

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.6

# МЕТОД ОПТИЧЕСКИХ ПУТЕЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОНИКИ<sup>1)</sup>

© 2023 г. А. А. Белов<sup>1,2,\*</sup>, Ж. О. Домбровская<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

<sup>2</sup> 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

\*e-mail: aa.belov@physics.msu.ru

\*\*e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 08.11.2022 г.

Переработанный вариант 08.11.2022 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

Ряд актуальных задач интегральной фотоники сводится к наклонному падению излучения на плоско-параллельный рассеиватель. Для таких задач предложен метод интегрирования уравнений Максвелла вдоль направления распространения луча. В результате исходная двумерная задача сводится к одномерной, и для ее решения применяются недавно предложенные одномерные бикомпактные схемы. Это позволяет существенно снизить вычислительные затраты по сравнению с традиционными двумерными методами типа конечных разностей и конечных элементов. Для верификации предложенного метода проведены расчеты тестовых задач с известными точными решениями. Библ. 33. Фиг. 12.

**Ключевые слова:** уравнения Максвелла, бикомпактные схемы, слоистые среды, условия сопряжения, дисперсия вещества.

**DOI:** 10.31857/S0044466923060042, **EDN:** TRKHMB

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Интегральной фотоникой называется направление оптики, посвященное разработке наноразмерных устройств, позволяющих управлять излучением в ближнем ИК- и видимом диапазоне. Оптические наноструктуры могут применяться в качестве детекторов, логических элементов, переключателей, модуляторов, волноводов и т.д. Ряд важных приложений сводятся к задаче о наклонном падении плоской электромагнитной волны (как монохроматической, так и импульса) на набор плоско-параллельных пластин. Последние могут быть как диэлектрическими, так и проводящими, причем их материальные параметры могут зависеть от координат. Такие задачи возникают при исследовании свойств связанных состояний различного типа (поверхностных [1] либо таммовских [2, 3] плазмон-поляритонов, мод микрополостей [4], экситонов [5] и др.).

Описанные задачи являются двумерными, т.е. электромагнитные поля зависят от двух пространственных координат, а зависимостью от третьей координаты можно пренебречь. Для таких задач традиционно применяют двумерные коды на основе метода конечных разностей или конечных элементов. Однако эти методы сталкиваются с рядом трудностей. Во-первых, вблизи границ раздела сред погрешность оказывается большой. Во-вторых, реальные оптические среды обладают частотной дисперсией. Существующие способы ее учета могут вносить заметную погрешность в решение. Критический анализ существующих сеточных методов приведен в [6].

Если поля являются монохроматическими, а среды – диэлектрическими и кусочно-однородными, то применяют методы типа матриц рассеяния [7]. Эти методы дают не приближенное, а точное решение задачи. В рамках своей области применимости эти методы являются наиболее работоспособными. Свешников и Тихонравов обобщили метод матриц рассеяния на задачи в слоистых средах с пространственно-неоднородными слоями [8], однако это обобщение применимо только при нормальном падении излучения.

В ряде случаев с помощью физических приближений постановку удастся упростить и свести задачу к одномерной. Это значительно упрощает расчет. Примером является интегрирование ги-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта № 22-71-00070).

перболических задач вдоль направления распространения колебаний. Однако такие подходы разработаны для случаев, когда в среде отсутствуют границы раздела, т.е. свойства вещества плавно изменяются в пространстве. В то же время характерной особенностью задач интегральной фотоники является наличие нескольких границ раздела, на которых возникают множественные переотражения.

**В настоящей статье** предложено проводить интегрирование уравнений Максвелла вдоль направления распространения колебаний. Это позволяет свести задачу к одномерной. В задачах электродинамики такой подход ранее не применялся. Для указанной одномерной задачи применяются предложенные недавно бикомпактная схема и метод спектрального разложения. Это позволяет 1) снизить трудоемкость решения перечисленных выше задач, 2) существенно повысить количественную точность. Проведены расчеты тестовых задач с известным точным решением, которые убедительно верифицируют предлагаемый подход.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 2.1. Плоско-параллельная структура

1. Рассмотрим слоистую структуру, состоящую из  $Q$  изотропных плоско-параллельных пластин общей толщиной  $a$ . Ориентируем координатную ось  $z$  перпендикулярно пластинам; оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскости пластин. Обозначим координаты границ слоев через  $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_Q = a$ . При  $z < 0$  и  $z > a$  расположены полубесконечные диэлектрические среды. Обозначим их диэлектрические проницаемости и магнитные восприимчивости через  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  (для  $z < 0$ ) и  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  (для  $z > a$ ). Будем считать эти среды однородными и изотропными.

2. Пусть часть пластин является диэлектрическими, часть — проводниками или полупроводниками. Обозначим через  $\epsilon_q$  диэлектрическую проницаемость,  $\mu_q$  — магнитную восприимчивость,  $\sigma_q$  — проводимость  $q$ -й пластины (для диэлектрических пластин  $\sigma_q = 0$ ).

3. Из-за нагрева токами и падающим излучением пластины могут становиться оптически неоднородными, т.е. их показатель преломления может зависеть от координаты. Будем считать, что показатель преломления и проводимость зависят от координаты  $z$ , но практически не меняются со временем.

