

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 532.526

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО
СЛОЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ СТЕНКИ
В ФОРМУЛИРОВКЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ
ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ¹⁾

© 2023 г. О. В. Васильев^{1,*}, Н. С. Жданова^{1,**}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: oleg.v.vasilyev@gmail.com

**e-mail: nat.zhdanova@gmail.com

Поступила в редакцию 12.09.2022 г.

Переработанный вариант 07.10.2022 г.

Принята к публикации 02.02.2023 г.

Предложен метод расчета пристеночных областей турбулентных течений для численного моделирования вязкого сжимаемого газа с применением уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу. В основе метода – дифференциальное условие сшивки внешнего решения с пристеночной функцией, позволяющее использовать обобщение метода характеристических штрафных функций для переноса касательного напряжения из внешней области пограничного слоя на поверхность тела, при этом область сшивки задается неявно через локализованный источниковый член в уравнении пограничного слоя, записанного как функция расстояния от стенки, нормированного на масштаб вязкой длины. Касательное напряжение на стенке при этом определяется в процессе численного решения специального дифференциального уравнения, включающего в себя характеристические штрафные функции и аналитический закон стенки. Разработанный метод заметно снижает требования к пристеночному разрешению расчетной сетки без существенного усложнения вычислительного алгоритма и позволяет полностью устранить плохо-определенное условие точки сшивки решений. Численная реализация разработанного подхода проведена с применением вершинно-центрированного метода контрольных объемов и структурированных расчетных сеток. Его применимость продемонстрирована на примере решения двух тестовых задач: течение в двумерном канале и турбулентное обтекание бесконечно тонкой пластины. Библ. 38. Фиг. 8. Табл. 8.

Ключевые слова: характеристические штрафные функции, турбулентное течение, закон Рейхарда, метод пристеночных функций.

DOI: 10.31857/S0044466923050198, **EDN:** GGGNJE

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с большой вычислительной стоимостью прямого численного моделирования аэродинамических течений с большими числами Рейнольдса (см. [1]) активно развиваются вихреразрешающие методы на основе осредненных уравнений Навье–Стокса (RANS) (см. [2–5]) и гибридные подходы, в которых течение в пристеночной области моделируется на основе моделей класса RANS, а течение в областях, удаленных от твердых поверхностей, – Методом Крупных Вихрей (LES) (см. [6], [7]). К гибридному классу методов можно также отнести методы моделирования отсоединенных вихрей (DES) (см. [8–10]) с плавным переходом от RANS к LES решениям. Несмотря на сравнительно умеренные требования RANS, гибридных RANS-LES и DES подходов к пристеночному разрешению расчетных сеток, ограничения все равно остаются существенными и накладывают жесткие требования к объему вычислительных ресурсов, увеличивают время счета задачи и усложняют построение расчетной сетки.

Ограничения на размер ячеек сетки вблизи поверхности тела могут быть заметно снижены при использовании методов на основе пристеночных функций (см. [11–13]), что достигается за-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 20-41-09018).

меной граничных условий прилипания на поверхности тела условием сшивки пристеночной функции с внешней областью турбулентного пограничного слоя. Пристеночные функции также могут применяться и в слабой формулировке, через условие проскальзывания, допускающее перенос касательных напряжений из внешней области пограничного слоя на поверхность тела (см. [14], [15]). Такая формулировка предпочтительнее с вычислительной точки зрения в силу ее гибкости, но не гарантирует точного соответствия толщины вытеснения пограничного слоя, так как в пристеночной области вычисляется приближенное решение со скоростью проскальзывания и турбулентной вязкостью, экстраполированными из внешней области решения, что приводит к уменьшению толщины вытеснения пограничного слоя по сравнению с точным решением усредненных уравнений Навье–Стокса.

В традиционных подходах (см. [16]) граничные условия определяются путем решения нелинейных уравнений в точке сшивки, при этом сама точка сшивки заранее неизвестна, так как неявно задана расстоянием от стенки, нормированным на масштаб вязкой длины, который, в свою очередь, является функцией касательного напряжения на стенке. Для этой цели решение в точке сшивки интерполируется с ближайших узлов (см. [17]). Следует отметить возможность использования метода пристеночных функций совместно с дискретным методом погруженных границ, в котором в точке сшивки также используются дополнительные ограничительные связи, обеспечивающие выполнение граничных условий на поверхности тела (см. [18–20]).

Основная идея разработанного метода заключается в замене алгебраического условия сшивки внешнего решения с пристеночной функцией на дифференциальную формулировку, позволяющую использовать обобщение метода характеристических штрафных функций (см. [21], [22]) для переноса касательного напряжения из внешней области пограничного слоя на поверхность тела, при этом область сшивки задается неявно через локализованный источниковый член в уравнении пограничного слоя, записанного как функция расстояния от стенки, нормированного на масштаб вязкой длины. Такой подход, во-первых, позволяет полностью устранить плохо-определенное условие точки сшивки решений и, во-вторых, свести систему дифференциальных уравнений с нелинейными алгебраическими связями к системе уравнений с дифференциальными обратными связями, основанными на методе характеристических штрафных функций, обеспечивающих эту связь. Последнее обстоятельство определяет возможное развитие метода, связанное с применением дифференциальных стандартных (см. [23], [17]) и неравновесных (см. [24], [25]) динамических пристеночных функций (для задач с сильными отрывами). В целом новый метод позволяет заметно снизить требования к пристеночному разрешению расчетной сетки без существенного усложнения вычислительного алгоритма. Следует отметить отличие разработанного метода от гибридных подходов с использованием методов погруженных границ для задания граничных условий на поверхности обтекаемых тел (см. [18], [19]), так как в предложенном подходе используются характеристические штрафные функции для сшивки пристеночных функций с внешним решением. Разработанный метод может быть также обобщен для течений со сложной геометрией на основе уже разработанных методов штрафных функций (см. [21], [22], [26], [27]).

Статья организована следующим образом. В разд. 1 описан разработанный метод моделирования турбулентного пограничного слоя на основе аналитических законов стенки в формулировке метода характеристических штрафных функций. В разд. 2 кратко описана методика расчета, используемая для численной реализации разработанного подхода. Постановка и результаты численного моделирования тестовых задач приведены в разд. 3. В заключении сделаны выводы и обозначены направления дальнейшего развития темы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1.1. Осредненные уравнения движения вязкого сжимаемого газа

В качестве базовой математической модели для описания течений вязкой сжимаемой среды использована система осредненных по Фавру уравнений Навье–Стокса, принимающая следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho e + p) u_j] = \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \hat{\tau}_{ij} - q_j], \quad (3)$$

где

$$p = \rho RT, \quad (4)$$

$$e = \frac{1}{2} u_i u_i + \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (5)$$

$$q_j = -c_p \left(\frac{\mu}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (6)$$

$$\hat{\tau}_{ij} = 2\mu \tilde{S}_{ij} + \tau_{ij},$$

$$\tau_{ij} = 2\mu_T \tilde{S}_{ij}, \quad (7)$$

$$\tilde{S}_{ij} = \text{dev}(S_{ij}) = S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

В приведенных выше уравнениях используются следующие обозначения: ρ – осредненная по Рейнольдсу плотность, p – осредненное по Рейнольдсу давление, ρu_j – массовый поток, u_j – осредненная по Фавру скорость, T – осредненная по Фавру температура, e – осредненная по Фавру полная энергия на единицу массы. Параметр R обозначает газовую постоянную, переменные c_v и c_p – соответственно удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении, значение коэффициента теплоемкости $\gamma = c_p/c_v$ без потери общности принято равным $\gamma = 1.4$, что соответствует двухатомному газу. Переменная q_j представляет собой сумму векторов ламинарного и моделируемого турбулентных тепловых потоков, где $Pr_L = 0.72$ и $Pr_T = 0.9$ – соответственно ламинарное и турбулентное числа Прандтля. Турбулентная вязкость, обозначенная как μ_T , неизвестна и для замыкания подразумевает использование модели турбулентности. Переменная $\hat{\tau}_{ij}$ представляет собой сумму тензоров вязкого (молекулярного) и турбулентного напряжений, τ_{ij} – тензор турбулентных напряжений, S_{ij} – тензор осредненных скоростей деформации, \tilde{S}_{ij} – дивергентная часть тензора S_{ij} . Для простоты в работе рассмотрены течения с малыми числами Маха и постоянной динамической молекулярной вязкостью μ .

