

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 532.6

ВОЛНОВОДНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТОГО ТУРБУЛЕНТНОГО
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

© 2023 г. В. А. Жаров^{1,*}, И. И. Липатов¹, Р. С. Селим¹

¹ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

*e-mail: v_zharov@mail.ru

Поступила в редакцию 08.11.2022 г.
Переработанный вариант 08.11.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

В работе представлено исследование развитого турбулентного пограничного слоя, возникающего при обтекании вязкой несжимаемой жидкостью пластины под нулевым углом атаки и с нулевым продольным градиентом давления. Для описания турбулентного пограничного слоя использован волноводный подход, в котором турбулентные пульсации связаны с волнами Толлмина–Шлихтинга, находящимися в состоянии трехволнового резонанса. Для исследования исходной нелинейной системы уравнений предложена оценка гидродинамических величин, которая не нарушает общепринятый подход в пограничном слое, но приводит к появлению нового малого параметра: отношению толщины потери импульса пограничного слоя к длине затухания наименее затухающей моды волн Толлмина–Шлихтинга. На основе метода многих масштабов получены уравнения для когерентной и стохастической частей пульсаций. Определены дисперсионные характеристики волн наименее затухающей моды на профиле средней продольной скорости развитого турбулентного пограничного слоя; проанализированы условия множественного трехволнового резонанса этой моды волн Толлмина–Шлихтинга. Для когерентной части пульсаций проведено сравнение пульсационных характеристик с известными численными результатами. Библ. 31. Фиг. 7. Табл. 1.

Ключевые слова: несжимаемая вязкая жидкость, турбулентный пограничный слой, волны Толлмина–Шлихтинга, когерентные структуры.

DOI: 10.31857/S0044466923050241, **EDN:** GGJGQN

ВВЕДЕНИЕ

На основе большого объема экспериментальных данных в работах [1–5] были проанализированы физические процессы в ламинарных и турбулентных пограничных слоях (ТПС). В них показано, что развитый турбулентный пограничный слой содержит организованные вихревые структуры, определяющие многие физические свойства этих течений. Большой фактический материал, полученный в последние годы экспериментально о структуре турбулентного пограничного слоя, содержится в работах [6–9]. Краткое изложение этих работ содержится в лекции № 7 Ю.С. Качанова [10]. Математическая интерпретация особенностей этих течений предложена в работах [11–13].

В случае ТПС в данной работе рассматриваются модели, основанные на волноводном представлении динамики пульсаций. Полученная таким образом модель очень хорошо описывает свойства развитого турбулентного пограничного слоя (ТПС) и поэтому заслуживает серьезного обоснования, которое может быть достигнуто путем привлечения теории динамических систем [14]. Для этого удобно воспользоваться формулировкой известной теоремы Биркгофа–Хинчина, которая была дана в работе [15]. Она дает условия существования средних величин по времени для динамических систем определенного вида. Далее приведена теоретическая постановка задачи описания когерентной структуры [16] в развитом ТПС и показано, что с точки зрения теоремы Биркгофа–Хинчина результаты, полученные в [16], вполне обоснованы.

Для определения волноводных свойств ТПС в данной работе используется спектр собственных значений и собственных функций уравнения Орра–Зоммерфельда на профиле развитого ТПС [17].

Теоретическая часть задачи связана с решением уравнения для когерентной структуры, некоторым приближением которого является совокупность гармоник в состоянии множественного трехволнового резонанса. Ее динамика описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Динамический инвариант этой системы уравнений можно положить равным 1, что позволяет применить теорему Биркгофа–Хинчина. В результате можно утверждать, что определенные ранее в [16] средние по времени величины квадратов модулей амплитуд, описывающих когерентную структуру, конечны и допускают корректную численную оценку. При этом когерентная структура, по своим свойствам воспроизводимости, вполне соответствует обнаруженной в эксперименте [10] детерминированной турбулентности (DeTu).

1. В работе [16] по аналогии с волноводной моделью [18], [19] из уравнений Навье–Стокса получено нелинейное уравнение (1) для фурье-составляющей вертикальной скорости волн Толлмина–Шлихтинга (Т–Ш), описывающей пульсации в пограничном слое на пластине под нулевым углом атаки при отсутствии продольного градиента давления в одномодовом приближении. Для этого поле скорости разлагалось на две составляющие: среднюю по времени и флуктуирующую части. Уравнения для когерентной составляющей отделяются от уравнений для случайных пульсаций в явной форме за счет наличия трехволнового резонанса волн Толлмина–Шлихтинга дискретного спектра, т.е. имеем в итоге тройное разложение [20] поля скоростей турбулентного течения. При этом для некогерентной части получается, в общем случае, система “кинетических” уравнений, которая при определенных предположениях может быть сведена к одному.

Пусть d – характерный поперечный масштаб течения, L – продольный. Поскольку при оценке величин в исходных уравнениях сравниваются силовые характеристики, то $d \sim \delta^{**}$, δ^{**} – толщина потери импульса. Обозначим через U и V средние продольную и поперечную компоненты скорости, через u, v, w, p – пульсационные компоненты скорости и давление, U_∞ – скорость набегающего потока, ν – коэффициент кинематической вязкости. Введем безразмерные величины: $\bar{U} = U/U_\infty$, $\varepsilon^2 \bar{V} = V/U_\infty$, $\varepsilon \bar{u}_i = u_i/U_\infty$, $\varepsilon \bar{p} = p/\rho U_\infty^2$, $\bar{x}_i = x_i/d$, $\bar{t} = tU_\infty/d$, $X = x/L$, $T = tU_\infty/L$, $\{u_i\} = (u, v, w)$, $\{x_i\} = (x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, $R = U_\infty d/\nu$, $\varepsilon^2 = d/L \ll 1$. Тогда уравнения для \bar{U} и \bar{V} в приближении пограничного слоя запишутся в виде

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial T} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(-\overline{uv} + \frac{1}{\varepsilon^2 R} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right), \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

$$\overline{u\bar{v}} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \left(\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \langle \bar{u}\bar{v} \rangle dt_0 \right) dt_1, \quad t_0 = t/(d/U_\infty), \quad t_1 = \varepsilon t_0$$

(здесь $\langle \dots \rangle$ – среднее по ансамблю), а для пульсаций \bar{u}_i, \bar{p} , $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_1} + f_i = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{R} \nabla^2 \bar{u}_i + \varepsilon \zeta_i - \varepsilon^2 Q_i + o(\max[\varepsilon^2, 1/R]),$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0, \quad \mathbf{f} = \left(u_2 \frac{\partial U}{\partial y}, 0, 0 \right),$$

$$Q_1 = \bar{u} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \quad Q_2 = \bar{v} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{v}\bar{V}}{\partial \bar{y}}, \quad Q_3 = \bar{V} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}.$$

В уравнениях пульсаций использованы следующие обозначения: $\zeta_i = \partial(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j)/\partial \bar{x}_j$, $i, j = 1, 2, 3$ (по одинаковым индексам предполагается суммирование). В качестве граничных условий для сформулированной системы уравнений примем: $\bar{u}_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, при $\bar{y} = 0, \infty$, $\bar{p} = 0$ при $\bar{y} = \infty$. Относительно числа Рейнольдса R предполагается, что $R \gg 1$, $\varepsilon^2 R \gg 1$.