4. Величины  $\epsilon_q$ ,  $\mu_q$ ,  $\sigma_q$  могут зависеть от частоты  $\omega$  электромагнитной волны. Такую дисперсию называют частотной. При этом будем считать, что пространственная дисперсия (т.е. зависимость материальных параметров от волнового вектора) пренебрежимо мала.

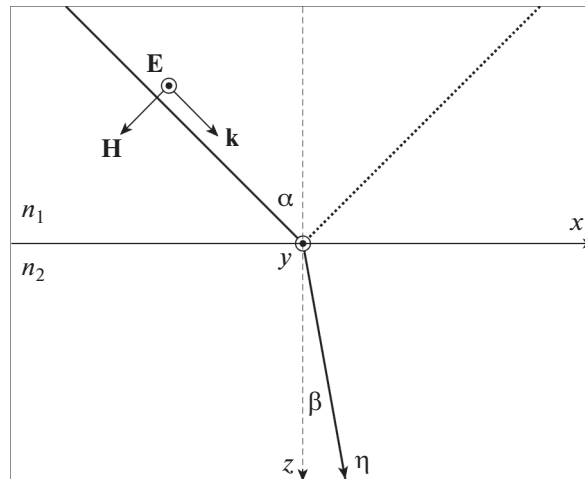
Отметим, что при наличии пространственной дисперсии волновой фронт перестает быть однородным (т.е. деформируется). Возникает деформация поляризации, которая может приводить к реализации многомодовых колебаний, волноводных режимов и др. [9]. Этот круг задач выходит за рамки данной работы.

Пространственная дисперсия несущественна, если поле мало меняется на расстоянии, на котором формируется отклик среды на это поле [9]. Изменение поля происходит за счет смещения зарядов в веществе. Тем самым мы предполагаем, что смещение зарядов за период колебаний полей мало по сравнению с длиной волны. В задачах физики плазмы это означает приближение холодной плазмы. В задачах диэлектрической фотоники и плазмоники это приближение применимо, поскольку частота колебаний поля высока. Так, типичный период колебаний в оптическом и ближнем ИК-диапазоне составляет  $\sim 10^{-14}$  с. За это время свободные электроны в металле смещаются на доли ангстрема, в то время как характерная длина волны составляет сотни нанометров.

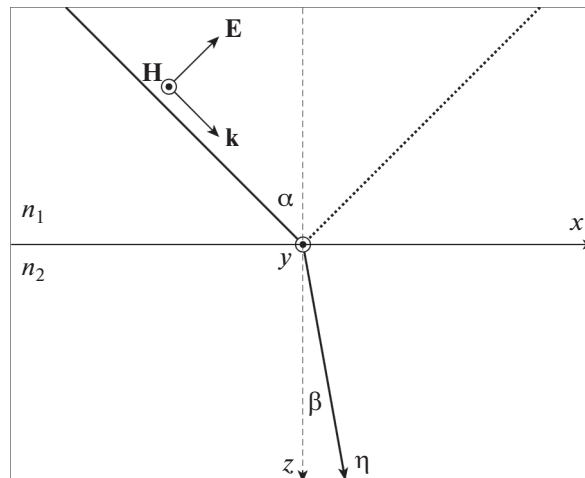
### 2.2. Стационарный случай

1. Пусть на описанную структуру наклонно падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна. Пусть она является монохроматической и имеет частоту  $\omega$ . В литературе такую зависимость от времени нередко называют гармонической. Пусть волновой вектор лежит в плоскости  $Oxz$ . Угол падения (т.е. угол между волновым вектором падающей волны и нормалью к пластинам) обозначим через  $\alpha$ .

Как известно, при наклонном падении возможны две поляризации волны. Волна называется  $s$ -поляризованной, если вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости, образованной волновыми век-



**Фиг. 1.** *S*-поляризованная волна. Жирная линия — направление распространения прямой волны (лучевая траектория). Пунктир — направление распространения отраженной волны. Тонкая линия — граница раздела сред. Штриховая линия — нормаль к границе раздела.



**Фиг. 2.** *P*-поляризованная волна. Обозначения соответствуют фиг. 1.

торами падающей и отраженной волн. Тогда вектор  $\mathbf{E}$  имеет только  $y$ -компоненту  $\mathbf{E} = \{0, E_y, 0\}$ , а вектор  $\mathbf{H}$  имеет  $x$ - и  $z$ -компоненты  $\mathbf{H} = \{H_x, 0, H_z\}$ . Такая поляризация проиллюстрирована на фиг. 1, где для простоты приведена одна граница раздела. Если вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости, образованной волновыми векторами падающей и отраженной волн, то волна называется *p*-поляризованной (см. фиг. 2). Тогда вектор  $\mathbf{E}$  имеет  $x$ - и  $z$ -компоненты  $\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}$ , а вектор  $\mathbf{H}$  — только  $y$ -компоненту  $\mathbf{H} = \{0, H_y, 0\}$ .