1.2. Модель турбулентности

Для иллюстрации разработанного подхода в качестве модели турбулентности для замыкания уравнений (6) и (7) использована модель Спаларта–Аллмараса (см. [2]), широко применяемая для моделирования течений газа (см. [28]), включая высокоскоростные течения с существенным влиянием сжимаемости. Стандартная модель Спаларта–Аллмараса для переменной $\rho \tilde{\nu}$ может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{\nu} u_j) &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} - \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \rho \left(\frac{\tilde{\nu}}{\delta} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\rho \tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - \left(\frac{\mu}{\sigma \rho} + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + c_{b2} \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (8)$$

где турбулентная вязкость вычисляется согласно

$$\mu_T = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \quad (9)$$

а вспомогательные переменные определяются соотношениями

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3},$$

$$\chi = \tilde{v}/\nu,$$

$$\tilde{S} = \max \left[0.3\sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} + \frac{\tilde{v}}{\kappa^2\delta^2} f_{v2} \right], \quad (10)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}},$$

$$f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6},$$

$$g = r + c_{w2} (r^6 - r),$$

$$r = \min \left[\frac{\tilde{v}}{\tilde{S}\kappa^2\delta^2}, 10 \right], \quad (11)$$

$$f_{i2} = c_{i3} \exp(-c_{i4}\chi^2),$$

ν – кинематическая молекулярная вязкость, $\delta(\mathbf{x})$ – расстояние от точки поля \mathbf{x} до ближайшей поверхности, а для улучшения устойчивости вычислений переменная \tilde{S} ограничена снизу величиной $0.3\sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$. Постоянные коэффициенты задаются как $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\sigma = 2/3$, $\kappa = 0.41$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$, $c_{v1} = 7.1$, $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}$. В расчетах используется “стандартная” версия модели Спаларта–Аллмараса без дополнительного генерационного слагаемого f_{i1} , что подразумевает отсутствие необходимости использовать переменную f_{i2} , т.е. $c_{i3} = 0$.

В качестве граничного условия на поверхности стенки используется

$$\tilde{v} = 0. \quad (12)$$

При моделировании внешних течений в набегающем потоке используется константная турбулентная вязкость $\tilde{v} = 3\nu_\infty$.

1.3. Метод пристеночного моделирования

При моделировании турбулентных течений с большим числом Рейнольдса в рамках вихререшающих методов (см. [2–5]), несмотря на использование моделей турбулентности, прямое разрешение структур решения уравнений (1)–(3), (8) в пристеночной области требует значительных вычислительных затрат, связанных с существенным увеличением количества узлов сетки вблизи поверхности. Ограничения на размер расчетных ячеек вблизи поверхности тела могут быть заметно снижены при использовании методов на основе пристеночных функций (см. [11–13]), что достигается заменой граничных условий прилипания на поверхности тела условием сшивки пристеночной функции $f(\tilde{y}^+)$ с внешней областью турбулентного пограничного слоя:

$$u_{||}(\mathbf{x}) \Big|_{\delta(\mathbf{x}) = \frac{\nu}{u_\tau} \delta_{EL}^+} = u_\tau f(\delta_{EL}^+), \quad (13)$$

где условие точки сшивки определено как

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\nu}{u_\tau} \delta_{EL}^+, \quad (14)$$

$u_{\parallel}(\mathbf{x})$ – компонента скорости, параллельная поверхности в точке \mathbf{x} , \tilde{x} и \tilde{y} – обобщенные координаты вдоль и по нормали к поверхности, $\tilde{y}^+ = u_{\tau}\tilde{y}/v$ – нормированная координата, $u_{\tau} = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ – скорость трения, τ_w – напряжение трения на стенке, δ_{EL}^+ – нормированное расстояние сшивки решения, а $f(\tilde{y}^+)$ определена как функция нормированного расстояния от поверхности. Для простоты изложения рассмотрим формулировку метода для двухмерных течений, а обобщение метода для трехмерных течений будет приведено в конце раздела.

Для заданного внешнего поля скорости $u_{\parallel}(\mathbf{x})$ условие сшивки (13) является нелинейным уравнением для определения u_{τ} и точки сшивки для заданной точки \tilde{x} на поверхности тела. Линейное приближение уравнения (13) для коррекции решения δu_{τ} может быть записано как

$$u_{\parallel}(\mathbf{x})\Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{v}{u_{\tau}}\delta_{EL}^+} + \frac{\partial u_{\parallel}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{v}{u_{\tau}}\delta_{EL}^+} \left(-\frac{v\delta_{EL}^+}{u_{\tau}^2} \delta u_{\tau} \right) \approx u_{\tau} f(\delta_{EL}^+) + \delta u_{\tau} f(\delta_{EL}^+), \quad (15)$$

где нормаль \mathbf{n} определена через функцию расстояния $\delta(\mathbf{x})$: $\mathbf{n} = \nabla \delta(\mathbf{x})$. Отметим, что второй член левой части уравнения (15) возникает из-за изменения расстояния $\delta(\mathbf{x})$ точки сшивки решения при изменении u_{τ} для фиксированного δ_{EL}^+ . Решение уравнения (15) для коррекции скорости трения δu_{τ} принимает следующий вид:

$$\delta u_{\tau} \approx u_{\tau} \frac{u_{\parallel}(\mathbf{x})\Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{v}{u_{\tau}}\delta_{EL}^+} - u_{\tau} f(\delta_{EL}^+)}{u_{\tau} f(\delta_{EL}^+) + \frac{\partial u_{\parallel}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{v}{u_{\tau}}\delta_{EL}^+} \delta(\mathbf{x})}. \quad (16)$$

В случае сильной формулировки условия сшивки уравнение (16) может быть использовано для итерационной коррекции решения уравнения (13) методом Ньютона.

В слабой постановке задачи дискретная коррекция (16) может быть заменена на временную релаксацию решения $u_{\tau}(\tilde{x}, t)$ на масштабе времени η_f в каждой точке обобщенной координаты \tilde{x} , определенной вдоль поверхности тела:

$$\frac{\partial u_{\tau}}{\partial t} = \frac{u_{\tau}}{\eta_f} \frac{u_{\parallel}(\mathbf{x})\Big|_{\delta(\tilde{x})=\frac{v}{u_{\tau}}\delta_{EL}^+} - u_{\tau} f(\delta_{EL}^+)}{u_{\tau} f(\delta_{EL}^+) + \frac{\partial u_{\parallel}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\delta(\tilde{x})=\frac{v}{u_{\tau}}\delta_{EL}^+} \delta(\tilde{x})}, \quad (17)$$

где толщина пограничного слоя, неявно определенная уравнением (14), для большей наглядности записана в явном виде как $\delta(\tilde{x})$, при этом граничное условие прилипания для скорости \mathbf{u} на границе тела заменено на условие непротекания для нормальной компоненты скорости $u_{\perp}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$:

$$u_{\perp}\Big|_{\tilde{y}=0} = 0 \quad (18)$$

и условие переноса касательных напряжений на поверхность тела:

$$(v + v_T) \frac{\partial u_{\parallel}}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\tilde{y}=0} = u_{\tau}^2(\tilde{x}, t). \quad (19)$$

Для переноса турбулентной вязкости с внешней области течения на границу в модели Спаларта–Аллмараса в уравнениях (8), (10) и (11) функция расстояния $\delta(\mathbf{x})$ до ближайшей поверхности заменена на

$$\delta(\mathbf{x}) = \max\left(\delta(\mathbf{x}), \frac{v}{u_{\tau}} \delta_{EL}^+\right), \quad (20)$$

а граничное условие (12) для турбулентной вязкости заменено на

$$\left. \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\tilde{y}=0} = 0. \tag{21}$$

Уравнение (16) с неявным определением расстояния точки сшивки $\delta(\tilde{x})$ усложняет решение задачи, так как определение величины тангенциальной компоненты скорости u_{\parallel} требует использования локального интерполянта с ближайших узлов (см., например, [17]). Задачу можно сильно упростить и полностью исключить применение локального интерполянта и точного определения точки сшивки введением дополнительного поля скорости трения $u_{\tau}(\mathbf{x}, t)$ и заменой уравнения (17) для $u_{\tau}(\tilde{x}, t)$ на следующее уравнение в частных производных для поля $u_{\tau}(\mathbf{x}, t)$ во всей области решения:

$$\frac{\partial u_{\tau}}{\partial t} - \underbrace{\mathcal{H}\left(\delta_{\text{EL}}^+ - \frac{u_{\tau}}{\nu} \delta(\mathbf{x})\right) \frac{L}{\eta_s} \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \mathbf{n}}}_{\text{перенос } u_{\tau} \text{ на поверхность}} = \chi_{\delta} \underbrace{\left(\frac{\frac{u_{\tau}}{\nu} \delta(\mathbf{x}) - \delta_{\text{EL}}^+}{\sigma^+} \right)}_{\text{релаксация } u_{\tau} \text{ в локализованной области сшивки}} \frac{u_{\parallel}(\mathbf{x}) - u_{\tau} f(\delta_{\text{EL}}^+)}{\eta_f u_{\tau} f(\delta_{\text{EL}}^+) + \frac{\partial u_{\parallel}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \delta(\mathbf{x})} + \underbrace{\nu_n \Delta u_{\tau}}_{\text{сглаживание}}, \tag{22}$$

