

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.25

ОБ ОТСУТСТВИИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ¹⁾

© 2023 г. В. Е. Адмасы^{1,*}

¹ 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: mihretesme@gmail.com

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.
Переработанный вариант 19.02.2023 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Доказывается отсутствие решений полулинейных параболических неравенств и систем высокого порядка с сингулярным потенциалом и нелокальными источниками. Доказательства основаны на методе пробных функций, разработанном Э. Митидиери и С.И. Похожаевым. Библ. 13.

Ключевые слова: сингулярный потенциал, нелокальный источник, метод пробных функций.

DOI: 10.31857/S0044466923060029, **EDN:** TQSKVV

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия большое внимание уделялось проблеме нахождения необходимых условий разрешимости уравнений и неравенств различных типов в частных производных. Многие авторы исследовали проблему условий локальной и глобальной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений, неравенств и их систем. Сейчас исследователи интересуются оценкой условий существования и поведения решений для различных классов уравнений и неравенств в частных производных в соответствующих функциональных пространствах. Например, большое значение придается проблеме существования и разрушения решений параболических уравнений и неравенств в частных производных с сингулярными коэффициентами или начальными данными в соответствующих функциональных классах.

Получено много пионерских результатов об отсутствии локальных и глобальных решений задач Коши для дифференциальных уравнений или неравенств параболического типа без потенциального члена (см. [1–6] (эллиптические или параболические уравнения без сингулярных переменных коэффициентов) и ссылки там). Исследования локальной разрешимости квазилинейных параболических уравнений и неравенств с потенциальными членами можно найти в [7–10]. Что касается нелокальных задач, в [11] рассмотрены некоторые вырожденные параболические неравенства с локальными и нелокальными нелинейностями, причем было доказано отсутствие глобальных нетривиальных решений методом пробных функций. Позднее в [12] было доказано отсутствие глобального слабого решения для однородных квазилинейных параболических неравенств при наличии сингулярного потенциала и нелокального источника. Однако условия отсутствия решений при наличии потенциала и весового источника не рассматривались для полулинейных параболических неравенств и систем высокого порядка.

В настоящей работе мы обобщаем результаты [12] на параболические неравенства и системы высокого порядка, модифицируя условия на источник, и получаем условия отсутствия решений при наличии сингулярного потенциала и нелокального весового источника. Мы используем метод пробных функций (см. [1], [2], [4], [13]), чтобы определить влияние сингулярного потенциала, весовой функции и нелокального источника на отсутствие неотрицательного нетривиального глобального слабого решения.

В разд. 2 мы доказываем отсутствие решений для рассматриваемого неравенства, а в разд. 3 — для системы таких неравенств.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

2. СИНГУЛЯРНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Рассмотрим неравенство вида

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &\geq \Delta^k u - V(x)u^q + |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x)u \right\|_q^r, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, t) &\geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$k \in \mathbb{N}, \quad \min\{q, s, r, \alpha\} > 0, \quad q(s+r) > q+rs > q, \quad (2.2)$$

начальная функция $u_0(x)$ неотрицательна и локально интегрируема, $V(x)$ — положительный сингулярный потенциал, удовлетворяющий оценке $V(x) \sim |x|^{-\sigma}$, $\sigma > 0$, а $\beta(x)$ — положительная весовая функция, сингулярная в начале координат, т.е. $\beta(x) \geq c|x|^{-l}$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ с некоторым $c > 0$ и $l \in \mathbb{R}_+$.

Определение 1. Неотрицательная функция $u(x, t)$ называется *слабым решением нелинейного неравенства* (2.1), если $u(x, t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$ такова, что $V(x)u^q, |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x)u \right\|_q^r \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$, и соотношение

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x)u \right\|_q^r dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \Delta^k \varphi \right) dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^q \varphi dx dt \quad (2.3)$$

выполняется для любой пробной функции $\varphi \in C_0^{2k,1}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty); \mathbb{R}_+)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (2.2). Если $\alpha > lr/q$ и предположим, что

$$N \leq \frac{(\alpha + \sigma)q - lr}{q(q + r - s) - r}, \quad (2.4)$$

то задача (2.1) не имеет нетривиального глобального слабого решения.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — слабое решение неравенства (2.1), а φ — неотрицательная пробная функция. Тогда по определению слабого решения имеем

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x)u \right\|_q^r dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^k \varphi| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^q \varphi dx dt. \quad (2.5)$$