При этом если падающая волна имеет *s*-поляризацию, то отраженная и прошедшая волны также будут *s*-поляризованными; аналогично в случае *p*-поляризации. Мы будем считать, что падающая волна является *s*- либо *p*-поляризованной. Именно этот случай представляет интерес для приложений.

2. Пусть внешние объемные токи отсутствуют  $\mathbf{J}^{\text{ext}} = 0$ . Падающее излучение индуцирует объемные токи  $\mathbf{J}_q^{\text{ind}} = \sigma_q \mathbf{E}_q$ . Они направлены так же, как вектор  $\mathbf{E}$ . Эти токи излучают волны, которые интерферируют с падающей, отраженной и прошедшей волнами. При этом могут формироваться различные связанные состояния электромагнитного поля.

3. Основными уравнениями электродинамики являются уравнения Максвелла. Традиционно в литературе рассматривают их дифференциальную форму. Мы используем интегральную форму этих уравнений. Приведем ее для случая монохроматических полей

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H}_q d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \sigma_q \mathbf{E}_q ds - \frac{i\omega}{c} \int_S \mathbf{D}_q ds, \quad \mathbf{D}_q = \epsilon_q \mathbf{E}_q, \quad 1 \leq q \leq Q; \quad (1)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}_q d\mathbf{l} = \frac{i\omega}{c} \int_S \mathbf{B}_q ds, \quad \mathbf{B}_q = \mu_q \mathbf{H}_q, \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (2)$$

Здесь  $S$  — произвольная поверхность, ограниченная контуром  $\Gamma$ . Используется система единиц СГС.

Сформулируем условия излучения для данной задачи. Выделим участок рассеивателя, ограниченный плоскостями  $x = 0$  и  $x = d > 0$ . Для компактности записи введем следующие обозначения:

$$A_q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm i(\tilde{k}_q)_x, \quad B_q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial z} \pm i(\tilde{k}_q)_z. \quad (3)$$

Здесь  $(\tilde{k}_q)_x = \tilde{k}_q \sin \alpha_q$  и  $(\tilde{k}_q)_z = \tilde{k}_q \cos \alpha_q$  — проекции волнового вектора в  $q$ -й пластине на оси  $x$  и  $z$  соответственно. Значения  $1 \leq q \leq Q-1$  соответствуют пластинам рассеивателя,  $q = 0$  — среде при  $z < 0$ ,  $q = Q$  — среде при  $z > a$ . Напомним, что волновое число в  $q$ -й пластинке равно  $\tilde{k}_q = \omega \sqrt{\epsilon_q \mu_q} / c$ .

Оператор  $A_q^+ B_q^+$  позволяет выделить падающую волну  $\sim \exp\{i(\tilde{k}_q)_x x + i(\tilde{k}_q)_z z\}$  в  $q$ -й среде и задать ее амплитуду, не затрагивая амплитуду отраженной волны  $\sim \exp\{i(\tilde{k}_q)_x x - i(\tilde{k}_q)_z z\}$ .

Таким образом, условия излучения принимают следующий вид:

$$A_q^+ B_q^+ \mathbf{E} = -4(\tilde{k}_q)_x (\tilde{k}_q)_z \mathbf{E}_q^0 e^{i(\tilde{k}_q)_z z}, \quad x = 0, \quad \xi_{q-1} < z < \xi_q, \quad (4)$$

$$A_0^+ B_0^+ \mathbf{E} = -4(\tilde{k}_0)_x (\tilde{k}_0)_z \mathbf{E}_0^0 e^{i(\tilde{k}_0)_z z}, \quad z = 0, \quad 0 < x < d, \quad (5)$$

$$A_q^- B_q^+ \mathbf{E} = 0, \quad x = d, \quad \xi_{q-1} < z < \xi_q, \quad (6)$$

$$A_Q^+ B_Q^- \mathbf{E} = 0, \quad z = a, \quad 0 < x < d. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{E}_q^0$  — амплитуда волны, падающей на границу раздела  $z = \xi_q$  из среды  $q$  в среду  $q+1$ . Амплитуда  $\mathbf{E}_{q+1}^0$  связана с  $\mathbf{E}_q^0$  коэффициентами Френеля. Амплитуда  $\mathbf{E}_0^0$  соответствует излучению, падающему на границу рассеивателя  $z = 0$ . Условия (6) показывают, что падающая и отраженная волны свободно проходят через границу  $x = d$ , а условие (7) — что прошедшая волна свободно проходит через границу  $z = a$ .

На границах раздела поставим условия сопряжения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z \times (\mathbf{E}_q - \mathbf{E}_{q-1}) &= 0, & \mathbf{E}_z (\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_{q-1}) &= 0, \\ \mathbf{E}_z \times (\mathbf{H}_q - \mathbf{H}_{q-1}) &= 0, & \mathbf{E}_z (\mathbf{B}_q - \mathbf{B}_{q-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегральные уравнения (1), (2) суть физические законы сохранения (теорема о циркуляции и закон Фарадея соответственно). Разностная аппроксимация этих законов вместе с условиями сопряжения на границах раздела сред позволяет строить полностью консервативные схемы для данной задачи [10].