Уравнения для пульсаций приводятся к системе из двух уравнений: уравнению Орра–Зоммерфельда для вертикальной компоненты скорости и уравнению Сквайра для вертикальной компоненты завихренности. Благодаря тому, что разложение по собственным функциям линейных частей указанных уравнений обладает полнотой, можно решение задачи представить в виде рядов по собственным функциям.

Исключая давление из уравнений для пульсаций, получим для вертикальных компонентов пульсационной скорости \bar{v} и завихренности $\bar{\eta}$ соответственно

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right) \Delta \bar{v} - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{R} \Delta^2 \bar{v} &= \varepsilon D_{Osj} \zeta_j - \varepsilon^2 D_{Osj} Q_j, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right) \bar{\eta} + \frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} \Delta \bar{\eta} &= \varepsilon D_{Sj} \zeta_j - \varepsilon^2 D_{Sj} Q_j, \\ (D_{Osj}) &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}, \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}, -\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{y}}\right), \quad (D_{Sj}) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, 0, -\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right). \end{aligned}$$

При этом компоненты \bar{u} , \bar{w} , которые остались неизвестными, определяются из соотношений

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = \bar{\eta}.$$

Систему уравнений для вертикальных компонентов скорости и завихренности можно упростить, выразив продольную и поперечную компоненты через вертикальную скорость. Приближенно вклад вертикальной завихренности можно учесть в виде индуцированной части решения уравнения Сквайра для вертикальной завихренности в предположении отсутствия резонансов между модами Т–Ш и модами уравнения Сквайра. Ищем решение в виде фурье-представления для вертикальной скорости пульсаций

$$v_{\omega \mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = A_{\mathbf{k}}(t_1, t_2) \varphi_{\omega \mathbf{k}}(y) e^{-i\omega(\mathbf{k})t_0 + i\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0}, \quad \mathbf{k} = (\alpha, \beta), \quad \mathbf{r} = (x, z).$$

$$\frac{\partial A_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\varepsilon \int \bar{H}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} d\mathbf{k}_1 + \varepsilon^2 \left(\Omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} - \int \bar{F}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \right) + o(\varepsilon^2), \quad (1)$$

$$\Omega_{\mathbf{k}} = \text{Im}(\bar{\omega}_l(\mathbf{k})) + h_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2.$$

Здесь $v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ – фурье-компонент вертикальной скорости пульсаций, $A_{\mathbf{k}}$ – фурье-компонент амплитуды вертикальной скорости пульсаций, $\varphi(y)$ – нормированная по норме L_2 наименее затухающая собственная функция дискретного спектра уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем развитого турбулентного пограничного слоя, $\bar{\omega}_l(\mathbf{k}) = \omega_l(\mathbf{k}) / \max_{\mathbf{k}} |\omega_l(\mathbf{k})|$, $\omega(\mathbf{k})$ – собственная частота, $\omega(\mathbf{k}) = i\omega_l(\mathbf{k}) + \omega_R(\mathbf{k})$, $i^2 = -1$, $\bar{H}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$, $\bar{F}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ – матричные элементы, определяемые через интегралы от собственных функций [16], $h_{\mathbf{k}}$ – члены, обусловленные малыми продольными градиентами компонентов средней скорости ТПС.

Уравнение (1) содержит малый параметр $\varepsilon^2 = \frac{\delta^{**}}{L}$, где δ^{**} – толщина потери импульса, L – характерный продольный масштаб длины. Для асимптотического согласования членов уравнения вводится соотношение:

$$\frac{\delta^{**}}{L} \sim \frac{\delta^{**} |\text{Im}(\omega^{**}(\mathbf{k}, \delta^{**}))|}{U_{\infty}}. \quad (2)$$

Условие (2), с физической точки зрения, показывает, что учитывается затухание волн Т–Ш на масштабе L .

В связи с наличием параметра ε появляется иерархия масштабов времени:

$$\tau_0 = \frac{\delta^{**}}{U_{\infty}}, \quad \tau_1 = \frac{\tau_0}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = \frac{\tau_0}{\varepsilon^2}, \quad \dots,$$

которые определяют безразмерные переменные $t_0 = t/\tau_0$, $t_1 = t/\tau_1$, $t_2 = t/\tau_2, \dots$

Когерентная часть пульсаций определяется с помощью соотношения

$$A_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}}^c + A_{\mathbf{k}}', \quad A_{\mathbf{k}}^c = \langle A_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (3)$$

Далее представим скорость в пограничном слое в виде тройной суммы [20]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}^c + \mathbf{u}', \quad \mathbf{U} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \left(\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \langle \mathbf{u} \rangle dt_0 \right) dt_1, \quad (4)$$

$$\langle \mathbf{u}' \rangle = 0, \quad \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \left(\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \langle \mathbf{u}^c \rangle dt_0 \right) dt_1 = 0, \quad \mathbf{u} = (u, v, w).$$

Здесь \mathbf{U} – средняя скорость, \mathbf{u}^c – когерентная составляющая, \mathbf{u}' – стохастическая составляющая. Амплитуды волн, в соответствии с принципом тройной декомпозиции, также представляются в виде суммы когерентной и некогерентной частей, для которых получается система уравнений, содержащих малый параметр ε . Его наличие позволяет искать решение уравнений (1) для амплитуд в виде разложения по этому параметру.

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом многих масштабов [21]. Представим производную по времени амплитуды $A_{\mathbf{k}}^c$, в виде разложения по параметру ε :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \quad A_{\mathbf{k}}^c = A_{\mathbf{k}}^{c(0)} + \varepsilon A_{\mathbf{k}}^{c(1)} + \varepsilon^2 A_{\mathbf{k}}^{c(2)} + \dots$$

Собирая члены при одинаковых степенях ε , в итоге получаем последовательность из трех уравнений. Разрешая эти уравнения последовательно в масштабах t_0 , t_1 и исключая секулярные члены, получим из первых двух:

$$A_{\mathbf{k}}^{c(0)} = A_{\mathbf{k}}^{c(0)}(t_1, t_2), \quad \frac{\partial A_{\mathbf{k}}^{c(0)}}{\partial t_1} = - \int H_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \Xi(\Omega_3) A_{\mathbf{k}_1}^{c(0)} A_{\mathbf{k}_2}^{c(0)} d\mathbf{k}_1, \quad (5)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \quad \Omega_3 = \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2), \quad \Xi(x) = 1, \quad x = 0, \quad \Xi(x) = 0, \quad x \neq 0.$$