Теперь оценим правую часть неравенства (2.5). Применяя неравенство Гёльдера к первому слагаемому в правой части (2.5), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) u^q \varphi dx \right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2}. \quad (2.6)$$

Вновь применяя неравенства Гёльдера и Юнга, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) u^q \varphi dx \right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2} dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x)u \right\|_q^r dx dt \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1/\lambda_2} dt \right)^{1/\lambda_1} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x)u \right\|_q^r dx dt + C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1/\lambda_2} dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\lambda_1 = s + r > 1, \quad \lambda_2 = \frac{q(s+r)}{q(s+r) - (q+r)} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Используя рассуждения, аналогичные рассмотрению первого члена в (2.5), ко второму и третьему членам, получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^k \phi| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) u^q \phi dx \right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2}. \quad (2.8)$$

Вновь применяя неравенства Гёльдера и Юнга, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^k \phi| dx dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) u^q \phi dx \right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2} dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x) u\|_q^r dx dt \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt \right)^{1/\lambda_1'} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x) u\|_q^r dx dt + C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\lambda_1 = s + r > 1, \quad \lambda_2 = \frac{q(s+r)}{q(s+r) - (q+r)} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Аналогично третий член в правой части (2.5) становится

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^q \phi dx \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x) u\|_q^r dx dt + C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt, \quad (2.10)$$

где

$$\lambda_3 = \frac{s+r}{q} > 1, \quad \lambda_4 = \frac{s+r}{s-q} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_3'} = 1 - \frac{1}{\lambda_3}.$$

Тогда из (2.5)–(2.10) следует

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x) u\|_q^r dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \phi(x, 0) dx &\leq 4C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt + \\ &+ 4C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt + 4C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Теперь положим $R > 0$ и введем пробные функции вида $\phi(x, t) = \phi_R(x, t) = \phi_0(t/R^\theta) \phi_0(|x|^2/R^2)$ с $\theta \geq 1$. Здесь ϕ_0 — функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\phi_0(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq 1, \\ 0, & s \geq 2. \end{cases} \quad (2.12)$$

Далее оценим правую часть (2.11). Рассмотрим замену переменных вида $x = R\xi, t = R^\theta \tau$, тогда

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt = R^{\gamma_1} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau, \quad (2.13)$$

где $\gamma_1 = \theta + \left(N - \theta\lambda_2 + \frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2}$;

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \Phi|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt = R^{\gamma_2} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \Phi|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau, \quad (2.14)$$

где $\gamma_2 = \theta + \left(N - 2k\lambda_2 + \frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2}$;

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4} \Phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt = R^{\gamma_3} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3}} \Phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} d\tau, \quad (2.15)$$

где $\gamma_3 = \theta + \left(N - \left(\sigma + \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3} \right) \frac{\lambda_3'}{\lambda_4}$.

Тогда из (2.11)–(2.15) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \Phi \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx &\leq 4C_1 R^{\gamma_1} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau + \\ &+ 4C_2 R^{\gamma_2} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \Phi|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau + 4C_3 R^{\gamma_3} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3}} \Phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} d\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Теперь выберем Φ_0 так, что

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau &< \infty, \\ \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \Phi|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau &< \infty, \\ \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3}} \Phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} d\tau &< \infty. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (2.16) следует, что

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \Phi \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq \sum_{i=1}^3 C_i^* R^{\gamma_i} \quad (2.17)$$

с некоторыми $C_1^*, C_2^*, C_3^* > 0$ и положительным параметром R .

Затем мы выбираем θ так, что

$$\begin{aligned}
\theta + \left(N - \theta\lambda_2 + \frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2} &= \theta + \left(N - 2k\lambda_2 + \frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2} = \\
&= \theta + \left[N - \left(\sigma + \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3} \right] \frac{\lambda_3'}{\lambda_4}.
\end{aligned} \quad (2.18)$$

Такой выбор дает следующее общее значение экспоненты R в соотношении (2.17):

$$\gamma = \frac{1}{s+r-q} \left[\left(\frac{r(q-1) + q(s-q)}{q} \right) N + \left(\frac{rl}{q} - \alpha \right) - \sigma \right]. \quad (2.19)$$

Теперь рассмотрим следующие два случая для значений γ .

Случай 1: $\gamma < 0$.

Очевидно, что правая часть (2.17) стремится к нулю, если $R \rightarrow \infty$. Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано для $\gamma < 0$.

Случай 2: $\gamma = 0$.