где L – характерный масштаб длины, η_s – характерный масштаб переноса решения с области сшивки на поверхность тела, $\mathcal{H}(\xi)$ – функция Хевисайда, отключающая перенос u_{τ} во внешней области решения, $\chi_{\delta}(\xi)$ – локализованная функция сшивки решений, например, функция Гаусса

$$\chi_{\delta}(\xi) = \exp(\xi^2/2), \tag{23}$$

σ^+ – нормированная толщина сшивки решений, $\nu_n \Delta u_{\tau}$ – численная диффузия, используемая для сглаживания вспомогательного поля u_{τ} . Отметим, что в уравнении (22) условие сшивки (13) обеспечивается условием релаксации скорости трения в локализованной области сшивки, из которой u_{τ} , в свою очередь, переносится на поверхность тела для последующего использования в граничном условии (19). Второй член в левой части уравнения (22) соответствует характеристической штрафной функции (см. [21], [22], [29]), обеспечивающей на масштабе времени η_s направленный перенос скорости трения на поверхность тела.

Уравнение (22) является основой разработанного метода, в дальнейшем, для краткости, именуемого *методом пенализированных пристеночных функций*. Обратим внимание, что несмотря на то что разработанный подход продемонстрирован только в контексте модели Спаларта–Аллмараса, метод пенализированных пристеночных функций может быть использован совместно с любой моделью турбулентности, позволяющей перенос касательного напряжения из внешней области пограничного слоя на поверхность тела.

В случае трехмерного течения задача может быть рассмотрена в локальных двухмерных координатах, где координата \tilde{x} вдоль поверхности тела соответствует направлению тангенциальной компоненты скорости в точке сшивки. В этом случае уравнение (22) можно использовать без изменений, а переменная $u_{\parallel}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x})\|$ соответствует величине параллельной компоненты скорости $\mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Граничные условия (18) и (19) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\tilde{y}=0} = 0, \tag{24}$$

$$(\nu + \nu_T) \frac{\partial \mathbf{u}_{\parallel}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\tilde{y}=0} = \left(\frac{\mathbf{u}_{\parallel}}{u_{\parallel}} \Big|_{\tilde{y}=0} \right) u_{\tau}^2(\tilde{x}, t). \tag{25}$$

2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА

Предложенный в работе метод реализован на базе программного комплекса NOISEtte, описанного в [30], детали вычислительной методики и некоторые особенности распараллеливания расчетов представлены в [31].

Пространственная дискретизация конвективной части системы уравнений (1)–(3), (8) основана на конечно-объемном подходе с определением искоемых переменных в узлах сетки, вокруг

которых построены расчетные ячейки (дуальная сетка). Для повышения порядка точности используется схема на основе квазиодномерной реконструкции переменных вдоль ребра сетки (EBR-схемы) (см. [32]). Для пространственной аппроксимации вязких членов применяется конечно-элементный метод Галеркина на основе линейных базисных функций.

Интегрирование по времени проводилось по неявной трехслойной схеме второго порядка аппроксимации с последующей линеаризацией по Ньютону разностной по пространству системы уравнений. На каждой ньютоновской итерации для решения системы линейных уравнений применяется стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab) (см. [33]).

Каждому шагу интегрирования по времени основной системы уравнений предшествует численное решение уравнения (22). При этом используются неявная схема первого порядка для аппроксимации производной по времени и метод направленных разностей – для производной по пространству. Последний обладает численной диффузией пропорциональной шагу сетки, поэтому члены с искусственной вязкостью $\nu_n \Delta u_\tau$ в уравнении (22) опускаются. Функция сшивки решения задается в виде функции Гаусса (23). Значения нормированной толщины сшивки решений σ^+ , масштабы релаксации η_f и η_s и начальное поле функции u_τ определяются постановкой задачи и параметрами расчетной сетки. Для представленных в работе задач они указаны в соответствующих разделах с описанием численных результатов.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

Представленный метод пристеночного моделирования применен для численного решения двух тестовых задач – задачи о течении в канале и задачи об обтекании пластины.

Задачи решались в безразмерных переменных, при этом использовались следующие характерные масштабы: ρ_∞ – плотность невозмущенного потока, U_∞ – скорость набегающего потока, μ_∞ – молекулярная вязкость невозмущенного потока, L – характерный линейный масштаб задачи. Связь размерных и безразмерных переменных, обозначенных знаком $\hat{(\cdot)}$, имеет вид

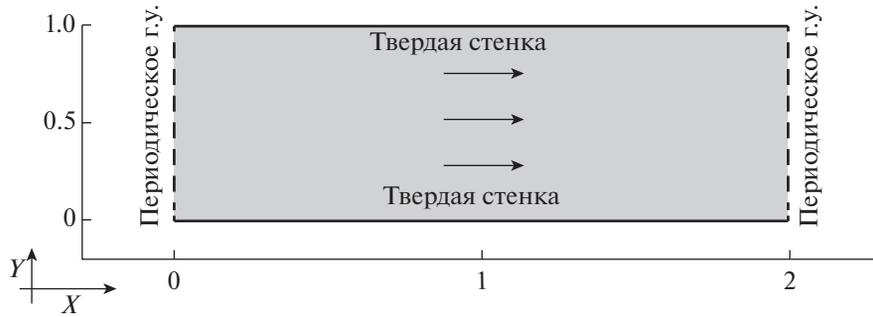
$$\rho = \rho_\infty \hat{\rho}, \quad u = U_\infty \hat{u}, \quad x = L \hat{x}, \quad \mu = \mu_\infty \hat{\mu}, \quad t = \frac{L}{U_\infty} \hat{t}, \quad p = \rho_\infty U_\infty^2 \hat{p}, \quad T = \frac{U_\infty^2}{R} \hat{T}. \quad (26)$$

Для удобства приведенные далее результаты вычислительных экспериментов представлены в безразмерном виде, при этом знак $\hat{(\cdot)}$ опускается. Отметим также, что задачи рассматривались при малых числах Маха набегающего потока, из-за чего влияние плотности и температуры на решение незначительно.

Все расчеты проводились до установления стационарного режима течения, при котором для значений относительной невязки продольной скорости и турбулентной вязкости справедливы следующие оценки: $\frac{\|\Delta u\|_2}{\|u\|_2} \leq 10^{-6}$ и $\frac{\|\Delta \nu_T\|_2}{\|\nu_T\|_2} \leq 10^{-8}$.

3.1. Турбулентное течение в плоском канале

Рассматривается течение между двумя плоскими пластинами, находящимися на расстоянии $H = 2h$ друг от друга, величина H выбрана характерным линейным масштабом. Задача решается в двумерной постановке, пластины расположены параллельно друг другу вдоль оси OX , а поток движется слева направо параллельно этой оси со скоростью, соответствующей числу Маха $M = 0.1$ (фиг. 1). Течение является квазиодномерным, поэтому на правой и левой границах расчетной области заданы периодические граничные условия для всех переменных. Верхняя и нижняя границы соответствуют адиабатическим твердым стенкам, на верхней границе задано условие прилипания $\mathbf{u} = (0, 0)$, на нижней – либо такое же условие для модели Спаларта–Аллмараса, либо условие непротекания для нормальной компоненты скорости (18) и условие переноса касательных напряжений на поверхность тела (19) для метода пенализированных пристеночных функций. Значение u_τ в (19) определялось из численного решения уравнения (22). Поле динамической скорости во всей расчетной области в начальный момент времени задавалось посто-



Фиг. 1. Постановка задачи о течении в плоском канале.