Отметим свойство уравнения (5) для $A_{\mathbf{k}}^{c(0)}$ в масштабе t_1 . Оно инвариантно относительно замены переменных

$$A_{\mathbf{k}}^{c(0)}(t_1, t_2) = \phi(t_2) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^{c(0)}(t'_1), \quad t'_1 = \phi(t_2) t_1. \quad (6)$$

В итоге решение для когерентной части представляется в виде (множественный трехволновой резонанс [19]):

$$A_{\mathbf{k}}^{c(0)} = a_1 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1^0) + \sum_{l=1}^m \left\{ a_2^l \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2^{0l}) + a_3^l \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3^{0l}) \right\} +$$

$$+ a_1^* \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1^0) + \sum_{l=1}^m \left\{ a_2^{*l} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2^{0l}) + a_3^{*l} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3^{0l}) \right\}, \quad (7)$$

$$\omega_{\mathbf{k}_1^0}^{(0)} = \omega_{\mathbf{k}_2^{0l}}^{(0)} + \omega_{\mathbf{k}_3^{0l}}^{(0)}, \quad \mathbf{k}_1^0 = \mathbf{k}_2^{0l} + \mathbf{k}_3^{0l}, \quad \omega_{-\mathbf{k}}^{(0)} = -\omega_{\mathbf{k}}^{*(0)}, \quad \varphi_{-\mathbf{k}}^{(0)} = \varphi_{\mathbf{k}}^{*(0)}, \quad l = 1, \dots, m,$$

где $\mathbf{k}_i^{(0l)}$, $i = 1, 2, 3$, $l = 1, \dots, m$, – множество векторов, удовлетворяющих уравнениям трехволнового резонанса, l – номера субгармоник, m – число субгармоник, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. В итоге, в случае множественного трехволнового резонанса получаем автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [12]:

$$\frac{da_1}{dt_1} = \sum_{l=1}^m \Lambda_1^l a_2^l a_3^l, \quad \frac{da_2^l}{dt_1} = \Lambda_2^l a_1 a_3^{l*}, \quad \frac{da_3^l}{dt_1} = \Lambda_3^l a_1 a_2^{l*}, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где Λ_j^l , $j = 1, 2, 3$, $l = 1, 2, \dots, m$ – коэффициенты, определяемые интегралами от произведений собственных функций уравнения Орра–Зоммерфельда, принадлежащих одной моде.

Умножая эти уравнения на соответствующие комплексно сопряженные амплитуды вместе с некоторыми произвольными весовыми множителями q_s^l , $l = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, 3$, и полагая

$$\left(q_1 \Lambda_1 + q_2^l \Lambda_2^{l*} + q_3^l \Lambda_3^{l*} \right) = \left(q_1 \Lambda_1^* + q_2^l \Lambda_2^l + q_3^l \Lambda_3^l \right) = 0, \quad l = 1, \dots, m,$$

получим систему алгебраических уравнений для пар величин

$$q'_{12} = \frac{q'_2}{q_1}, \quad q'_{13} = \frac{q'_3}{q_1}, \quad l = 1, \dots, m. \tag{9}$$

Поведение решения системы (6) дифференциальных уравнений находится в зависимости от значений величин q'_{12} и q'_{13} , которые определяются по коэффициентам Λ_i , $i = 1, 2, 3$. В случае положительности q'_{12} и q'_{13} динамика системы финитна и удовлетворяет динамическому инварианту:

$$I^{(m)}(t_1) = |a_1|^2 + \sum_l \left(q_{12}^{(l)} |a_2^{(l)}|^2 + q_{13}^{(l)} |a_3^{(l)}|^2 \right) = \text{const}, \tag{10}$$

здесь сумма берется по всем субгармоникам в состоянии трехволнового резонанса с основной гармоникой. В случае $q_{12}^{(j)} > 0$, $q_{13}^{(j)} > 0$, инвариант $I^{(m)}(t_1)$ можно преобразовать к уравнению n -мерной ($n = 2 + 8m$) сферы.

Воспользуемся теперь преобразованием (6): $a_i = \phi(t_2) \tilde{a}_i(\phi(t_2)t_1, t_2)$, ϕ – действительная функция от t_2 , которое оставляет неизменным уравнение для амплитуд a_i в масштабе t_1 . В результате применения этого преобразования константу в выражении (10) можно положить равной 1. В этом случае относительно системы уравнений (8) выполняются все условия теоремы Биркгофа–Хинчина в формулировке [15].

2. Приведем здесь теорему Биркгофа–Хинчина в формулировке [15], так как в этой формулировке непосредственно видно соответствие с поставленной задачей.

Пусть состояние рассматриваемой системы представлено точкой P на замкнутом n -мерном многообразии, а координаты $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ точки P удовлетворяют следующей автономной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_i}{dt} = A_i(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{11}$$

Уравнения (10) в предположении однозначности их решения определяют для каждого t преобразование T_t любого подмножества E многообразия $M^n : T_t E = E'$, где E' – множество всех точек P' , в которые передвинутся точки P множества E за промежуток времени t . Интегральным инвариантом называется такая функция множества $I(E)$, для которой всегда $I(T_t E) = I(E)$, где $I(M^n) = 1$. Формулировка теоремы имеет вид [15].

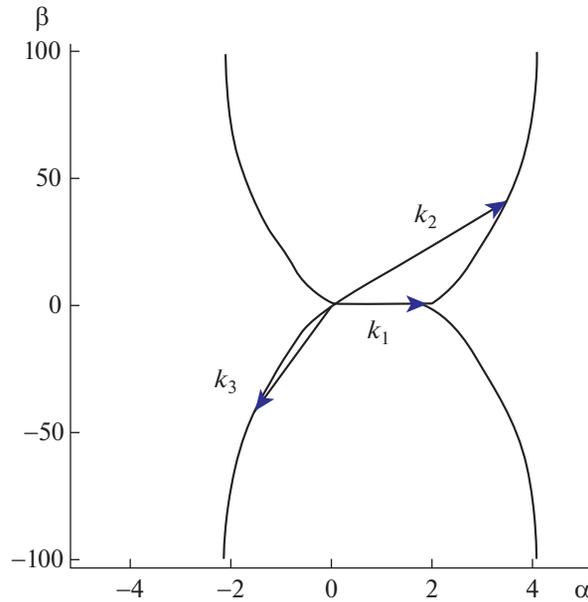
Так что, для любой вещественнозначной функции $f(P)$, определенной на M^n и суммируемой относительно $I(E)$, существует и конечен для всех P , за исключением, возможно, не более чем множества U , для которого $I(U) = 0$ предел:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \int_0^c f(T_t P) dt = \psi(P). \tag{12}$$

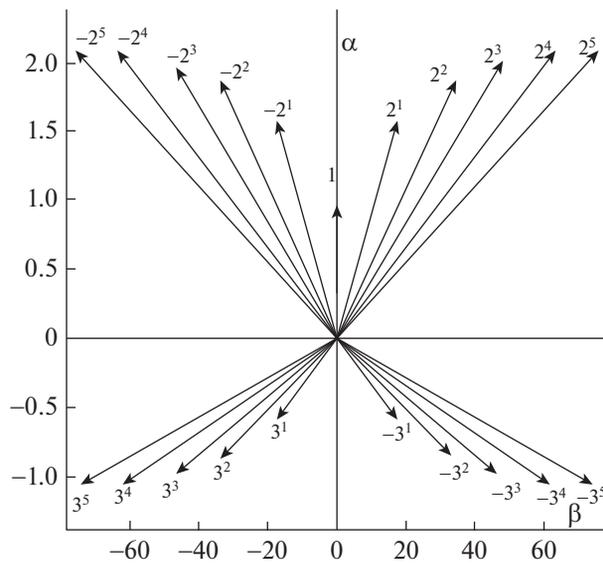
В предыдущем разделе получена автономная система дифференциальных уравнений (8), решение которой удовлетворяет инварианту (10), нормированному на 1. Это и определяет применимость теоремы Биркгофа–Хинчина [10] к данному случаю. Таким образом, динамика автономной системы осуществляется на поверхности n -мерной (далее $n = 42$) единичной сферы.