В этом случае из (2.13)–(2.15) имеем

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt = c_1, \quad (2.20)$$

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt = c_2, \quad (2.21)$$

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt = c_3, \quad (2.22)$$

где

$$c_1 = \begin{cases} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau, & \text{если } \gamma = \gamma_1 = 0, \\ 0, & \text{если } \gamma_1 < 0. \end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau, & \text{если } \gamma = \gamma_2 = 0, \\ 0, & \text{если } \gamma_2 < 0. \end{cases}$$

$$c_3 = \begin{cases} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3}} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} d\tau, & \text{если } \gamma = \gamma_3 = 0, \\ 0, & \text{если } \gamma_3 < 0. \end{cases}$$

Тогда соотношение (2.17) принимает вид

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq c. \quad (2.23)$$

Перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt \leq c. \quad (2.24)$$

Теперь вернемся к неравенству (2.5). Применяя неравенство Гёльдера, из соотношения (2.5) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx &\leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^k \varphi| dx dt + \\ &+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^q \varphi dx dt \leq c_1^{1/\lambda_1} \left(\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt \right)^{1/\lambda_1} + \\ &+ c_2^{1/\lambda_1} \left(\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt \right)^{1/\lambda_1} + c_3^{1/\lambda_3} \left(\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt \right)^{1/\lambda_3}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Однако в силу (2.24) и абсолютной сходимости интеграла имеем

$$\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt \rightarrow 0 \quad (2.26)$$

при $R \rightarrow \infty$. Перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (2.25), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt = 0.$$

Таким образом, $u = 0$ п.в. и в этом случае. Это завершает доказательство теоремы 1.

3. СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим систему параболических неравенств вида

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &\geq \Delta^{k_1} u - V_1(x) v^{q_1} + |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1}, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \partial v / \partial t &\geq \Delta^{k_2} v - V_2(x) u^{q_2} + |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2}, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, t) &\geq 0, \quad v(x, t) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} k_1, k_2 &\in \mathbb{N}, \quad \min\{q_1, q_2, s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2\} > 0, \quad q_2(r_1 + s_1) > (q_2 + r_1), \\ s_2 > q_1, \quad q_1(r_2 + s_2) &> (q_1 + r_2), \quad s_1 > q_2, \quad \beta_1(x) \geq c|x|^{-l_1}, \quad \beta_2(x) \geq c|x|^{-l_2}, \\ x &\in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad V_1(x) \sim |x|^{-\sigma_1}, \quad V_2(x) \sim |x|^{-\sigma_2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

для некоторых $c > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ и $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$, $u_0(x)$ и $v(x)$ — неотрицательные локально интегрируемые функции.

Определение 2. Пара неотрицательных функций $(u(x, t), v(x, t))$ называется *слабым решением системы нелинейных неравенств* (3.1), если $u(x, t), v(x, t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$ таковы, что $V_1(x)v^{q_1}, V_2(x)u^{q_2}, |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1}, |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$ и соотношения

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x, 0) dx \leq \\ & \leq - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \Delta^{k_1} \varphi \right) dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)v^{q_1} \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x, 0) dx \leq \\ & \leq - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \Delta^{k_2} \varphi \right) dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)u^{q_2} \varphi dx dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

выполняются для любой пробной функции $\varphi \in C_0^{2k,1}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty); \mathbb{R}_+)$, где $k = \max(k_1, k_2)$.

Теорема 2. Пусть условия (3.2), $\alpha_1 > l_1 r_1 / q_2$ и $\alpha_2 > l_2 r_2 / q_1$ выполняются. Предположим, что $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, 6} \gamma_i \leq 0$, где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{[q_2(r_1 + s_1) - (q_2 + r_1)]N - q_2\theta + l_1 r_1 - \alpha_1 q_2}{q_2(r_1 + s_1 - 1)}, \\ \gamma_2 &= \frac{(N + \theta - 2k_1)q_2 s_1 + (N + \theta - 2k_1)q_2 r_1 + (l_1 - N)r_1 - (\alpha_1 + N)q_2 - \theta}{q_2(r_1 + s_1 - 1)}, \\ \gamma_3 &= \frac{(N + \theta - \sigma_2)s_1 + (\theta + l_1 - \sigma_2)r_1 - (\theta - \alpha_1)q_2}{r_1 + s_1 - q_2}, \\ \gamma_4 &= \frac{[q_1(r_2 + s_2) - (q_1 + r_2)]N - q_1\theta + l_2 r_2 - \alpha_2 q_1}{q_1(r_2 + s_2 - 1)}, \\ \gamma_5 &= \frac{(N + \theta - 2k_2)q_1 s_2 + (N + \theta - 2k_2)q_1 r_2 + (l_2 - N)r_2 - (\alpha_2 + N)q_1 - \theta}{q_1(r_2 + s_2 - 1)}, \\ \gamma_6 &= \frac{(N + \theta - \sigma_1)s_2 + (\theta + l_2 - \sigma_1)r_2 - (\theta - \alpha_2)q_1}{r_2 + s_2 - q_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

