lambda \rightarrow +0$  такую, что

$$\begin{aligned} u_\lambda &\rightarrow u_* \quad \text{слабо в } U, \quad \theta_\lambda, \psi_\lambda \rightarrow \theta_*, \psi_* \quad \text{слабо в } V, \quad \text{сильно в } H, L^4(\Omega), \\ \theta_\lambda|_{\Gamma_1} &\rightarrow \theta_*|_{\Gamma_1} \quad \text{сильно в } L^2(\Gamma_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Результаты о сходимости (20) позволяют перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow +0$  в уравнениях для  $\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda$ , и тогда

$$A_1\theta_* + g(\theta_*) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi_* + f_1, \quad A_2\psi_* = f_2 + B_2u_*, \quad \theta_*|_{\Gamma_1} = \theta_b. \quad (21)$$

Полагая  $\varphi_* = \frac{1}{ab}(\psi_* - a\theta_*)$ , из первого уравнения в (21), учитывая, что  $\theta_*|_{\Gamma_1} = \theta_b$ , выводим равенство

$$a(\nabla\theta_*, \nabla v) + b\kappa_a(|\theta_*|\theta_*^3 - \varphi_*, v) = \int_{\Gamma} q_b v d\Gamma \quad \forall v \in V. \quad (22)$$

Далее, из второго уравнения в (21), с учетом полученного равенства (22), следует

$$\alpha(\nabla\phi_*, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma\phi_* v d\Gamma + \kappa_a(\phi_* - |\theta_*|^3, v) = \int_{\Gamma_1} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q_* v d\Gamma, \quad (23)$$

где  $q_* = \frac{1}{\alpha b} u_* - \frac{1}{b} q_b$ . Поэтому пара  $\{\theta_*, \phi_*\}$  – слабое решение задачи (1)–(3), которое в силу единственности совпадает с  $\{\theta, \phi\}$ . Кроме того, условие единственности решения гарантирует, что сходимости (20) имеют место для любой последовательности  $\lambda \rightarrow +0$ .

**Замечание 2.** В случае, если решение задачи (1)–(3) неединственно, то из доказательства теоремы 3 следует существование последовательности  $\lambda \rightarrow +0$ , для которой будет указана сходимость к одному из решений.

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Представим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Пусть  $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$ , где  $\theta(u)$  – компонента решения задачи (1)–(3), соответствующая управлению  $u \in U$ .

В соответствии с (17) градиент функционала  $\tilde{J}_\lambda(u)$  равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

Здесь  $p_2$  – соответствующая компонента сопряженного состояния из системы (17), где  $\hat{\theta} := \theta(u)$ .

### Алгоритм градиентного спуска

1. Выбираем значение градиентного шага  $\varepsilon$ .
2. Выбираем количество итераций  $N$ .
3. Выбираем начальное приближение для управления  $u_0 \in U$ .
4. **for**  $k \leftarrow 0, 1, \dots, N$  **do**
5. Для данного  $u_k$  рассчитываем состояние  $y_k = \{\theta_k, \phi_k\}$  – решение задачи (1), (2).
6. Рассчитываем значение целевого функционала  $J_\lambda(\theta_k, u_k)$ .
7. Рассчитываем сопряженное состояние  $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$  из уравнений (15), где  $\hat{\theta} := \theta_k$ ,  $\hat{u} = u_k$ .
8. Пересчитываем управление  $u_{k+1} = u_k - \varepsilon(\lambda u_k - p_2)$

Значение параметра  $\varepsilon$  выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение  $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$  являлось существенной поправкой для  $u_{k+1}$ . Количество итераций  $N$  выбирается достаточным для выполнения условия  $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$ , где  $\delta > 0$  определяет точность расчетов.