янным $-u_\tau = 7 \times 10^{-2}$, параметры релаксации $-\eta_f = \eta_s = 10^{-2}$, квадрат толщины шивки решений $-(\sigma^+)^2 = 80$. В качестве пристеночной функции использовался закон Рейхарда (см. [34]):

$$f_{\text{Rei}}(y^+) = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \exp\left(-\frac{y^+}{3}\right) \right], \quad (27)$$

где $\kappa = 0.41$ – постоянная фон Кармана.

Течение характеризуется среднерасходной скоростью $u_b = \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy$, которая присутствует в математической модели в форме градиента давления, добавляемого в уравнение сохранения импульса как источниковый член. Значения u_b , кинематической вязкости ν и полуширины канала h полностью определяют физические свойства течения. При этом число Рейнольдса может быть посчитано по значениям среднерасходной скорости и скорости трения:

$$Re_b = \frac{u_b H}{\nu}, \quad Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu}$$

соответственно. Для течений в канале имеет место следующее эмпирическое соотношение между Re_b и Re_τ (см. [35]), которое в выбранных единицах измерения принимает вид

$$Re_b \approx 14.64 Re_\tau^{7/8}.$$

Все расчеты проведены для значения $Re_\tau = 400$, что соответствует $Re_b \approx 14000$. Величина градиента давления, обеспечивающего течение, определяется заданным трением на стенке, т.е. $\int_V |\nabla p| dV = \int_S \tau_w dS$. Это соотношение задает величину источникового члена для уравнения импульса, в безразмерных переменных, соответствующих $\frac{dp}{dx} = -2u_\tau^2 = -6.53 \times 10^{-3}$ (при $Re_\tau = 400$).

Начальные условия соответствуют невозмущенному потоку со следующими безразмерными параметрами: $(u, v) = (0, 0)$, $\nu = Re_b^{-1}$, $\rho = 1.0$, $\nu_T = Re_b^{-1}$.

Во всех расчетах, представленных далее, использованы структурированные декартовы расчетные сетки, в которых N – число сеточных узлов, Δx и Δy – поперечный и продольный размеры ячеек соответственно, $q = \Delta y_{j+1} / \Delta y_j$ – коэффициент разбега поперечного размера ячейки в направлении по нормали от стенки, Δy_{bw}^+ – нормированный размер первой пристеночной ячейки на нижней границе канала, Δy_{tw}^+ – нормированный размер первой пристеночной ячейки на верхней границе (если его значение не указано, то $\Delta y_{bw}^+ = \Delta y_{tw}^+$).

Для оценки точности численного моделирования турбулентного пограничного слоя с применением модели Спаларта–Аллмараса и определения оптимального сеточного разрешения проведена серия расчетов на сетках, отличающихся размером пристеночной ячейки и коэффициентом разбега. В табл. 1 представлены параметры использованных сеток. Продольный размер расчетной ячейки не изменяется и равен $\Delta x = 0.05$. Значение Δy_{bw}^+ здесь посчитано относительно теоретического значения скорости трения u_τ , соответствующего заданному числу Рейнольдса Re_τ .

Таблица 1. Параметры сеток для расчетов с применением модели Спаларта–Аллмараса

Сетка	Δy	q	N	Δy_{bw}^+
1	6.25×10^{-4}	1.0	14409	0.5
2	1.25×10^{-3}	1.0	7209	1.0
3	5.00×10^{-3}	1.0	1809	4.0
4	1.25×10^{-2}	1.0	729	10.0
5	1.25×10^{-3}	1.1	765	1.0
6	1.25×10^{-3}	1.2	585	1.0
7	1.25×10^{-3}	1.25	549	1.0
8	1.25×10^{-3}	1.3	513	1.0

Таблица 2. Результаты расчетов с применением модели Спаларта–Аллмараса

Сетка	u_τ	u_c	$ v _{\max}$
1	5.718×10^{-2}	1.1454	2.68×10^{-9}
2	5.719×10^{-2}	1.1448	3.74×10^{-9}
3	5.846×10^{-2}	1.1267	7.69×10^{-7}
4	5.937×10^{-2}	1.0537	2.48×10^{-5}
5	5.720×10^{-2}	1.1438	3.43×10^{-8}
6	5.720×10^{-2}	1.1433	1.95×10^{-7}
7	5.720×10^{-2}	1.1428	4.52×10^{-7}
8	5.721×10^{-2}	1.1417	7.17×10^{-7}

Полученные численные результаты для всех сеток суммированы в табл. 2, где u_τ – скорость трения, u_c – максимум продольной скорости, $|v|_{\max}$ – максимум абсолютного значения поперечной скорости. По значению Re_τ можно получить теоретическую оценку скорости трения на стенке, которая при $Re_\tau = 400$ равна $u_\tau = 5.714 \times 10^{-2}$. Из табл. 2 следует, что наиболее близкими к этой оценке являются результаты, полученные на сетках 1 и 2. Это также подтверждается сопоставлением нормированных профилей скорости и закона Рейхарда (27) (см. фиг. 2а). Результаты, полученные на сетках 3 и 4, показывают неудовлетворительную точность расчетов, что связано с недостаточным сеточным разрешением в пристеночной области.

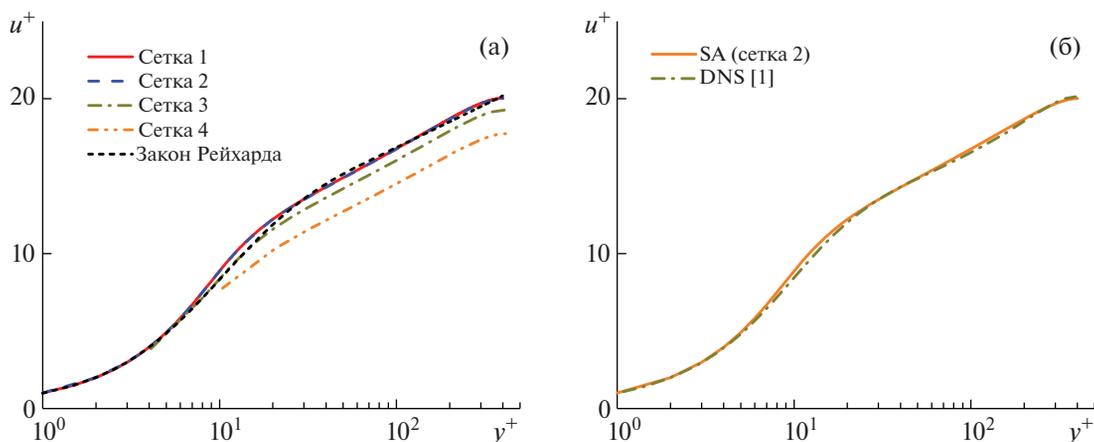
**Фиг. 2.** Результаты расчетов с применением модели Спаларта–Аллмараса (SA): (а) – сравнение с законом Рейхарда, (б) – сравнение с результатами прямого численного моделирования (DNS) (см. [36]).

Таблица 3. Параметры сеток для расчетов с применением метода пенализированных пристеночных функций

Сетка	$y < 0.5$		$y \geq 0.5$		q
	Δy_{bw}	Δy_{bw}^+	Δy_{tw}	Δy_{tw}^+	
1	1.94×10^{-2}	15.54	} 1.25×10^{-3}	1.0	} 1.2
2	1.12×10^{-2}	8.95			
3	4.49×10^{-3}	3.59			
4	2.47×10^{-3}	1.97			
5	1.25×10^{-3}	0.99	1.25×10^{-3}	1.0	} 1.0
6	0.63×10^{-3}	0.50	0.63×10^{-3}	0.5	
7	0.31×10^{-3}	0.25	0.31×10^{-3}	0.25	