с некоторым параметром $\theta \geq 1$. Тогда задача (3.1) не имеет нетривиального глобального слабого решения.

Доказательство. Пусть пара функций (u, v) — слабое решение системы неравенств (3.1), а φ — неотрицательная гладкая пробная функция, тогда по определению слабого решения известно, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x, 0) dx \leq \\ & \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^{k_1} \varphi| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)v^{q_1} \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \|\beta_2^{1/q_1}(x) v\|_{q_1}^{r_2} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \phi(x, 0) dx \leq \\
& \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v |\Delta^{k_2} \phi| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x) u^{q_2} \phi dx dt.
\end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь оценим правую часть неравенства (3.6). Применяя неравенство Гёльдера к первому слагаемому в правой части (3.6), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1(x) u^{q_2} dx \right)^{r_1/(q_2 \lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2 \lambda_1}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2}. \quad (3.8)$$

Снова применяя неравенства Гёльдера и Юнга, приходим к

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx dt \leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1(x) u^{q_2} dx \right)^{r_1/(q_2 \lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2 \lambda_1}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2} dt \leq \\
& \leq \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x) u\|_{q_2}^{r_1} dx dt \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2 \lambda_1}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt \right)^{1/\lambda_1'} \leq \\
& \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x) u\|_{q_2}^{r_1} dx dt + C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2 \lambda_1}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt,
\end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\lambda_1 = s_1 + r_1 > 1, \quad \lambda_2 = \frac{q_2(s_1 + r_1)}{q_2(s_1 + r_1) - (q_2 + r_1)} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Применяя аналогичные рассуждения ко второму и третьему слагаемым (3.6), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \|\Delta^{k_1} \phi\| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1(x) u^{q_2} dx \right)^{r_1/(q_2 \lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2 \lambda_1}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1} \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2}. \quad (3.10)$$

Снова применяя неравенства Гёльдера и Юнга в (3.10), приходим к

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \|\Delta^{k_1} \phi\| dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x) u\|_{q_2}^{r_1} dx dt + C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2 \lambda_1}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1} \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt \quad (3.11)$$

и

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) v^{q_1} \phi dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \|\beta_2^{1/q_1}(x) v\|_{q_1}^{r_2} dx dt + C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{q_1 \mu_1}(x) |x|^{\left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right) \mu_2} \phi^{\mu_1'} dx \right)^{\mu_1'/\mu_2} dt, \quad (3.12)$$

где

$$\mu_1 = \frac{s_2 + r_2}{q_1} > 1, \quad \mu_2 = \frac{r_2 + s_2}{s_2 - q_1} > 1, \quad \frac{1}{\mu_1'} = 1 - \frac{1}{\mu_1}.$$

Комбинируя соотношения (3.6) и (3.9)–(3.12), получим

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x) u\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \phi(x, 0) dx - \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \|\beta_2^{1/q_1}(x) v\|_{q_1}^{r_2} dx dt \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt + C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1} \varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt + \\ &\quad + C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_2}{q_1 \mu_1}}(x) |x|^{\left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right) \mu_2} \varphi^{\mu_1'} dx \right)^{\mu_1'/\mu_2} dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Аналогично, применяя такие же рассуждения, как в (3.6), получим следующие три оценки слагаемых правой части соотношения (3.7):

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + C_4 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu_3'/\mu_4} dt, \quad (3.14)$$

где

$$\mu_3 = s_2 + r_2 > 1, \quad \mu_4 = \frac{q_1(s_2 + r_2)}{q_1(s_2 + r_2) - (q_1 + r_2)} > 1, \quad \frac{1}{\mu_3} = 1 - \frac{1}{\mu_3},$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v |\Delta^{k_2} \varphi| dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + C_5 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2} \varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu_3'/\mu_4} dt, \quad (3.15)$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x) u^{q_2} \varphi dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + C_6 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_4}{q_2 \lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right) \lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt, \quad (3.16)$$