### 2.3. Нестационарный случай

1. Пусть на рассеиватель падают не монохроматическая волна, а волновой пакет

$$\mathbf{f}^0(\zeta) = \mathbf{E}^0(\zeta) \exp(-i\omega^0 \zeta), \quad \zeta = t - \frac{(\tilde{\mathbf{k}}^0 \mathbf{r})}{\tilde{k}^0 c} \quad (9)$$

с несущей частотой  $\omega^0$  и заданной огибающей  $\mathbf{E}^0$ . Здесь  $\tilde{\mathbf{k}}^0/\tilde{k}^0$  — единичный вектор в направлении распространения волны,  $k^0 = \omega^0/c$ . Пусть импульс (9) является плоским и линейно поляризованным, а огибающая — финитной.

Падающее излучение индуцирует объемные токи  $\mathbf{J}_q^{\text{ind}} = \sigma_q \mathbf{E}_q$ , которые переизлучают линейно поляризованные импульсы.

2. Приведем математическую постановку задачи. Она включает нестационарные уравнения Максвелла

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H}_q d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \sigma_q \mathbf{E}_q ds + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D}_q ds, \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}_q d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}_q ds, \quad (11)$$

условия сопряжения (8), начальные условия  $\mathbf{E}_q = 0$ ,  $\mathbf{H}_q = 0$  при  $t = 0$  и нестационарный аналог условий излучения.

Сформулируем нестационарные условия излучения. Для этого в (4)–(7) нужно заменить  $i\omega \rightarrow \partial/\partial t$  и подставить в правую часть импульс (9). Пусть

$$C_q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \mp \frac{\sin \alpha_q}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial z} \mp \frac{\cos \alpha_q}{c} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (12)$$

Тогда нестационарные условия излучения, описывающие падение волны на рассеиватель, принимают вид

$$C_q^+ D_q^+ \mathbf{E} = -4 \frac{(\omega^0)^2}{c^2} \sin \alpha_q \cos \alpha_z \frac{d^2 \mathbf{f}^q}{d\zeta^2}, \quad \zeta = t - \frac{(\tilde{\mathbf{k}}^0 \mathbf{r})}{\tilde{k}^0 c} \quad (13)$$

при  $x = 0$ ,  $\xi_{q-1} < z < \xi_q$  и при  $z = 0$ ,  $0 < x < d$ . Здесь  $\mathbf{f}^q$  — профиль падающего импульса в  $q$ -й пластине. Условия излучения, описывающие уход на бесконечность прошедшей волны, записываются следующим образом:

$$C_q^- D_q^+ \mathbf{E} = 0, \quad x = d, \quad \xi_{q-1} < z < \xi_q, \quad (14)$$

$$C_0^+ D_0^- \mathbf{E} = 0, \quad z = a, \quad 0 < x < d. \quad (15)$$

### 3. ОПТИЧЕСКИЕ ПУТИ

#### 3.1. Снижение размерности многомерных задач

Задачи для уравнений математической физики со многими переменными представляют большую вычислительную сложность. Существует, однако, ряд приемов, которые позволяют снизить размерность задачи. Это аналитико-численные алгоритмы, как правило, основанные на физических упрощениях задачи. Одним из них является автомодельная замена переменных, что превращает уравнение в частных производных в ОДУ. Построение таких замен можно считать скорее искусством; общие алгоритмы отсутствуют.

Другим хорошо известным способом является метод характеристик для гиперболических задач. Интегрирование исходного уравнения вдоль характеристики можно трактовать как задачу сниженной размерности.

Близко к этому примыкают подходы, в которых гиперболическая система интегрируется вдоль направления распространения колебаний. Например, такой подход развивали Доброхотов, Назайкинский, Шафаревич, Секерж-Зенькович, Аникин, Толченников и другие (см., например, [11, 12] и цитированную литературу). В указанных работах задача решалась в два этапа: сначала на основе вариационного принципа вычислялись лучевые траектории, затем вдоль них проводились одномерные расчеты фронта волны.

Эти авторы применяли данный подход к расчетам коротковолновых радиотрасс в ионосфере, моделированию распространения океанских волн и формирования цунами и некоторым другим задачам. Во всех этих задачах свойства среды, в которой распространяется волна, плавно зависят от координаты, т.е. границы раздела отсутствуют.

Аналогичный подход развивали Форбс и Алонсо применительно к задачам волновой оптики (дифракции, распространения электромагнитных полей по волноводам и др.) [13–20]. Эти авторы рассматривали отражение и преломление на одной границе раздела. Они вводили лучи для отраженной и преломленной волн. Однако при наличии нескольких границ раздела возникают множественные переотражения, причем в прозрачной среде таких переотражений бесконечно много. Обобщение метода Форбса-Алонсо на этот случай сталкивается с серьезными трудностями. Суммарное поле содержит бесконечное число слагаемых. Обрезание такого ряда вносит погрешность, величина которой требует дополнительных исследований.

Тем не менее, описанные полуаналитические методы намного экономичнее прямого численного моделирования многомерной задачи, поэтому они представляются перспективными.