3. Теорема Биркгофа–Хинчина гарантирует существование средних по времени значений квадратов амплитуд гармоник и конечного множества субгармоник. В данной статье представлены результаты численного определения этих величин с помощью спектральных характеристик волн Толлмина–Шлихтинга (Т–Ш) на профиле средней продольной скорости развитого ТПС [17].

На фиг. 1 представлена кривая 3 волнового резонанса для $\mathbf{k}_1 = (2, 0)$, $\mathbf{k}_2 = (\alpha_2(\beta_2), \beta_2)$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\text{Re}_\delta = 10^4$. Кривая представляет решение системы уравнений $\omega(\mathbf{k}_1) = \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3)$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, для наименее затухающей моды волн Т–Ш.

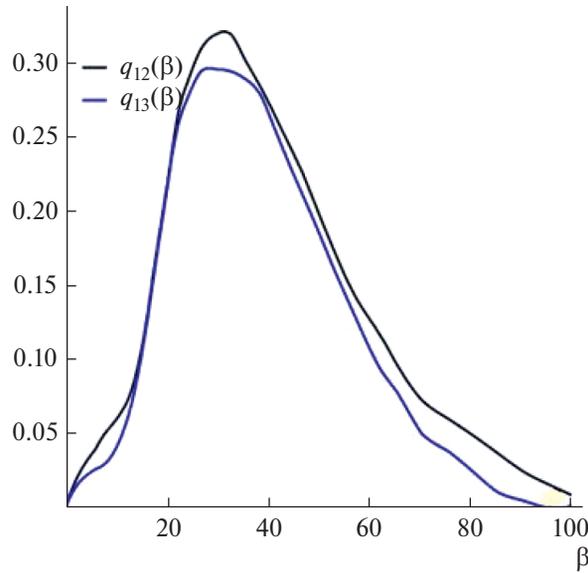


Фиг. 1. Кривая трехволнового резонанса для наименее затухающей моды волн Г–Ш, $\text{Re}\delta = 10^4$.



Фиг. 2. Совокупность волновых векторов множественного трехволнового резонанса, $\text{Re}\delta = 10^4$.

Фигура 2 показывает, что с продольной волной Г–Ш с волновым вектором \mathbf{k}_0 вступают в резонанс субгармоники с \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , которые имеют волновые вектора, расположенные практически по нормали к плоскости симметрии среднего течения, т.е. волны с продольной завихренностью. Следует обратить внимание на то, что на фиг. 2 по горизонтали отложены единицы, а по вертикали – сотни. Фигура 2 дает геометрическое представление о гармонике и субгармониках в пространстве волновых чисел. Совокупность векторов субгармоник берется по всем резонансным тройкам и симметричным к ним относительно горизонтальной оси. Выбор набора субгармоник проводится из области пространства волновых векторов, в которой множители $q_{12}^{(j)}$, $q_{13}^{(j)}$ положительны (фиг. 3).



Фиг. 3. Зависимость значений множителей $q_{12}(\beta)$ и $q_{13}(\beta)$ на кривой трехволнового резонанса от волнового числа.

На фиг. 3 представлено поведение $q_{12}(\beta)$, $q_{13}(\beta)$ на кривой трехволнового резонанса от поперечного волнового числа β . Графическое совпадение кривых в области $11 < \beta < 21$ не дает представления о небольшом, но вполне устойчивом различии этих величин.

Система уравнений (8) для множественного трехволнового резонанса решалась численно с помощью пакета прикладных программ. Начальные условия для системы (8) задавались точкой, взятой из множества точек, статистически равномерно распределенных на n -мерной ($n = 42$) единичной сфере. В реальности эти граничные условия формируются в нелинейной области перехода. Однако окончательные представления об этом процессе являются еще предметом исследований [22], [23].

Численные результаты показывают, что за очень большой промежуток времени ($0 \leq t \leq 1000$) инвариант меняется в шестом знаке. В результате можно найти средние значения квадратов амплитуд гармоники и субгармоник за достаточно длительную реализацию во времени численно.

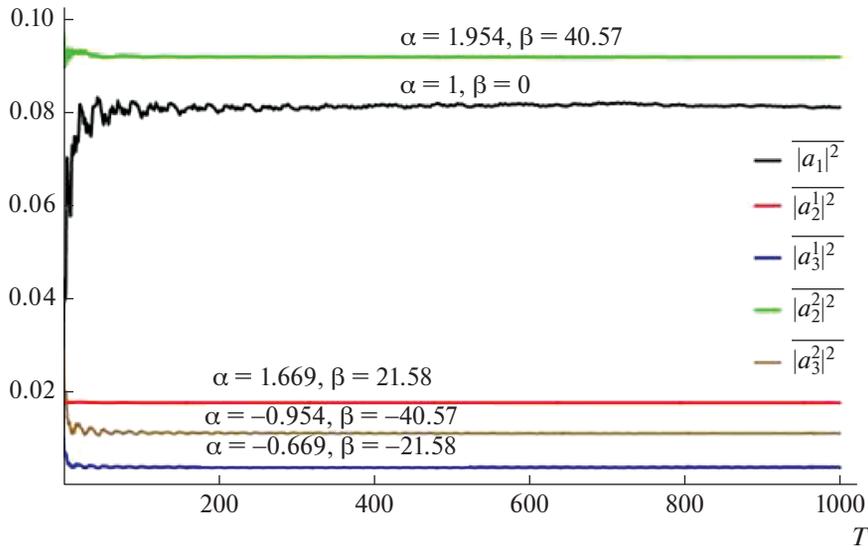
На фиг. 4 представлена зависимость средних квадратов модулей основной гармоники и двух амплитуд субгармоник множественного трехволнового резонанса, описываемого системой уравнений (8), вычисленных за конечный интервал времени T . Средние величины определены как функции интервала осреднения:

$$\overline{|a_l^s|^2} = \left(|a_l^s|^2 \right)_{t_1} = \frac{1}{T} \int_0^T |a_l^s(t_1)|^2 dt_1, \quad l = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