где

$$\lambda_3 = \frac{s_1 + r_1}{q_2} > 1, \quad \lambda_4 = \frac{r_1 + s_1}{s_1 - q_2} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_3} = 1 - \frac{1}{\lambda_3}.$$

Комбинируя соотношения (3.7) и (3.14)–(3.16), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx - \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt \leq \\ &\leq C_4 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu_3'/\mu_4} dt + C_5 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2} \varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu_3'/\mu_4} dt + \\ &\quad + C_6 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_4}{q_2 \lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right) \lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Складывая (3.13) с (3.17) и упрощая, будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx + \\ &\quad + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq 4C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1}\varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} dt + 4C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-\eta\lambda_4}{q_2\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda'_3/\lambda_4} dt + \\
& + 4C_4 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x) |x|^{\frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu'_3/\mu_4} dt + \\
& + 4C_5 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2}\varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu'_3/\mu_4} dt + 4C_6 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-\eta_2\mu_2}{q_1\mu_1}}(x) |x|^{\left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2} \varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} dx \right)^{\mu'_1/\mu_2} dt.
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Затем, в силу (2.12) и замены переменных $x = R\xi, t = R^\theta\tau$ на (3.18), имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{\eta_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{\eta_2} dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx + \\
& + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq 4C_1 R^{\gamma_1} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} d\tau + \\
& + 4C_2 R^{\gamma_2} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1}\varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} d\tau + 4C_3 R^{\gamma_3} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_4}{q_2\lambda_3} - \left(\sigma_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda'_3/\lambda_4} d\tau + \\
& + 4C_4 R^{\gamma_4} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} d\xi \right)^{\mu'_3/\mu_4} d\tau + 4C_5 R^{\gamma_5} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2}\varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} d\xi \right)^{\mu'_3/\mu_4} d\tau + \\
& + 4C_6 R^{\gamma_6} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_2}{q_1\mu_1} - \left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2} \varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} d\xi \right)^{\mu'_1/\mu_2} d\tau.
\end{aligned} \quad (3.19)$$

Выберем φ так, что

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} d\tau < \infty, \\
& \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1}\varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} d\tau < \infty, \\
& \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_4}{q_2\lambda_3} - \left(\sigma_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda'_3/\lambda_4} d\tau < \infty, \\
& \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} d\xi \right)^{\mu'_3/\mu_4} d\tau < \infty, \\
& \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2}\varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} d\xi \right)^{\mu'_3/\mu_4} d\tau < \infty,
\end{aligned}$$

$$\int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2 \mu_2}{q_1 \mu_1} + \left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right) \mu_2} \phi^{\mu_1} d\xi \right)^{\mu_1/\mu_2} d\tau < \infty.$$

Тогда из неравенства (3.19) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \phi(x, 0) dx + \\ & + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \phi(x, 0) dx \leq C_1^* R^{\theta + \left(N - \theta \lambda_2 + \frac{r_1 l_2 \lambda_2}{q_2 \lambda_1} - \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2}} + C_2^* R^{\theta + \left(N - 2k_1 \lambda_2 + \frac{r_1 l_2 \lambda_2}{q_2 \lambda_1} - \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2}} + \\ & + C_3^* R^{\theta + \left(N - \left(\sigma_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r_1 l_2 \lambda_4}{q_2 \lambda_3} \right) \frac{\lambda_3'}{\lambda_4}} + C_4^* R^{\theta + \left(N - \theta \mu_4 + \frac{r_2 l_2 \mu_4}{q_1 \mu_3} - \frac{\alpha_2 \mu_4}{\mu_3} \right) \frac{\mu_3'}{\mu_4}} + C_5^* R^{\theta + \left(N - 2k_2 \mu_4 + \frac{r_2 l_2 \mu_4}{q_1 \mu_3} - \frac{\alpha_2 \mu_4}{\mu_3} \right) \frac{\mu_3'}{\mu_4}} + \\ & + C_6^* R^{\theta + \left(N - \left(\sigma_1 + \frac{\alpha_2}{\mu_1} \right) \mu_2 + \frac{r_2 l_2 \mu_2}{q_1 \mu_1} \right) \frac{\mu_1'}{\mu_2}} \leq \sum_{i=1}^6 C_i^* R^{\gamma_i} \end{aligned} \quad (3.20)$$

с некоторыми $C_i^* > 0$, $i = 1, \dots, 6$. Если выполнено любое из неравенств (3.3), т.е. если $\gamma = \max_{i=1, \dots, 6} \gamma_i \leq 0$, имеем два случая.