Таблица 4. Зависимость результатов расчетов от сеточного разрешения

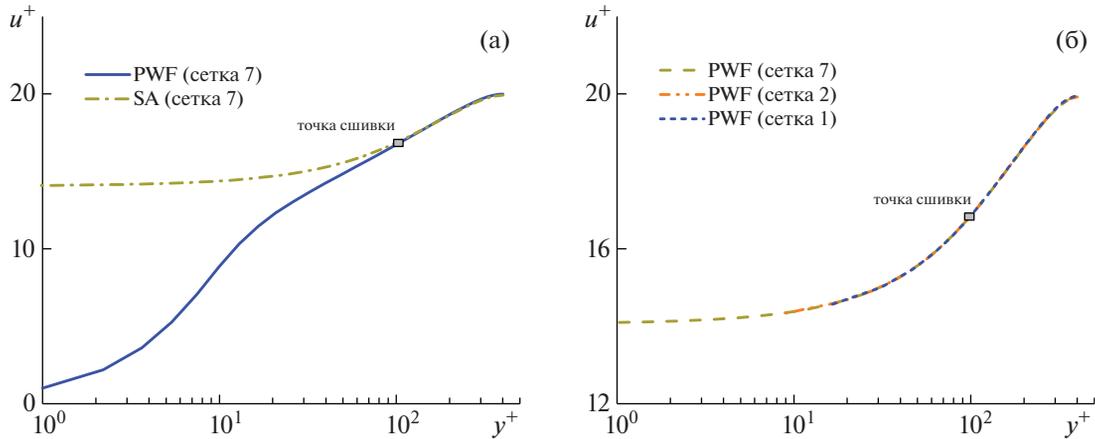
Сетка	u_τ	$\ E\ _2$
1	5.713×10^{-2}	6.75×10^{-3}
2	5.727×10^{-2}	5.06×10^{-3}
3	5.737×10^{-2}	3.98×10^{-3}
4	5.743×10^{-2}	2.95×10^{-3}
5	5.751×10^{-2}	9.70×10^{-4}
6	5.754×10^{-2}	3.48×10^{-4}
7	5.755×10^{-2}	3.45×10^{-3}

Решение, полученное для сетки 2, хорошо согласуется с результатами численного моделирования методом DNS (см. [36]). Это подтверждает фиг. 2б, на которой сопоставлены профили продольной скорости.

Результаты расчетов для сеток 5–8, приведенные в табл. 2, показывают, что приемлемое численное решение можно также получить и на расчетных сетках меньшего размера, в которых размер пристеночной ячейки увеличивается в направлении от границы с коэффициентом q . Результаты в виде профилей скорости не приводятся, так как их отличие от результатов, полученных на сетке 2, пренебрежимо мало.

Далее будут рассмотрены результаты численного решения данной задачи с применением метода пенализированных пристеночных функций. Предполагается, что точность моделирования пограничного слоя вдоль верхней границы канала обеспечивается сеточным разрешением, а вдоль нижней границы – пристеночными функциями. Для проведения расчетов построены сетки с параметрами, приведенными в табл. 3. Сетки 5–7 – равномерные, с одинаковым пристеночным разрешением на верхней и нижней границах $\Delta y_{bw}^+ = \Delta y_{tw}^+ \leq 1$, сетки 1–4 имеют достаточное разрешение пограничного слоя только на верхней границе ($\Delta y_{tw}^+ \leq 1$), на нижней – $\Delta y_{bw}^+ > 1$. В сетках 1–4 поперечный размер ячеек увеличивается в направлении нормали $(0, -1)$ от верхней границы канала с коэффициентом разбега $q = 1.2$ до достижения размера Δy_{bw} .

Рассмотрим численное решение, полученное на самой мелкой сетке – сетке 7. На фиг. 3а приведен нормированный профиль скорости, полученный при расчетах на этой сетке, сопоставленный с результатами расчетов на той же сетке моделью Спаларта–Аллмараса. В области $y^+ < \delta_{EL}^+ = 100$ можно видеть существенное отличие двух решений, что обусловлено принципиально разными граничными условиями на нижней границе канала. При $y^+ \geq \delta_{EL}^+$ они хорошо согласуются друг с другом, при этом норма отклонения решения с помощью метода пенализированных пристеночных функций от решения Спаларта–Аллмараса, посчитанная по полю продольной скорости, равна $\|E\|_2 = 3.45 \times 10^{-3}$ (см. табл. 4).



Фиг. 3. Результаты расчетов с применением метода пенализированных пристеночных функций (PWF): (а) — сравнение с моделью Спаларта—Аллмараса (SA) на разрешенной сетке, (б) — сравнение для сеток различного пристеночного разрешения.

Для расчетов на сетках 1–6 в табл. 4 приведено значение скорости трения u_τ на нижней стенке и норма отклонения от решения, полученного на сетке 7. Можно видеть, что в отсутствие сеточного разрешения пограничного слоя (сетки 1–3) ошибка численного решения остается приемлемой. Это подтверждается данными на фиг. 3б, где профили продольной скорости, полученные при расчетах на сетках 1 и 2, сопоставлены с результатами, полученными на сетке 7 ($\Delta y_{bw}^+ \sim 0.25$). Справа от точки сшивки решений ($y^+ \geq \delta_{EL}^+$) наблюдается хорошее согласование результатов.

Результаты исследования влияния параметров метода пенализированных пристеночных функций на точность численного решения суммированы в табл. 5–7, где приведены значения скорости трения на нижней стенке u_τ и отклонения поля продольной скорости от решения для сетки 7. Все расчеты с различными значениями параметров релаксации, толщины сшивки решений и положения точки сшивки проведены для расчетной сетки 2.

Таким образом, из данных табл. 5 следует слабая чувствительность решения к значениям параметров η_f и η_s , что обусловливается нечувствительностью установившегося стационарного решения к фазовым ошибкам метода пенализированных пристеночных функций. При решении нестационарных задач характеристические времена η_f и η_s должны быть существенно меньше характерного времени течения, чтобы минимизировать влияние фазовых ошибок, вызванных временем задерживания переноса касательного напряжения в уравнении (22) и времени релаксации условия сшивки (14).

В табл. 6 приведены результаты, полученные для различной толщины сшивки решений. Здесь N_f — количество точек расчетной сетки, находящихся внутри области сшивки. Можно видеть, что для обеспечения приемлемой точности численного решения достаточно нескольких расчетных точек, располагающихся внутри области сшивки, что демонстрирует существенное смягчение требований к пристеночному разрешению по сравнению с требованиями, накладываемыми моделями турбулентности, в частности, моделью Спаларта—Аллмараса.

Таблица 5. Зависимость результатов расчетов от масштаба релаксации (сетка 2, $\Delta y_{bw}^+ = 8.95$)

η_f/η_s	u_τ	$\ E\ _2$
$10^{-1}/10^{-1}$	5.692×10^{-2}	1.12×10^{-3}
$10^{-2}/10^{-2}$	5.727×10^{-2}	5.06×10^{-3}
$10^{-3}/10^{-3}$	5.727×10^{-2}	4.95×10^{-3}
$10^{-4}/10^{-4}$	5.727×10^{-2}	4.94×10^{-3}

Таблица 6. Зависимость результатов расчетов от толщины сшивки решений (сетка 2, $\Delta y_{bw}^+ = 8.95$)

$(\sigma^+)^2$	N_f	u_τ	$\ E\ _2$
80	4	5.727×10^{-2}	5.06×10^{-3}
400	11	5.727×10^{-2}	5.26×10^{-3}
800	16	5.731×10^{-2}	6.12×10^{-3}

Таблица 7. Зависимость результатов расчетов от положения точки сшивки решений (сетка 2, $\Delta y_{bw}^+ = 8.95$)

δ_{EL}^+	u_τ	$\ E\ _2$
50	5.841×10^{-2}	2.12×10^{-2}
75	5.742×10^{-2}	7.73×10^{-3}
100	5.727×10^{-2}	4.95×10^{-3}
120	5.727×10^{-2}	8.44×10^{-3}

В табл. 7 приведены результаты, демонстрирующие влияние положения точки сшивки решений, определяемого нормированным расстоянием δ_{EL}^+ . Так как точка сшивки является свободным параметром метода пенализированных пристеночных функций, то ее расположение может быть выбрано в любой области пограничного слоя, при этом точность численного решения определяется соответствием профиля скорости пристеночной функции с решением задачи (1)–(3) с используемой моделью турбулентности для замыкания. Кроме того, для ослабления требований к пристеночному разрешению точка сшивки должна быть достаточно удалена от вязкого подслоя. Так, из табл. 7 видно, что для данного числа Рейнольдса оптимальным положением является точка сшивки, соответствующая $\delta_{EL}^+ \approx 100$.

3.2. Обтекание пластины

Для верификации метода пенализированных пристеночных функций в двумерной постановке решена задача численного моделирования турбулентного обтекания пластины. Параметры задачи соответствуют тесту NASA, представленному в [37]. При анализе результатов использовано численное решение из [37], полученное с помощью кода CFL3D, основанного на применении структурированных расчетных сеток, элементарно-центрированного численного алгоритма и модели Спаларта–Аллмараса.