Поставленные выше задачи являются двумерными. В данной работе предлагается подход, позволяющий свести их к одномерной постановке. Он применим как в среде с плавно меняющимся показателем преломления, так и в слоистой (имеющей несколько границ раздела). Этим предлагаемый подход отличается от методов группы Доброхотова и метода Форбса-Алонсо. Он был назван **методом оптических путей**. Метод сводится к интегрированию уравнений Максвелла вдоль направления распространения (лучевой траектории) падающей и преломленной волн.

### 3.2. Лучевые траектории

1. Рассмотрим стационарную задачу п. 2.2. Пусть сначала токи отсутствуют, т.е. все пластины являются диэлектрическими  $\sigma_q = 0$ ,  $1 \leq q \leq Q$ . Обобщение на случай проводящих пластин будет построено далее (см. п. 3.8). Материал пластин может быть как однородным, так и неоднородным.

2. На каждой  $q$ -й границе раздела падающая волна частично отражается и, преломляясь, частично проходит далее. У падающей и прошедшей волны  $z$ -компонента волнового вектора положительна  $k_z > 0$ . Такие волны будем называть *прямыми*. У отраженной волны  $z$ -компонента волнового вектора отрицательна  $k_z < 0$ . Такие волны будем называть *обратными*. Прямая прошедшая волна падает на следующую  $(q + 1)$ -ю границу раздела, причем угол падения равен углу преломления для  $q$ -й границы раздела. На  $(q + 1)$ -й границе раздела волна претерпевает отражение и преломление. Отраженная обратная волна возвращается к  $q$ -й границе и также испытывает на ней отражение и преломление. Волна, отраженная от  $q$ -й границы, становится прямой и вместе с другими прямыми волнами падает на  $(q + 1)$ -ю границу.

Число таких переотражений очень велико (в случае пренебрежимо малого поглощения переотражений бесконечно много). При этом в каждой пластине все прямые волны имеют одни и те же углы падения и преломления, все обратные волны имеют одни и те же углы отражения. Поэтому можно ввести единую лучевую траекторию для всех прямых волн.

2. Лучевую траекторию построим в рамках геометрической оптики. Для этого необходимо использовать принцип Ферма (аналогично [12]). Он применим, поскольку предполагается, что пространственная дисперсия отсутствует. Принцип Ферма приводит к задаче на экстремум функционала времени распространения света в среде

$$\int_0^a \frac{n(z)}{c} \sqrt{1 + (x'(z))^2} dz \rightarrow \min. \quad (16)$$

Здесь  $c/n(z)$  — скорость распространения света в среде. Это уравнение определяет лучевую траекторию  $x(z)$  падающей волны. В неоднородной среде данная лучевая траектория является криволинейной. Лучевая траектория отраженной волны зеркально симметрична траектории падающей волны относительно плоскости  $Oyz$ . Чтобы построить ее, нужно сделать замену  $x \rightarrow -x$  при сохранении знака  $z$ .

Методы решения таких задач обсуждаются в [21–23]. Возможно также применение прямого сеточного метода [24].

3. В простейшем случае, если рассеиватель составлен из однородных изотропных диэлектрических пластин, эта задача допускает несложное аналитическое решение. Прямые и обратные волны распространяются по прямым линиям, направление которых в  $q$ -й пластине определяет-

ся законом Снеллиуса (который, как известно, есть следствие принципа Ферма). Угол преломления  $\beta_q$  в  $q$ -й границе раздела определяется равенством

$$\beta_q = \arcsin \frac{n_{q+1}}{n_q} \sin \alpha_q, \quad (17)$$

где  $\alpha_q$  — угол падения на  $q$ -ю границу раздела.

Пример лучевой траектории для одной границы раздела между однородными средами приведен на фиг. 1, 2. Эта лучевая траектория является негладкой: она испытывает излом на каждой границе раздела. Обозначим координату вдоль лучевой траектории через  $\eta$ . Для случая фиг. 1, 2 преобразование координат  $z \rightarrow \eta$  выполняется по следующему правилу:

$$\eta = \frac{z}{\cos \alpha}, \quad z < 0; \quad \eta = \frac{z}{\cos \beta}, \quad z > 0. \quad (18)$$

Если границ раздела несколько, то преобразование (18) обобщается очевидным образом.

4. В качестве пространственной координаты выберем **лучевую траекторию** прямой волны.

### 3.3. Неизвестные функции

1. Рассмотрим падающую волну. Как в однородной, так и в неоднородной среде на лучевой траектории поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  ортогональны  $\mathbf{k}$  и имеют только одну компоненту, равную комплексной амплитуде соответствующего вектора. Эта амплитуда зависит от одной пространственной переменной — координаты вдоль лучевой траектории. Поэтому задача, в которой присутствует только падающая волна, является одномерной. То же справедливо для отраженной волны.