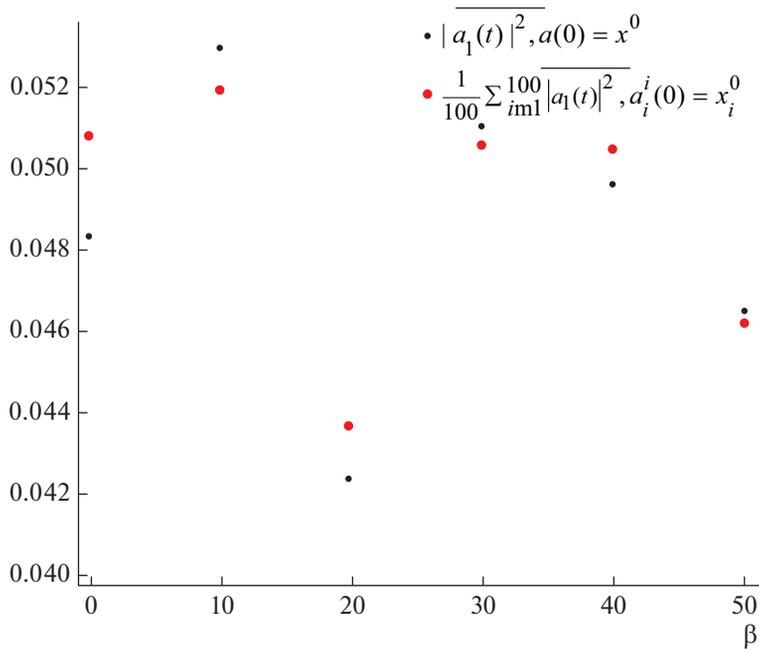
Здесь представлены типичные зависимости от времени амплитуды $\left(|a_1(t_1)|^2 \right)_{t_1}$ основной гармоники при $\beta = 0$ и двух амплитуд субгармоник $\left(|a_1^1(t_1)|^2 \right)$, $\left(|a_2^1(t_1)|^2 \right)$ при $\beta = (50.12, 75.8)$ соответственно, из набора множественного трехволнового резонанса первой моды.

На фиг. 5 представлено сравнение среднего квадрата модулей амплитуд гармоники и субгармоник по времени со средними по времени, усредненными по случайному набору начальных данных (100 вариантов).

В табл. 1 приведено сравнение между средним значением по времени и усредненным по пространству при пяти гармониках.



Фиг. 4. Временные зависимости средних значений квадрата амплитуд основной гармоники $a_1(t)$, $\beta = 0$ и $a_1^1(t)$, $a_2^1(t)$, и двух субгармоник $a_{12}(t)$, $a_{22}(t)$, при $\beta = (-50.12, -75.8)$, где $\left(|a_i^s|^2 \right)_{t_1}$ – средние по времени в масштабе τ_1 значения квадрата модуля амплитуд гармоники и субгармоник.



Фиг. 5. Сравнение средних квадратов модулей амплитуд по времени (интервал осреднения $T = 1000$) и по случайному набору начальных данных (100 вариантов) – определяются синими и желтыми точками соответственно.

Сравнение выше полученного результата с усреднением по пространству $\left(|a_i|^2 \right)_S = \frac{1}{\sigma(S)} \int_S |a_i|^2 ds \cong 0.047619$, S есть n -мерная единичная сфера ($n = 42$), $\sigma(S)$ – площадь сферы S , ds – элемент площади), показывает, что эти средние близки друг к другу, поэтому можно предположить, что выполняется условие эргодичности. Однако проверка этого предположения тре-

Таблица 1. Сравнение между средним значением по времени и усредненным по пространству при пяти гармониках

l	$\overline{ a_l ^2}$, $a(t=0) = x^0$ – Случайная точка на единичной сфере	$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \overline{ a_i^{(l)} ^2}$, $a_i^{(l)}(t=0) = x_i^0$ $l = 1, \dots, 5$	Δ
$l = 1$	0.0529904	0.0519488	9%
$l = 2$	0.0423804	0.0436673	8%
$l = 3$	0.0510327	0.0505745	6.2%
$l = 4$	0.049629	0.0505255	5.1%
$l = 5$	0.046456	0.0461685	3%

будет дальнейших более точных вычислений при получении решения системы (8) и численного определения средних по времени. Возможно также, что необходимо рассматривать большее число субгармоник.

4. Рассмотренная модель ТПС является моделью с самосогласованным полем, так как за основу берется известное распределение средней продольной скорости. Поэтому первая проверка модели должна отвечать на вопрос, получаем ли мы исходное распределение средней продольной скорости. Такая проверка была проведена в работе [26], в которой показано, что экспериментально определенное касательное напряжение вместе с уравнениями Рейнольдса и реологическими соотношениями модели дают правильное распределение продольной скорости, совпадающее с экспериментальным [27].

Дальнейшая проверка связана с определением средних компонент тензора напряжений. Решение задачи представимо в виде $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}_c + \mathbf{u}'$ ($\mathbf{u} = (u, v, w)$), $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{U}, \bar{V}, 0)$, $\mathbf{u}' = (u', v', w')$ тройной декомпозиция [20]), где $\bar{\mathbf{U}}$ – среднее значение по времени и ансамблю и соответствующую флуктуирующую часть $\mathbf{u}_c + \mathbf{u}'$ где \mathbf{u}_c – когерентная и \mathbf{u}' – стохастическая составляющие турбулентных пульсаций. Для упрощения записи далее индекс u когерентной составляющей опущен. Стохастические величины полагаются равными нулю. Ниже используется определение (4) средних [11], с помощью которого получают формулы для средних пульсаций продольной скорости и компонент тензора напряжений.

Используя уравнение непрерывности и приближенное выражение для индуцированного решения уравнения Сквайра нормальной составляющей завихренности $\eta_{k\omega}$, можно получить компоненты Фурье продольной скорости и завихренности.

$$u_{\omega k} = \frac{i}{k^2} \left(\alpha \frac{dv_{\omega k}}{dy} - \beta \eta_{\omega k} \right), \quad \eta_{\omega k} = \frac{i}{k^2} \left(\frac{\beta v_{\omega k}}{-\omega(\mathbf{k}) + \alpha \bar{U}(y)} \frac{d\bar{U}}{dy} \right), \tag{13}$$

$$v_{\omega k} = A_k^{c(0)}(t_1) \delta(\omega - \omega_{T-S}(\mathbf{k})) e^{i\omega(\mathbf{k})t_0 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \varphi_0(\mathbf{k}, y). \tag{14}$$

Здесь $A_k^{c(0)}$ определяется формулой (7), ω – собственное значение спектральной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда, v, η – вертикальные компоненты пульсаций скорости и завихренности, $\mathbf{k} = (\alpha, \beta)$, α, β – соответственно продольное и поперечное волновые числа, $A_k^{c(0)}$ – фурье-компонент амплитуды вертикальной составляющей скорости в развитом турбулентном пограничном слое, \mathbf{k}_1 – волновое число основной гармоники, $\mathbf{k}_j^s, j = 2, 3; s = 1, 2, \dots, m$, – волновые числа субгармоник, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\varphi_0(\mathbf{k}, y)$ – собственная функция наименее затухающей моды уравнения Орра–Зоммерфельда.