В качестве пристеночной функции использовался модифицированный закон Рейхарда (см. [38]), который более точно воспроизводит логарифмическую подобласть пограничного слоя:

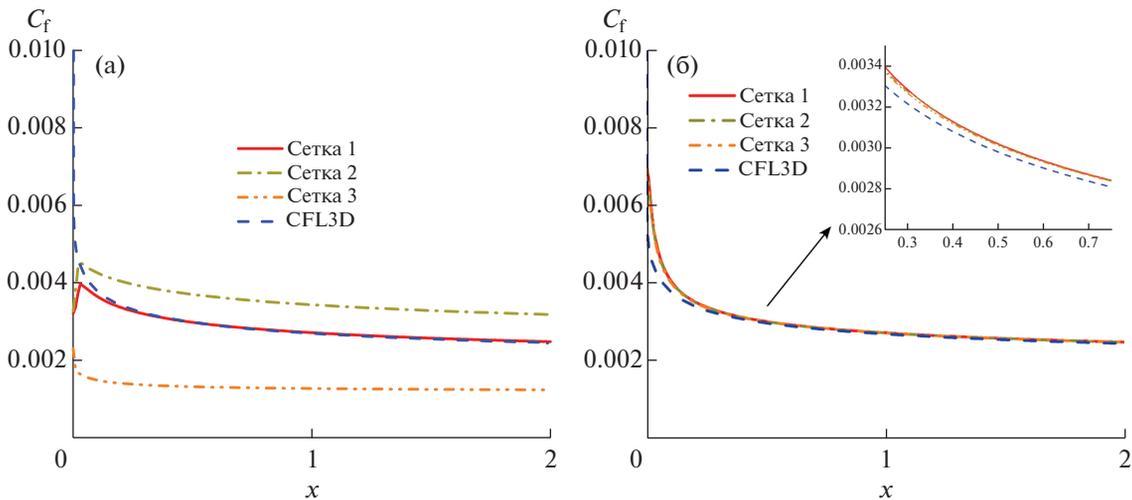
$$\tilde{f}_{Rei}(y^+) = (1 - \phi)f_{Rei}(y^+) + \phi f_{log}(y^+), \quad \phi = \tanh\left(\left(y^+/27\right)^4\right), \quad f_{log}(y^+) = \ln(y^+)/k + 21. \quad (28)$$

Параметры математической модели, определяющие течение, – число Рейнольдса и число Маха – равны $Re = 5 \times 10^6$ и $M = 0.2$. Задача решается в прямоугольной расчетной области в плоскости $XOY - [-0.3, 2] \times [0, 0.5]$ (фиг. 4). Поток движется слева направо, параллельно оси OX и набегает на бесконечно тонкую пластину с началом в точке $(0,0)$. При этом на левой границе расчетной области скорость потока постоянна и в безразмерном виде равна $(u)_{x=-0.3} = U_\infty = 1$. Здесь так же, как и для предыдущей задачи, на твердой стенке задаются нулевой поток температуры и граничное условие прилипания (модель Спаларта–Аллмараса) или условие (18) для поперечной и условие (19) для продольной составляющих вектора скорости (метод пенализированных пристеночных функций). Значение u_τ в (19) определяется из численного решения уравнения (22).

Численный расчет задачи проведен на последовательности структурированных декартовых сеток с различным пристеночным разрешением (см. табл. 8, где Δy_w^+ – нормированный поперечный размер пристеночной ячейки, остальные обозначения соответствуют использованным ранее при описании предыдущей задачи). Значение Δy_w^+ в таблице рассчитано по значению



Фиг. 4. Постановка задачи об обтекании пластины.



Фиг. 5. Коэффициент поверхностного трения на плоской пластине: (а) – модель Спаларта–Аллмараса, (б) – метод пенализованных пристеночных функций.

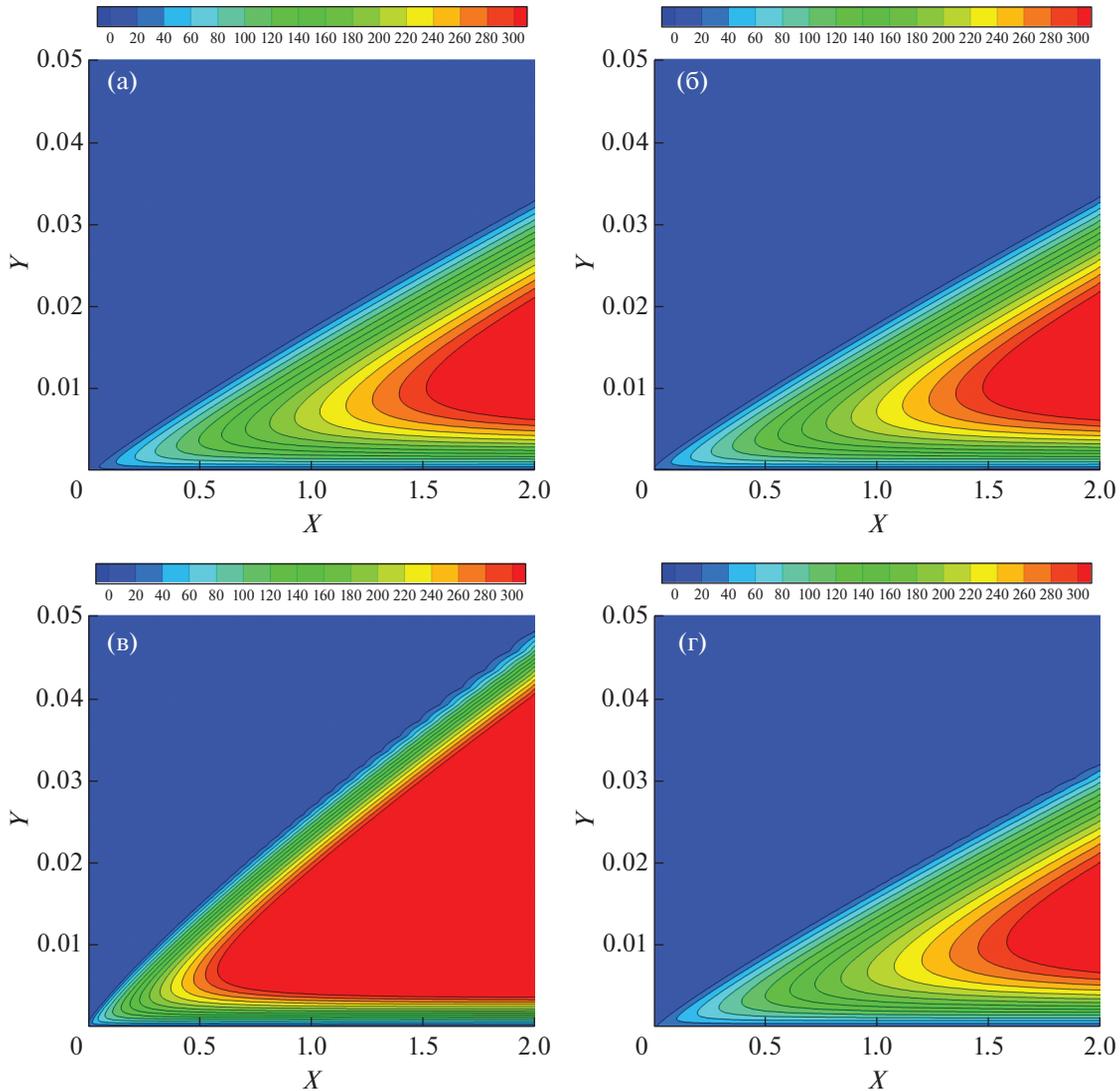
$u_\tau = 0.03688$, полученному из референсного решения (CFL3D) при $x = 0.97$. Размер ячеек в продольном направлении фиксирован – $\Delta x = 10^{-2}$, коэффициент разбега в поперечном направлении – $q = 1.2$, при этом размер ячеек в этом направлении ограничен величиной $\Delta y_{\max} = 10^{-2}$.

Для всех сеток задача решена в двух постановках: первая – пограничный слой на поверхности пластины моделируется уравнением Спаларта–Аллмараса, вторая – применяется метод пенализованных пристеночных функций. Во втором случае параметры уравнения для вычисления скорости трения на пластине для всех сеток одинаковы: коэффициенты пенализации $\eta_f = \eta_s = 10^{-2}$, толщина шивки $\sigma^+ = 58.2$, начальное приближение $u_\tau|_{l=0} = 4 \times 10^{-2}$.