2. Во всех пластинах рассеивателя, включая среду в области  $z < 0$ , поле является суперпозицией падающей и отраженной волн. В этом случае суммарные векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не ортогональны  $\mathbf{k}$ . Однако, согласно закону отражения, углы между полевыми векторами падающей и отраженной волн и осями координат одинаковы. Так, для  $s$ -поляризации угол между полем  $\mathbf{H}_{\text{inc}}$  падающей волны и осью  $z$  равен углу между полем  $\mathbf{H}_{\text{refl}}$  отраженной волны и осью  $z$  (аналогично для оси  $x$ ). То же справедливо для полей  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ ,  $\mathbf{E}_{\text{refl}}$  в случае  $p$ -поляризации. Поэтому проекции суммарного поля на оси координат вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_z &= (H_{\text{inc}})_z + (H_{\text{refl}})_z = (H_{\text{inc}} + H_{\text{refl}}) \sin \alpha \quad \text{для } s\text{-поляризации,} \\ E_z &= (E_{\text{inc}})_z + (E_{\text{refl}})_z = (E_{\text{inc}} + E_{\text{refl}}) \sin \alpha \quad \text{для } p\text{-поляризации.} \end{aligned} \quad (19)$$

Выражения для  $E_x$ ,  $H_x$  получаются из (19) заменой  $\sin \rightarrow \cos$ .

3. Таким образом, как и в случае нормального падения, решение полностью определяется **суммой комплексных амплитуд** падающей и отраженной волн. Поэтому для расчета можно использовать одномерную схему, в которой неизвестной функцией является указанная сумма.

### 3.4. Условия сопряжения

Интегральные уравнения Максвелла в изотропной среде инвариантны относительно поворота системы координат. Поэтому, чтобы перейти к координате вдоль лучевой траектории, достаточно модифицировать условия сопряжения на границе раздела сред.

Рассмотрим падение волны на одну границу раздела (см. фиг. 1, 2). Условия сопряжения для тангенциальных компонент полей на этой границе имеют вид

$$(E_\tau)_1 = (E_\tau)_2, \quad (H_\tau)_1 = (H_\tau)_2. \quad (20)$$

Здесь среда 1 расположена до границы раздела, а среда 2 — после. Для  $s$ -поляризации условия сопряжения имеют вид

$$E_1 = E_2, \quad H_1 \cos \alpha = H_2 \cos \beta, \quad (21)$$

где  $\alpha$  — заданный угол падения,  $\beta$  — угол преломления. Для  $p$ -поляризации условия сопряжения записываются следующим образом:

$$H_1 = H_2, \quad E_1 \cos \alpha = E_2 \cos \beta. \quad (22)$$

Условия сопряжения непосредственно входят в разностную схему. По сравнению со случаем нормального падения добавляются только множители  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$ . Если границ раздела несколько, то условия (21), (22) записываются на каждой из них.

Чтобы учесть полное внутреннее отражение, введем чисто мнимое волновое число  $k \rightarrow ik$ , если  $(\operatorname{Re} n_1 / \operatorname{Re} n_2) \sin \alpha > 1$ . Такая замена справедлива, если среды являются прозрачными либо поглощающими (т.е.  $\operatorname{Im} n \geq 0$ ).

### 3.5. Эффективная толщина

После перехода к координате вдоль лучевой траектории эффективная толщина пластин отличается от физической толщины. Потребуем, чтобы пластина эффективной толщины обеспечила правильный набег фазы.

Рассмотрим наклонное падение плоской волны на плоско-параллельную пластину (интерферометр Фабри-Перо). Разность фаз у волны, однократно прошедшей туда и обратно через пластинку, и волны, отразившейся от наружной поверхности пластины, равна [25]

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2hn \cos \beta. \quad (23)$$

Чтобы обеспечить такую же разность фаз при движении вдоль лучевой траектории, заменим физическую толщину на эффективную

$$h \rightarrow h \cos \beta. \quad (24)$$

Если в среде имеется поглощение, т.е.  $\operatorname{Im} n \neq 0$ , то угол  $\beta$  формально оказывается комплексным. При этом набег фазы  $\delta$  также является комплексным, т.е. учитывает затухание волны. В этом случае в (24) нужно взять  $|\cos \beta|$ .

Такая пластинка эффективной толщины будет давать такой же спектр отражения, что исходная пластинка при наклонном падении. При наличии нескольких пластин толщину каждой следует заменить на эффективную.

**Замечание 1.** Для прозрачной среды без поглощения замена пластинки на эффективную является точной. Если поглощением пренебречь нельзя, то метод оптических путей вносит некоторую физическую погрешность. Величина этой погрешности будет проиллюстрирована далее (см. п. 4.3).

**Замечание 2.** Строго говоря, в диспергирующей среде эффективные толщины для различных частот оказываются разными. Если среда является еще и неоднородной, то для волн с различными частотами будут несколько отличаться лучевые траектории.

Однако для реальных диэлектрических материалов в оптическом диапазоне это различие невелико. Поэтому мы им пренебрегаем и вычисляем лучевые траектории и эффективные толщины слоев по частоте, соответствующей середине рассматриваемого диапазона.

### 3.6. Разностная схема

Согласно условиям сопряжения, тангенциальные компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а также нормальные компоненты векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  непрерывны на границах раздела сред. Однако комплексные амплитуды полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  испытывают сильный разрыв. Чтобы проводить расчеты таких решений, нужно использовать бикомпактные схемы [26], [27]. Это двухточечные полностью консервативные схемы, основанные на сеточной аппроксимации интегральных законов сохранения (1), (2) и условий сопряжения (8). При этом сетка по координате выбирается так, чтобы узлы попадали в границы раздела сред. Остальные узлы могут быть расставлены произвольно. Такие сетки называются специальными [28].