Суммирование осуществляется по всем субгармоникам в состоянии множественного трехволнового резонанса, где $a_i^s, i = 1, 2, 3, s = 1, 2, \dots, m$, – амплитуды гармоники и субгармоник в состоянии трехволнового резонанса. Амплитуды этих волн удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8). Система амплитуд $a_i^s, i = 1, 2, 3, s = 1, 2, \dots, m$ удовлетворяет инварианту,

представляющему сумму квадратов модулей амплитуд этих волн, умноженных на весовые множители. С помощью преобразования (6)

$$a_i(\tilde{t}_1, t_2) = \phi(t_2) \tilde{a}_i(\phi(t_2)t_1, t_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad \phi(t_2) = \sqrt{\tilde{\lambda}(t_2)/\tilde{\Phi}(t_2)},$$

и линейной замены переменных инвариант приводится к единице, здесь $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\Phi}$ определены в работе [12] и вычисляются с помощью статистики 4-го порядка в статистически стационарном случае.

Из уравнений (13), (14) вычисляются квадраты модулей амплитуд волн, и усреднение с помощью (13) по (t_0, t_1) дает компоненты пульсационных скоростей:

$$\overline{u^2} = \frac{\phi^2}{(2\pi)^3} \left(f_1(\mathbf{k}_1, y) + 2f_2(\mathbf{k}_l^s, y) \frac{dU}{dy} + 2f_3(\mathbf{k}_l^s, y) \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \right), \quad (15)$$

$$f_1(\mathbf{k}_1, y) = - \frac{(|a_1|^2)_{t_1} \alpha_1^2}{|\mathbf{k}_1|^4} |\varphi_1'(\mathbf{k}_1, y)|^2 - 2 \sum_{s=1}^m \sum_{l=2}^3 \frac{(|a_l^s|^2)_{t_1}}{q_{l,l}^s} (\alpha_l^s)^2 \frac{|\varphi_l'(\mathbf{k}_l^s, y)|^2}{|\mathbf{k}_l^s|^4},$$

$$f_2(\mathbf{k}_l^s, y) = - \frac{(|a_1|^2)_{t_1} \alpha_1 \beta_1^2}{|\mathbf{k}_1|^4} \left(\frac{\varphi_1^*(\mathbf{k}_1, y) \varphi_1(\mathbf{k}_1, y)}{\omega_r(\mathbf{k}_1) - \alpha_1 U(y) + i\omega_i(\mathbf{k}_1)} + \frac{\varphi_1'(\mathbf{k}_1, y) \varphi_1'^*(\mathbf{k}_1, y)}{\omega_r(\mathbf{k}_1) - \alpha_1 U(y) - i\omega_i(\mathbf{k}_1)} \right) -$$

$$- \sum_{s=1}^m \sum_{l=2}^3 \frac{(|a_l^s|^2)_{t_1} \alpha_l^s (\beta_l^s)^2}{q_{l,l}^s |\mathbf{k}_l^s|^4} \left(\frac{\varphi_l'^*(\mathbf{k}_l^s, y) \varphi_l'(\mathbf{k}_l^s, y)}{\omega_r(\mathbf{k}_l^s) - \alpha_l^s U(y) + i\omega_i(\mathbf{k}_l^s)} + \frac{\varphi_l'(\mathbf{k}_l^s, y) \varphi_l'^*(\mathbf{k}_l^s, y)}{\omega_r(\mathbf{k}_l^s) - \alpha_l^s U(y) - i\omega_i(\mathbf{k}_l^s)} \right),$$

$$f_3(\mathbf{k}_l^s, y) = - \frac{(|a_1|^2)_{t_1} \beta_1^4}{|\mathbf{k}_1^s|^4 \left((\omega_r(\mathbf{k}_1) - \alpha_1 U(y))^2 + \omega_i^2(\mathbf{k}_1) \right)} |\varphi_1(\mathbf{k}_1, y)|^2 -$$

$$- \sum_{s=1}^m \sum_{l=2}^3 \frac{(|a_l^s|^2)_{t_1} (\beta_l^s)^4}{q_{l,l}^s |\mathbf{k}_l^s|^4 \left((\omega_r(\mathbf{k}_l^s) - \alpha_l^s U(y))^2 + \omega_i^2(\mathbf{k}_l^s) \right)} |\varphi_l(\mathbf{k}_l^s, y)|^2,$$

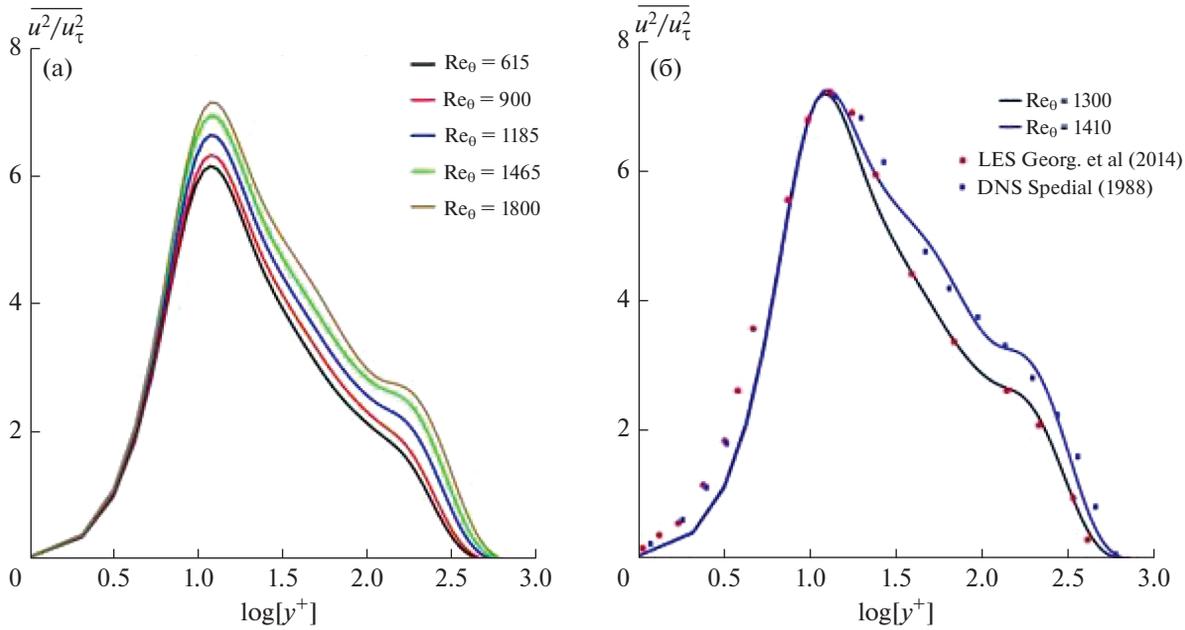
$$\tau = -\overline{uv} = \frac{\phi^2}{(2\pi)^3} \left(g_1(\mathbf{k}_1, y) + 2 \sum_{s=1}^m \sum_{l=2}^3 \frac{(|a_l^s|^2)_{t_1}}{|\mathbf{k}_l^s|^2 q_{l,l}^s} \left(g_2(\mathbf{k}_l^s, y) + g_3(\mathbf{k}_l^s, y) \frac{dU}{dy} \right) \right), \quad (16)$$