На фиг. 5а представлены распределения коэффициента трения $C_f = \frac{\tau_w}{1/2\rho U_\infty^2}$, полученные при численном решении с применением модели Спаларта–Аллмараса. Видно, что результаты для сетки 1 хорошо согласуются с эталонным решением CFL3D, за исключением небольшой обла-

Таблица 8. Параметры сеток для расчетов задачи об обтекании пластины

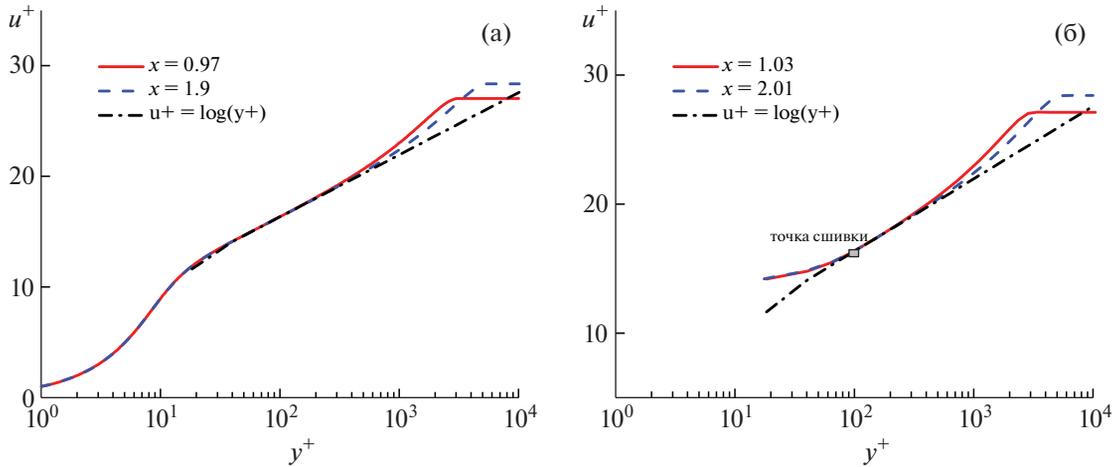
Сетка	N	Δy_w	$\Delta y_w^+(x = 0.97)$
1	19173	1.0×10^{-5}	1.84
2	17094	5.0×10^{-5}	9.22
3	16401	1.0×10^{-4}	18.44



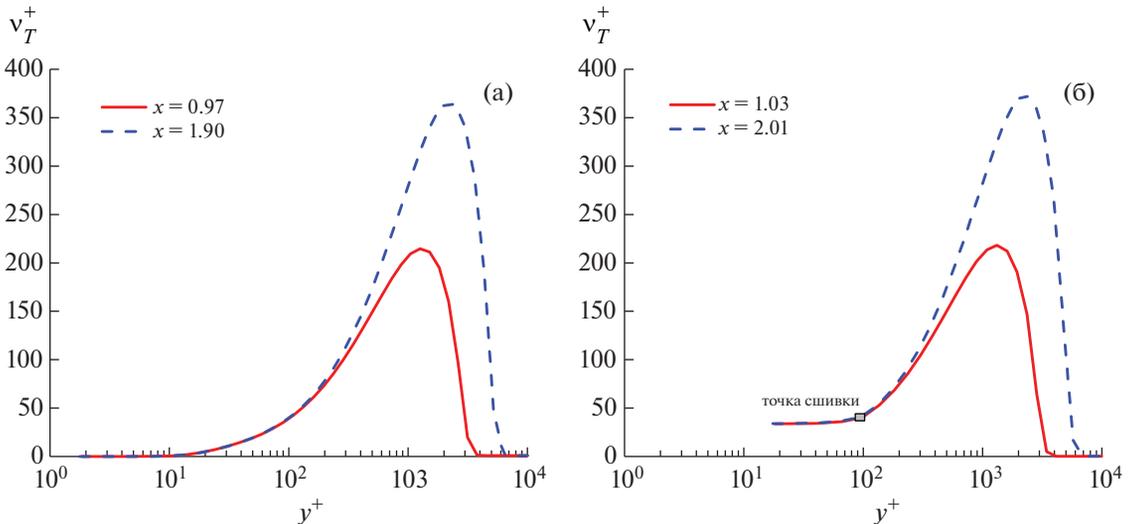
Фиг. 6. Линии уровня относительной турбулентной вязкости (v_T/v): (а) – код CFL3D, (б) – модель Спаларта–Аллмараса (сетка 1), (в) – модель Спаларта–Аллмараса (сетка 3), (г) – метод пенализированных пристеночных функций (сетка 3).

сти в начале пластины, вызванной сильным влиянием геометрической сингулярности на поведение регуляризованного решения в области передней кромки для разных граничных условий (условие переноса касательного напряжения (19) вместо условия прилипания). Расчеты с применением сеток более грубого пристеночного разрешения (сетки 2 и 3) показали неудовлетворительный результат, коэффициент трения существенно отличается от эталонного решения. На фиг. 5б те же зависимости приведены для решений, полученных с применением метода пенализированных пристеночных функций. Здесь уменьшение пристеночного сеточного разрешения не оказало заметного влияния на результаты расчетов, для всех сеток они хорошо согласуются с результатами CFL3D (за исключением окрестности точки $x = 0$).

Те же закономерности наблюдаются на графиках линий уровня относительной турбулентной вязкости $v_T^+ = v_T/v$ в пристеночной области, приведенных на фиг. 6. Расчеты с применением модели Спаларта–Аллмараса (фиг. 6б) на сетке с разрешенным пограничным слоем (сетка 7) позволили получить распределение, согласующееся с результатами CFL3D (фиг. 6а), в отличие от результатов для сетки 3 (фиг. 6в). В то же время применение метода пенализированных пристеночных функций для расчетов на сетке 3 обеспечило хорошую точность результатов (фиг. 6г). Отметим лишь небольшой сдвиг линий уровня вправо, относительно распределений (а) и (б),



Фиг. 7. Профиль продольной скорости: (а) – модель Спаларта–Аллмараса (сетка 1), (б) – метод пенализированных пристеночных функций (сетка 3).



Фиг. 8. Профиль относительной турбулентной вязкости v_T^+ : (а) – модель Спаларта–Аллмараса (сетка 1), (б) – метод пенализированных пристеночных функций (сетка 3).

который объясняется фазовым сдвигом в распределении коэффициента трения на поверхности пластины при расчетах двумя методами с разными механизмами регуляризации решения в окрестности передней кромки пластины (см. фиг. 5).

На фиг. 7а приведены профили нормированной продольной скорости u^+ в сечениях $x = 0.97$ и $x = 1.9$ для расчета с применением модели Спаларта–Аллмараса на сетке с разрешенным пограничным слоем (сетка 1), на фиг. 7б – те же закономерности, но полученные уже методом пенализированных пристеночных функций на “грубой” сетке 3 для сечений $x = 1.03$ и $x = 2.01$. Справа от точки сшивки ($y^+ > \delta_{EL}^+ = 100$) профили в сечениях $x = 0.97$ и $x = 1.9$ хорошо согласуются с профилями в сечениях $x = 1.03$ и $x = 2.01$ соответственно. Сравнение проводится в сечениях, соответствующих значениям C_f : 0.00271 и 0.00247. Отметим, что отличие пространственного положения сравниваемых сечений обусловлено наличием относительного сдвига решений, вызванного различием в механизме регуляризации решений в области передней кромки пластины.

На фиг. 8а и 8б в тех же сечениях расчетной области сопоставлены профили относительной турбулентной вязкости v_T^+ . Слева от точки сшивки ($y^+ < \delta_{EL}^+$) при использовании метода пенали-

зированных пристеночных функций значение турбулентной вязкости практически постоянно. Это связано с завышенными относительно решения с помощью модели Спаларта–Аллмараса значениями продольной скорости в этом случае. Отметим, что несмотря на то что решение в этой области “экстраполировано” из внешнего решения переносом касательных напряжений из области сшивки на поверхность пластины, профили скорости и вязкости в численном решении справа от точки сшивки хорошо согласуются с решением задачи на основе модели Спаларта–Аллмараса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен новый метод моделирования турбулентного пограничного слоя, применяемый при численном решении задач аэродинамики. С одной стороны, в нем так же, как и в классических подходах, используется идея сшивки внешнего решения с аналитическими пристеночными функциями, с другой – предлагается дифференциальная формулировка условия сшивки, которая позволяет избежать локальной интерполяции решения в точку сшивки и необходимости точного определения положения этой точки. Для переноса значений скорости трения на стенку используется характеристический метод штрафных функций. Метод сформулирован применительно к математической модели на основе усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса с замыканием уравнением Спаларта–Аллмараса.