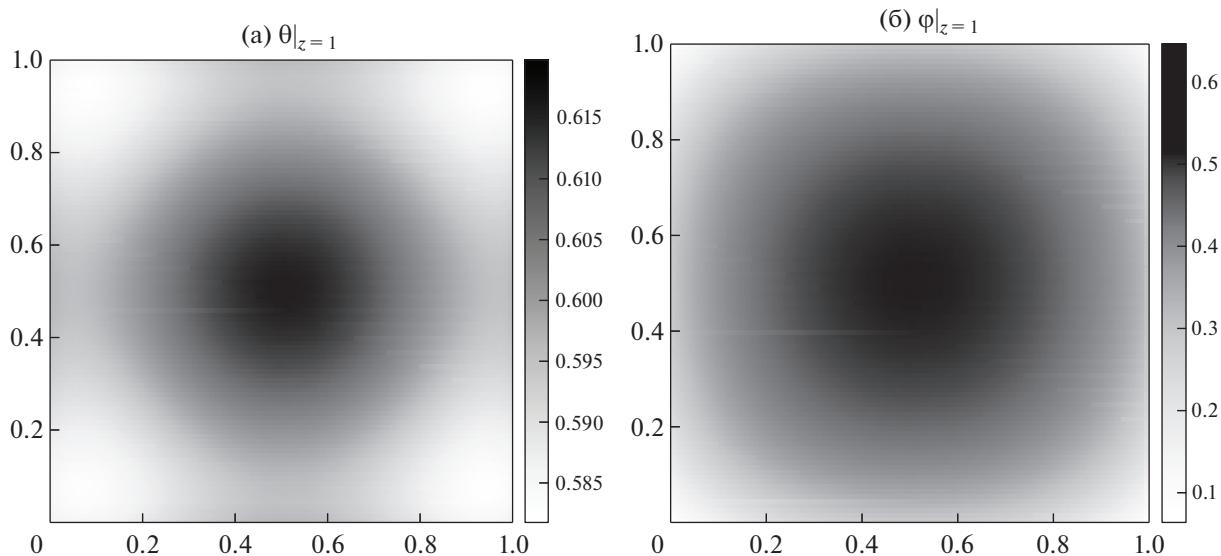
Для анализа работы алгоритма проводились серии вычислительных экспериментов при различных малых значениях регуляризующего параметра  $\lambda$ , которые подтверждают эффективность предложенного оптимизационного алгоритма нахождения решения краевой задачи сложного теплообмена с данными Коши на части границы. Численное решение прямой задачи с заданным управлением проводилось методом Ньютона для линеаризации задачи и ее решения методом конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, не вызывает трудностей. Для численного моделирования использовался солвер (см. FEniCS [25], [26]). Исходный код экспериментов можно найти по ссылке [27].

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма при малых, что важно, значениях параметра регуляризации  $\lambda \leq 10^{-12}$ .

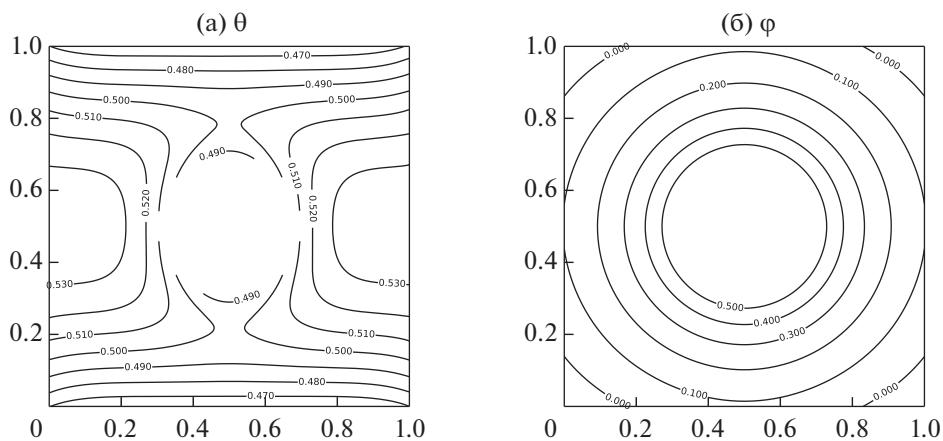
**Пример 1.** Рассмотрим куб  $\Omega = (x, y, z) : 0 < x, y, z < l$  с границей  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z), 0 \leq x, y \leq l, z = 0, l\}, \quad \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1.$$

Будем считать, что  $l = 1$  см,  $a = 0.6$  см<sup>2</sup>/с,  $b = 0.025$  см/с,  $\kappa_a = 1$  см<sup>-1</sup>,  $\alpha = 0.3$  см. Указанные параметры соответствуют стеклу (см. [9]). Параметр регуляризации  $\lambda = 10^{-12}$ .



Фиг. 1. Результаты первого эксперимента.



Фиг. 2. Результаты второго эксперимента.