$$g_1(\mathbf{k}_1, y) = \frac{(|a_1|)_{t_1} \alpha_1}{|\mathbf{k}_1|} \operatorname{Im} \left(\varphi_1^*(\mathbf{k}_1, y) \varphi_1'(\mathbf{k}_1, y) \right), \quad g_2(\mathbf{k}_l^s, y) = \alpha_l^s \operatorname{Im} \left(\varphi_l'^*(\mathbf{k}_l^s, y) \varphi_l'(\mathbf{k}_l^s, y) \right),$$

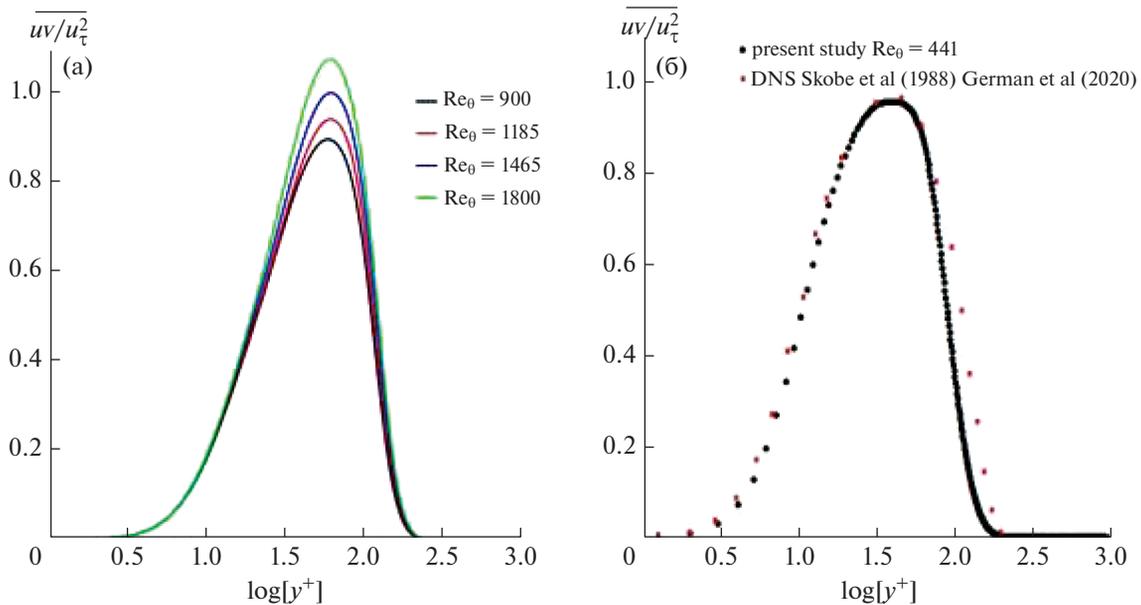
$$g_3(\mathbf{k}_l^s, y) = \frac{(\beta_l^s)^2 |\varphi_l(\mathbf{k}_l^s, y)|^2 \omega_i(\mathbf{k}_l^s)}{\left((\omega_r(\mathbf{k}_l^s) - \alpha_l^s U(y))^2 + \omega_i^2(\mathbf{k}_l^s) \right)},$$

где $\varphi'(\mathbf{k}_l^s, y) = \frac{d\varphi(\mathbf{k}_l^s, y)}{dy}$, $q_{l,l}^s$, $l = 2, 3, \dots$ – весовые множители (8), суммирование по s распространяется на все субгармоники, которые лежат на кривой трехволнового резонанса.

Здесь $(|a_l^s|^2)_{t_1}$ – средние по времени в масштабе τ_1 значения квадратов модулей амплитуд гармоники и субгармоник. (Подчеркнем, что время t_0 входит в определение вертикальной скорости, и, соответственно, амплитуд a_l^s , только через множитель $e^{i\omega t_0 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0}$, поэтому усреднение по t_0 при-



Фиг. 6. (а) – профили величины $\overline{u^2}/u_\tau^2$ при $\mathbf{k}_1 = (0.5, 0)$, $Re_0 = 615 - 1800$. (б) – сравнение $\overline{u^2}/u_\tau^2$: черная, синяя линия – настоящее исследование при $\mathbf{k}_1 = (0.5, 0)$, $Re_0 = 1300, 1410$; (“●”) – LES [28], при $Re_0 = 1300$; (“■”) – DNS [29], $Re_0 = 1410$.



Фиг. 7. (а) – Напряжение Рейнольдса при $\mathbf{k}_1 = (0.5, 0)$, отнесенное к квадрату динамической скорости, при различных значениях числа Рейнольдса: (—) $Re_0 = 900$; (—) $Re_0 = 1185$; (—) $Re_0 = 1465$. (—) $Re_0 = 1800$. (б) – Сравнение напряжения при $\mathbf{k}_1 = (0.5, 0)$, с результатами DNS: (“●”) – настоящее исследование; (“■”) [30, 31] при $Re_0 = 441$.

водит к тому, что в окончательных формулах остаются только квадраты модулей указанных выше амплитуд.) Усреднение по времени в масштабе τ_1 производится по формуле (13) с $T = 1000$.

Члены в правой части формул (15), (16) зависят от значений $q_{l\nu}^s$, средних значений амплитуд гармоник и субгармоник по времени, определенных выше, профиля средней продольной ско-

рости, его производной по y , собственных значений и собственных функций. Действительная и мнимая части собственных значений наименее затухающей моды обозначаются соответственно $\text{Re}[\omega] = \omega_r(k)$, $\text{Im}[\omega] = \omega_i(k)$. Кроме того, в формулах (6)–(8) учтена симметрия по β .

На фиг. 6а, б приведено поведение квадрата модуля продольной пульсации (6) в ТПС при пяти различных числах Рейнольдса от $\text{Re}_0 = 615$ до $\text{Re}_0 = 1800$. Полученные результаты относительно $\overline{u^2}/u_r^2$ хорошо согласуются как с моделированием методом крупных вихрей [28], так и с данными прямого численного моделирования [29] по всей толщине пограничного слоя.

Напряжения сдвига Рейнольдса показаны на фиг. 7а при различных значениях числа Рейнольдса. Кроме того, видно хорошее согласие с данными прямого численного моделирования [30] при $\text{Re}_0 = 441$ (7б).