Численная реализация метода не предполагает существенного усложнения вычислительного алгоритма. Дополнительное дифференциальное уравнение для расчета скорости трения на поверхности тела аппроксимировалось методом направленных разностей первого порядка, при этом сходимость по времени численного решения достигалась за несколько итераций.

Работоспособность метода продемонстрирована на примере решения двух задач – турбулентного течения в канале и обтекания плоской пластины. Результаты расчетов показали, что применение нового метода обеспечивает достаточную точность численного решения на сетках, в которых размер пристеночного шага более чем в 10 раз превышает ограничения, установленные для расчетов с применением модели Спаларта–Аллмараса (в которых точность моделирования пограничного слоя обеспечивается сеточным разрешением).

Дальнейшее развитие работы будет связано с несколькими направлениями. Во-первых, слабая формулировка условия сшивки делает его привлекательным для решения задач обтекания твердых тел с криволинейными границами, в том числе, с применением погруженных граничных условий. Во-вторых, особенности формулировки метода допускают его обобщение для применения в задачах с сильными отрывами, при этом предполагается использовать дифференциальные стандартные и неравновесные пристеночные функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moin P., Mahesh K.* Direct numerical simulation: A tool in turbulence research // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1998. V. 30. P. 539–578.
2. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA J.* 1992. V. 94.
3. *Gatski T.B., Hussaini M.Y., Lumley J.L.* Simulation and Modeling of Turbulent Flows. Oxford, 1996.
4. *Durbin P.A., Reif B., Pettersson A.* Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows. Wiley, 2001.
5. *Wilcox D.C.* Formulation of the $k - \omega$ Turbulence Model Revisited // *AIAA J.* 2008. V. 46. 11. P. 2823–2838.
6. *Froehlich J., von Terzi D.* Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // *Progress in Aerospace Sci.* 2008. JUL. V. 44. 5. P. 349–377.
7. *Xiao H., Jenny P.* A consistent dual-mesh framework for hybrid LES/RANS modeling // *J. Comp. Phys.* 2012. FEB 20. V. 231. 4. P. 1848–1865.
8. *Spalart P.R., Jou W.H., Strelets M. et al.* Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // *First AFOSR Inter. Conf. on DNS/LES*, Ruston, Louisiana. V. 1. Greyden Press, Columbus, OH, 1997. P. 4–8.
9. *Spalart P.R., Deck S., Shur M.L., et al.* A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // *Theoretic. and Comput. Fluid. Dynamic.* 2006. V. 20. 3. P. 181–195.
10. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K.* A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities // *Inter. J. of Heat and Fluid Flow.* 2008. V. 29. 6. P. 1638–1649.
11. *Patankar S.V., Spalding D.B.* Heat and Mass Transfer in Boundary Layers. Morgan-Grampia, 1968.
12. *Зайчик Л.И.* Пристеночные функции для моделирования турбулентного течения и теплообмена // *Теплофизика высоких температур.* 1997. Т. 35. 3. С. 391–396.

13. *Craft T.J., Gant S.E., Gerasimov A.V., et al.* Development and application of wall-function treatments for turbulent forced and mixed convection flows // *Fluid Dynamic. Res.* 2006. V. 38. 2. P. 127–144. Seiken Symposium. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169598305000778>.
14. *Beaugendre H., Morency F.* Penalization of the Spalart–Allmaras turbulence model without and with a wall function: Methodology for a vortex in cell scheme // *Comput. and Fluid.* 2018. Jul. V. 170. P. 313–323. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01963687>.
15. *Дубень А.П., Абалакин И.В., Цветкова В.О.* О граничных условиях на твердых стенках в задачах вязкого обтекания // *Матем. моделирование.* 2021. V. 32. 1. P. 79–98.
16. *Nichols R.H., Nelson C.C.* Wall function boundary conditions including heat transfer and compressibility // *AIAA J.* 2004. V. 42. 6. P. 1107–1114.
17. *Bodart J., Larsson J.* Wall-modeled large eddy simulation in complex geometries with application to high-lift devices // *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University.* 2011. P. 37–48.
18. *Beaugendre H., Morency F.* Penalization of the Spalart–Allmaras turbulence model without and with a wall function: Methodology for a vortex in cell scheme // *Comput. and Fluid.* 2018. JUL 15. V. 170. P. 313–323.
19. *Cai S.-G., Degrygn J., Boussuge J.-F., Sagaut P.* Coupling of turbulence wall models and immersed boundaries on Cartesian grids // *J. Comput. Phys.* 2021. V. 429. P. 109995. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999120307695>.
20. *Dhamankar N., Blaisdell G., Lyrantzis A.* Implementation of a wall-modeled sharp immersed boundary method in a high-order large eddy simulation tool for jet aeroacoustics // *54th AIAA Aerospace Sci. Meet.* 2016. 01.
21. *Brown-Dymkoski E., Kasimov N., Vasilyev O.V.* A characteristic based volume penalization method for general evolution problems applied to compressible viscous flows // *J. Comput. Phys.* 2014. Vol. 262. P. 344–357.
22. *Kasimov N., Dymkoski E., De Stefano G., Vasilyev O.V.* Galilean-invariant characteristic-based volume penalization method for supersonic flows with moving boundaries // *Fluids.* 2021. V. 6. 8. URL: <https://www.mdpi.com/2311-5521/6/8/293>.
23. *Kawai S., Larsson J.* Wall-modeling in large eddy simulation: length scales, grid resolution, and accuracy // *Phys. Fluid.* 2012. V. 24. 1. P. 015105.
24. *Kawai S., Larsson J.* Dynamic non-equilibrium wall-modeling for large eddy simulation at high Reynolds numbers // *Phys. Fluid.* 2013. V. 25. 1. P. 015105.
25. *Park G.I., Moin P.* An improved dynamic non-equilibrium wall-model for large eddy simulation // *Phys. Fluid.* 2014. V. 26. 1. P. 37–48.
26. *Абалакин И.В., Васильев О.В., Жданова Н.С., Козубская Т.К.* Метод характеристических штрафных функций для численного моделирования сжимаемых течений на неструктурированных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. V. 61. 8. P. 1336–1352.
27. *Жданова Н.С., Абалакин И.В., Васильев О.В.* Расширение метода штрафных функций Бринкмана для сжимаемых течений вокруг подвижных твердых тел // *Матем. моделирование.* 2022. V. 34. 2. P. 41–57.
28. *Bardina J., Huang P., Coakley T., et al.* Turbulence modeling validation // *28th Fluid Dynamic. Conf.* 1997. P. 2121.
29. *Brown-Dymkoski E., Kasimov N., Vasilyev O.V.* Characteristic-based volume penalization method for arbitrary mach flows around solid obstacles // *Direct and Large-Eddy Simulation IX, Proceedings of the Ninth International ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulations.* Eds. J. Frohlich, H. Kuerten, B.J. Geurts, V. Armenio, Springer, 2015. P. 109–115.
30. *Gorobets A., Bakhvalov P.* Heterogeneous CPUx parallelization for high-accuracy scale-resolving simulations of compressible turbulent flows on hybrid supercomputers // *Comput. Phys. Communicat.* 2022. V. 271. P. 108231. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001046552100343X>.
31. *Gorobets A., Duben A.* Technology for supercomputer simulation of turbulent flows in the good new days of exascale computing // *Supercomput. Frontiers and Innovat.* 2021. Feb. V. 8, 4. P. 4–10. URL: <https://superfri.su-su.ru/index.php/superfri/article/view/400>.
32. *Bakhvalov P., Abalakin I., Kozubskaya T.* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *Inter. J. Numer. Meth. Fluid.* 2016. V. 81. 6. P. 331–356.
33. *van der Vorst H.A.* BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1992. V. 13. 2. P. 631–644.
34. *Reichardt H.* Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungend // *Zeitschrift fñr Angewandte Math. und Mech.* 1951. V. 31. 7. P. 208–219.
35. *Zanoun E.S.M.* Answers to Some Open Questions in Wall Bounded Laminar and Turbulent Shear Flows. Technische Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg., 2003. URL: <https://books.google.ru/books?id=IPVcx-wEACAAJ>.
36. *Moser R.D., Kim J., Mansour N.N.* Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau 0$ // *Phys. Fluids A.* 1999. V. 11. P. 943–945.
37. NASA Langley Research Center Turbulence Modeling Resource. URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov>.
38. *Knopp T.* On grid-independence of RANS predictions for aerodynamic flows using model-consistent universal wall-functions // *Proceed. of the European Conf. on Comput. Fluid Dynamic.* 2006.