Пусть граничные данные задачи (2), (3) имеют вид  $q_b = 0.5$  и  $\theta_b = 0.1 + z/2$ . Задачу решаем, используя предложенный оптимизационный алгоритм с параметром регуляризации  $\lambda = 10^{-12}$  и начальным приближением управления  $u_0 = 0$ .

На фиг. 1а и 1б представлены полученные поля  $\theta$  и  $\phi$  на грани куба  $z = 1$ . Начальное значение целевого функционала 0.025 и через сто итераций становится равным  $5 \times 10^{-5}$ .

**Пример 2.** Рассмотрим двумерный случай, где область  $\Omega$  является квадратом с круговой полостью:

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x, y < l, (x - l/2)^2 + (y - l/2)^2 > \rho^2\}, \quad l = 1 \text{ см}, \quad \rho = 0.15 \text{ см}.$$

Условия для интенсивности излучения неизвестны на внутренней границе  $\Gamma_2 = \{(x, y) : (x - l/2)^2 + (y - l/2)^2 = \rho^2\}$ , а условие переопределения ставится на  $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_2$ . Параметры среды такие же, как в примере 1, а граничные данные  $q_b$  и  $\theta_b$  положим равными

$$\theta_b = 0.5, \quad q_b = \begin{cases} 0.2, & \text{если } x \in \Gamma_1 \\ -0.2, & \text{если } x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

На фиг. 2а и 2б представлены полученные поля  $\theta$  и  $\phi$ . Начальное значение целевого функционала 0.045 и через тридцать итераций становится равным  $6.2 \times 10^{-5}$ .

Представленные численные примеры демонстрируют успешную работу предложенного алгоритма численного решения граничной задачи (1)–(3).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 409. № 2. P. 808–815.
2. Алифанов О.М., Ненарокомов А.В., Артюхин Е.А. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М., Янус-К. 2009. 297 с.
3. Алифанов О.М. Определение тепловых нагрузок из решения нелинейной обратной задачи // Теплофизика высоких температур. 1977. Т. 15. Вып. 3. С. 598–605.
4. Алифанов О.М., Ненарокомов А.В. Трехмерная граничная обратная задача теплопроводности // Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37. № 2. С. 231–238.
5. Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю. Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
6. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Y., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem // Appl. Math. Comput. 2014. V. 249. P. 247–252.
7. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
8. Pinna R. Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by  $SP_1$ -system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
9. Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
10. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. № 2. P. 678–689.
11. Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.
12. Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Inverse problem with finite over-determination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
13. Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Commun. Nonlinear Sci. and Numeric. Simulat. 2019. V. 75. P. 262–269.
14. Chebotarev A.Yu., Pinna R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
15. Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Обратная задача для уравнений сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1420–1430.
16. Месенев П.Р., Чеботарев А.Ю. Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена // Дальневост. матем. журн. 2018. Т. 18. № 1. С. 75–84.
17. Месенев П.Р., Чеботарев А.Ю. Анализ оптимизационного метода решения задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 36–44.
18. Amosov A.A. Unique solvability of stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system of semi-transparent bodies // J. Math. Sci. 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.
19. Amosov A.A., Krymov N.E. On a nonstandard boundary value problem arising in homogenization of complex heat transfer problems // J. Math. Sci. 2020. V. 244. P. 357–377.
20. Amosov A. Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. № 13. P. 10703–10733.
21. Amosov A.A. Unique solvability of the stationary complex heat transfer problem in a system of gray bodies with semitransparent inclusions // J. Math. Sci. (United States). 2021. V. 255. Iss. 4. P. 353–388.
22. Amosov A. Nonstationary radiative-conductive heat transfer problem in a semitransparent body with absolutely black inclusions // Mathematics 2021. V. 9. № 13. P. 1471.
23. Fučík S., Kufner A. Nonlinear differential equations. Amsterdam–Oxford–New York, Elsevier, 1980.
24. Fursikov A.V. Optimal control of distributed systems // Theory and Appl., Am. Math. Soc., 2000.
25. Alnaes M.S., Blechta J., Hake J., Johansson A., Kehlet B., Logg A., Richardson C., Ring J., Rognes M.E., Wells G.N. The FEniCS Project Version 1.5 Archive of Numerical Software, vol. 3, 2015.
26. Logg A., Wells G.N. DOLFIN: Automated Finite Element Computing ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 37, 2010.
27. [https://github.com/mesenev/articles\\_src](https://github.com/mesenev/articles_src)