ВЫВОДЫ

В работе представлена волноводная модель развитого турбулентного пограничного слоя, которая получена с некоторыми физическими допущениями из уравнений Навье–Стокса. К параметрам, определяющим пограничный слой, добавлена длина затухания наименее затухающей моды дискретного спектра уравнения Орра–Зоммерфельда. В итоге в системе определяющих масштабов возникает малый параметр, и к исходной системе уравнений Навье–Стокса оказалось возможным применение метода многих масштабов. Асимптотический метод позволяет приближенно решить полученные уравнения (т.е. корректно замкнуть стохастическую задачу) и получить решения исходной задачи в виде величин, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений для организованной части и интегро-дифференциального уравнения для стохастической части пульсаций. Этот результат качественно согласуется с имеющимися в настоящее время экспериментальными наблюдениями по DeTu. Кроме того, полученные уравнения позволяют вычислить средний тензор пульсационных напряжений и, при решении осредненных уравнений гидродинамики (уравнений Рейнольдса) с полученными реологическими связями, восстановить профиль средней продольной скорости в пограничном слое. Таким образом, волноводная модель, дополненная решением полученной системы уравнений для стохастического компонента пульсаций, вполне может воспроизводить среднюю динамику газа в турбулентном пограничном слое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kachanov Y.S.* Physical mechanisms of laminar boundary layer transition // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 411–482.
2. *Реник Е.У., Соседко Ю.П.* Исследование прерывистой структуры течения в пристенной области турбулентного пограничного слоя. Турбулентные течения. – М.: Наука, 1974, 226 с.
3. *Robinson S.K.* Coherent motions in the turbulent boundary layer // *Annu. Rev. Fluid Mech* 1991. V. 23. P. 601–639.
4. *Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.* Возникновение турбулентности в пристенных течениях. Новосибирск: Наука, 1999, 328 с.
5. *Белоцерковский О.М., Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л., Хлопков А.Ю.* Организованные структуры в турбулентных течениях. Анализ экспериментальных работ по турбулентному пограничному слою. М.: МФТИ, 2009, 302 с.
6. *Borodulin V.I., Kachanov Y.S., Roschekhtayev A.P.* The deterministic wall turbulence is possible // *Advances in Turbulence XI. Proceedings of 11th EUROMECH European Turbulence Conference, June 25–28, 2007, Porto, Portugal* // J.M.L.M. Palma and A. Silva Lopes, eds. – Heidelberg: Springer, 2007. P. 176–178.
7. *Borodulin V.I., Kachanov Y.S., Roschekhtayev A.P.* Experimental detection of deterministic turbulence // *Journal of Turbulence*. 2011. V. 12. № 23. P. 1–34.
8. *Borodulin V.I., Kachanov Y.S.* On the reproducibility of instantaneous and statistical characteristics of the deterministic turbulence // *Theoretical and Applied Mechanics Letters* // 2014. V. 4, 062004.
9. *Borodulin V.I., Kachanov Y.S.* Experimental Study of Reproducibility of Instantaneous Structure of the Deterministic Wall Turbulence // *Proceedings of 8th Intl. Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena-TS-FP-8. E.N.S.M.A. Poitiers, France. 2013. P. 1–6.*
10. Онлайн-курс лекций д.ф.-м.н., профессора Юрия Семеновича Качанова “ИСТОКИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА”. Лекция 7. 11.03.2022: “Детерминированная турбулентность – новый подход к исследованию турбулентности”. <https://www.youtube.com/channel/UCyT-kQLOsbkb5tecI-STYAbQ>

11. *Жаров В.А.* О волновой теории развитого турбулентного пограничного слоя // Ученые записки ЦАГИ. 1986. Т. XVII, № 5. С. 28–38.
12. *Жаров В.А.* Волноводная модель когерентной и стохастической составляющих развитого турбулентного пограничного слоя. // Труды ЦАГИ. 2014, вып. 2731. С. 3–50.
13. *Жаров В.А., Липатов И.И., Селим Р.С.* Волноводная модель организованных структур в турбулентном пограничном слое на пластине с нулевым продольным градиентом давления. // Ученые записки ЦАГИ. 2020. Т. VI. № 6. С. 51–59.
14. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: “ФАКТОРИАЛ”, 1999. С. 768.
15. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды Математика и Механика. М: Наука, 1985, 569 с.
16. *Жаров В.А.* Модельное представление когерентной структуры в развитом турбулентном пограничном слое // Ученые записки ЦАГИ. 2014. Т. XLV. № 5. С. 33–46.
17. *Musker A.J.* Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer // AIAA Journal. 1979. V. 17 (6). P. 655–657.
18. *Landahl M.T.* A wave-guide model for turbulent shear flow // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt. 3. P. 441–459.
19. *Zelman M.B.* Tollmien–Schlichting–wave resonant mechanism for subharmonic–type transition // J. Fluid Mech. 1993. V. 252. P. 449–478.
20. *Hussain A.K.M.F., Reynolds W.C.* The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 2. Experimental results // J. Fluid Mech. 1972. V. 54. P. 241–261.
21. *Nayfeh A.H.* Perturbation Methods. // Wiley. 1973. 425 p. (Найфэ А. Методы возмущений. М.: Наука. 1986. 454 с.)
22. *Zhang W., Liu P., Guo H.* Conditional Sampling and Wavelet Analysis in Early Stage of Step-Generated Transition // AIAA J. 2018. V. 56. P. 2471–2477.
23. *Pushpender K.S., Tapan K.S.* Effect of frequency and wave number on the three-dimensional routes of transition by wall excitation // Phys. Fluids. 2019. V. 31. P. 64–107.
24. *Mathematica 5.0 User’s Guide.* Wolfram Research, 2003. P. 1301.
25. *Селим Р.С.* Собственные моды уравнения Орра-Зоммерфельда в развитом турбулентном пограничном слое // Труды МАИ. 2019. Вып № 109, URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111352>.
26. *Жаров В.А., Ле Ван Ха.* Построение профиля продольной скорости по заданному касательному напряжению в развитом турбулентном пограничном слое на пластине. Ученые записки ЦАГИ, 2016. № 8. Т. XLVII. С. 50–60.
27. *Klebanoff P.S.* Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NACA Rep. 1247 (1955) (Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Физматлит. 1974. 712 с.)
28. *Spalart P.R.* Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 14000$ // J. Fluid Mech. 1988. V. 137. P. 61–98.
29. *Jimenez J., Hoyas S., Simens M., Mizuno Y.* Turbulent boundary layer and channels at moderate Reynold number // J. Fluid Mech. 2010. V. 667. P. 335–360.
30. *Skote M., Henningson Dan S., and Henkes R.A.W.M.* Direct numerical simulation of self-similar turbulent boundary layers in adverse pressure gradients // Flow Turbulence and Combustion. 1998. V.60. № 1. P. 47–85.
31. *German S., Guillermo A.* Reynolds shear stress modeling in turbulent boundary layers’ subject to very strong Favorable Pressure Gradient // Computers and Fluids. 2020. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104494>