Рассмотрим оптически эквивалентный рассеиватель. Эффективные толщины пластин равны  $(\xi_{q+1} - \xi_q) \cos \beta_q$ ,  $1 \leq q \leq Q - 1$ , где  $\xi_0 = 0$ . Введем специальную сетку. Бикомпактная разностная схема для случая  $s$ -поляризации будет иметь следующий вид:

$$H_{2n-1} - H_{2n-2} = \frac{i\omega}{2c} \varepsilon_{n-1/2} \Delta z_{n-1/2} (E_{2n-1} + E_{2n-2}), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (25)$$

$$E_{2n-1} - E_{2n-2} = \frac{i\omega}{2c} \mu_{n-1/2} \Delta z_{n-1/2} (H_{2n-1} + H_{2n-2}), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (26)$$



$$E_{2n} = E_{2n-1}, \quad H_{2n} \cos \beta_n = H_{2n-1} \cos \alpha_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_0} E_0 + \sqrt{\mu_0} H_0 &= 2\sqrt{\epsilon_0} E^0, \quad z = 0, \\ \sqrt{\epsilon_N} E_{2N-1} - \sqrt{\mu_N} H_{2N-1} &= 2\sqrt{\epsilon_N} E^a, \quad z = a. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  — угол падения и угол преломления на границе расчетной области,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  — угол падения и угол преломления, соответствующие первому узлу сетки и т.д. При этом  $\beta_0$  вычисляем по заданному  $\alpha_0$  по формуле (17), затем полагаем  $\alpha_1 = \beta_0$ ,  $\beta_1$  определяем по  $\alpha_1$  согласно (17) и т.д. Если в  $n$ -м узле граница раздела отсутствует, то преломления не происходит, и  $\beta_n = \alpha_n$  по построению.

В случае  $p$ -поляризации нужно заменить равенства (27) на

$$E_{2n} \cos \beta_n = E_{2n-1} \cos \alpha_n, \quad H_{2n} = H_{2n-1}, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (29)$$

Решение разностной схемы (25)–(29) соответствует фиксированной координате  $x$ . Чтобы получить решение исходной двумерной задачи, необходимо сделать обратную замену переменных  $\eta \rightarrow z$  по формуле (18) и умножить решение на

$$\exp\left(ix_m \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_n \mu_n} \sin \alpha_n\right). \quad (30)$$

Здесь  $\{x_m\}$  — сетка по координате  $x$ . Значения материальных параметров  $\epsilon_n, \mu_n$  целесообразно вычислять в узлах сетки. Множитель (30) описывает распространение волны вдоль границ раздела.

**Обоснование сходимости** схемы (25)–(29) практически дословно повторяет таковое для одномерной бикомпактной схемы [6].

### 3.7. Клиновидная пластина

Предложенный метод можно обобщить на случай клиновидных пластин, когда границы раздела являются плоскими, но не параллельными. Построим такое обобщение, следуя [25].

Набег фазы волны, прошедшей туда и обратно через пластинку, приближенно описывается формулой (23), где  $h$  — толщина пластины в том месте, где происходит отражение света. Так, если угол при вершине клина равен  $\gamma$ , то на расстоянии  $x$  от вершины толщина пластинки равна  $h(x) = x \operatorname{tg} \gamma$ . Поэтому для клиновидной пластины эффективная толщина вводится по формуле (24), в которой нужно подставить “местную” физическую толщину  $h(x)$ .

В условиях сопряжения необходимо учитывать, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  отсчитываются от нормали к границам раздела.

Сеточная задача (25)–(29) решается при каждом фиксированном  $x_l$ . Решение умножается на множитель (30), где вместо  $x_m$  нужно подставить  $x_m - x_l$  (т.е. на то расстояние, которое “проходит” волна от источника  $x_l$  до точки наблюдения  $x_m$ ). Затем полученные решения необходимо просуммировать с весом, обратным числу шагов сетки по  $x$ .

### 3.8. Индуцированные токи

**3.8.1. S-поляризация.** В этом случае векторы электрического поля  $\mathbf{E}_{\text{inc}} = \{0, E_{\text{inc}}, 0\}$  в падающей и  $\mathbf{E}_{\text{refl}} = \{0, E_{\text{refl}}, 0\}$  направлены вдоль оси  $y$ . Поэтому вектор  $\mathbf{J}^{\text{ind}} = \sigma \mathbf{E}$  также направлен вдоль той же оси. Эти токи излучают электромагнитные волны, в которых вектор  $\mathbf{E}_{\text{emit}} = \{0, E_{\text{emit}}, 0\}$  направлен так же, как векторы  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$  и  $\mathbf{E}_{\text{refl}}$ . Следовательно, амплитуда суммарного поля есть сумма амплитуд полей падающей, отраженной и переизлученной волн. Поэтому разностная схема для случая  $s$ -поляризованных волн в проводящей среде будет иметь следующий вид:

$$H_{2n-1} - H_{2n-2} - (i\omega c^{-1} \epsilon_{n-1/2} - 4\pi c^{-1} \sigma_{n-1/2}) \Delta z_{n-1/2} (E_{2n-1} + E_{2n-2}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (31)$$