Случай 1: $\gamma < 0$.

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (3.20), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

Таким образом, $u = 0$ и $v = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$.

Случай 2: $\gamma = 0$.

Тогда соотношение (3.20) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \phi(x, 0) dx + \\ & + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \phi(x, 0) dx + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \phi(x, 0) dx + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \phi(x, 0) dx \leq c. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (3.22), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt \leq c. \quad (3.23)$$

Теперь вернемся к неравенствам (3.6) и (3.7). Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \phi(x, 0) dx \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \Delta^{k_1} \phi \right| dx dt + \\ & + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) v^{q_1} \phi dx dt \leq \left(c_1^{1/\lambda_1'} + c_2^{1/\lambda_1'} \right) \left(\int_{R^9} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt \right)^{1/\lambda_1} + \\ & + c_6^{1/\mu_1'} \left(\int_{R^9} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt \right)^{1/\mu_1}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v \left| \Delta^{k_2} \varphi \right| dx dt + \\
& + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x) u^{q_2} \varphi dx dt \leq \left(c_4^{1/\mu'_3} + c_5^{1/\mu'_3} \right) \left(\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt \right)^{1/\mu_3} + \\
& + c_3^{1/\lambda'_3} \left(\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt \right)^{1/\lambda_3}.
\end{aligned} \quad (3.25)$$

Однако в силу (3.23) и абсолютной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt = c$$

имеем

$$\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt = 0 \quad (3.26)$$

при $R \rightarrow \infty$.

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (3.24) и (3.25), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt = 0.$$

Таким образом, $u = 0$ и $v = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ и в этом случае. Это завершает доказательство теоремы 2.

Замечание. Можно также выбрать θ , как показано выше в доказательстве теоремы 1, и получить достаточное условие теоремы 2.

В заключение автор выражает благодарность Евгению Галахову за постановку задачи, руководство и полезное обсуждение результатов работы в ходе подготовки этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 186–216.
2. Mitidieri E., Pohozaev S.I. Nonexistence of weak solutions for some degenerate elliptic and parabolic problems on $\mathbb{R}^n$ // J. Evolut. Equat. 2001. V. 1. № 2. P. 189–220.
3. Kartsatos A.G., Kurta V.V. On the critical Fujita exponents for solutions of quasilinear parabolic inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 269. № 1. P. 73–86.
4. Jiang Z.X., Zheng, S.N. A Liouville-type theorem for a doubly degenerate parabolic inequality // Acta Math. Scientia. 2010. V. 30. № 3. P. 639–643.
5. Admasu W.E., Galakhov E.I., Salieva O.A. Nonexistence of nontrivial weak solutions of some nonlinear inequalities with gradient nonlinearity // Contemporary Math. Fundament. Direct. 2021. V. 67. № 1. P. 1–13.
6. Галахов Е.И. Об отсутствии локальных решений некоторых эволюционных задач // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 3. С. 337–349.
7. Yang C., Zhao L., Zheng S. The critical Fujita exponent for the fast diffusion equation with potential // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 398. № 2. P. 879–885.

8. *Liu C.* The critical Fujita exponent for a diffusion equation with a potential term // *Lithuanian Math. J.* 2014. V. 54. № 2. P. 182–191.
9. *Ishige K.* On the Fujita exponent for a semilinear heat equation with a potential term // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 344. № 1. P. 231–237.
10. *Pinsky R.* The Fujita exponent for semilinear heat equations with quadratically decaying potential or in an exterior domain // *J. Diff. Eq.* 2009. V. 246. № 6. P. 2561–2576.
11. *Chen C.S., Huang J.C.* Some nonexistence results for degenerate parabolic inequalities with local and nonlocal nonlinear terms // *J. Nanjing Univ. Math. Biq.* 2004. V. 21. № 1. P. 12–20.
12. *Xiao S., Fang Z.B.* Nonexistence of solutions for the quasilinear parabolic differential inequalities with singular potential term and nonlocal source // *J. Ineq. Appl.* 2020. V. 2020. № 1. P. 1–9.
13. *Галахов Е.И.* Об эллиптических и параболических неравенствах высокого порядка с особенностями на границе // *Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова.* 2010. Т. 269. № 1. С. 76–84.