$$E_{2n-1} - E_{2n-2} - \frac{i\omega}{2c} \mu_{n-1/2} \Delta z_{n-1/2} (H_{2n-1} + H_{2n-2}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (32)$$

$$E_{2n} = E_{2n-1}, \quad H_{2n} \cos \beta_n = H_{2n-1} \cos \alpha_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (33)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\epsilon_0}E_0 + \sqrt{\mu_0}H_0 &= 2\sqrt{\epsilon_0}E^0, \quad z = 0 \\ \sqrt{\epsilon_N}E_{2N-1} - \sqrt{\mu_N}H_{2N-1} &= 2\sqrt{\epsilon_N}E^a, \quad z = a.\end{aligned}\quad (34)$$

**3.8.2. Р-поляризация.** При  $p$ -поляризации векторы  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$  падающей и  $\mathbf{E}_{\text{refl}}$  отраженной волн не лежат в плоскости границ раздела: они имеют  $x$ - и  $z$ -компоненты. Объемные токи  $\mathbf{J}^{\text{ind}}$  направлены так же, как вектор  $\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{refl}}$ . Поэтому в излучаемой ими волне вектор  $\mathbf{E}_{\text{emit}}$  параллелен сумме электрических полей падающей и отраженной волн  $\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{refl}}$ .

Таким образом, разностная схема для случая  $p$ -поляризованной волны в проводящей среде имеет следующий вид:

$$H_{2n-1} - H_{2n-2} - (i\omega c^{-1}\epsilon_{n-1/2} - 4\pi c^{-1}\sigma_{n-1/2})\Delta z_{n-1/2}(E_{2n-1} + E_{2n-2}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (35)$$

$$E_{2n-1} - E_{2n-2} - \frac{i\omega}{2c}\mu_{n-1/2}\Delta z_{n-1/2}(H_{2n-1} + H_{2n-2}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (36)$$

$$E_{2n} \cos \beta_n = E_{2n-1} \cos \alpha_n, \quad H_{2n} = H_{2n-1}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (37)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\epsilon_0}E_0 + \sqrt{\mu_0}H_0 &= 2\sqrt{\epsilon_0}E^0, \quad z = 0, \\ \sqrt{\epsilon_N}E_{2N-1} - \sqrt{\mu_N}H_{2N-1} &= 2\sqrt{\epsilon_N}E^a, \quad z = a.\end{aligned}\quad (38)$$

### 3.9. Нестационарные задачи

Для нестационарных задач в [26], [27] был предложен метод спектрального разложения. Кратко напомним его суть.

При распространении волнового пакета в линейной диспергирующей среде для разных спектральных компонент решения реализуются разные значения  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ . Разложим пакет на монохроматические компоненты, решим стационарную задачу для каждой из них и просуммируем полученные решения. Спектральное разложение исходного пакета есть прямое преобразование Фурье, суммирование полученных решений – обратное преобразование Фурье. Оба преобразования выполняются с помощью численных квадратур. Описанный алгоритм назовем *нестационарной бикомпактной схемой*.

Таким образом, нестационарная задача п. 2.3 сводится к набору стационарных задач п. 2.2. Данный подход имеет простой физический смысл. Он позволяет учитывать произвольный закон частотной дисперсии, включая таблично заданный.

### 3.10. Сравнение с аналогичными подходами

Сравним область применимости метода оптических путей и известных подходов.

Как отмечалось выше, методы группы Доброхотова применимы к задачам, в которых свойства среды плавно зависят от координаты, т.е. границы раздела отсутствуют. Метод Форбса-Алонсо разработан для сред с плавно меняющимся показателем преломления. Обобщение этих подходов на задачи в слоистых средах с несколькими границами раздела сталкивается со значительными трудностями из-за множественных переотражений. Предлагаемый метод оптических путей единообразно применим как к средам без границ раздела, так и к слоистым.

В оптических задачах широко применяются методы матриц рассеяния. Однако он применим для кусочно-однородных сред: внутри слоев показатели преломления не должны зависеть от координаты. Метод оптических путей применим к задачам, в которых пластины могут быть пространственно неоднородными.

Методы матриц рассеяния и метод Форбса-Алонсо применимы только для стационарных задач. Метод оптических путей построен как для стационарных, так и для нестационарных задач.

Таким образом, в рамках рассмотренных постановок метод оптических путей применим к более широкому кругу задач, чем другие известные методы.

## 4. ВЕРИФИКАЦИЯ

Проведем верификацию предложенного метода на тестовых задачах с известными точными решениями. В задачах этого раздела все размерные величины нормированы (т.е. являются относительными).

## 4.1. Граница раздела

1. Рассмотрим задачу о наклонном падении плоской  $s$ -поляризованной монохроматической волны на плоскую границу раздела. Пусть последняя соответствует  $z = b > 0$ . Пусть при  $0 < z < b$  материалы среды есть  $\epsilon_1, \mu_1$ ; при  $b < z < a - \epsilon_2, \mu_2$ . Пусть амплитуда электрического поля падающей волны равна  $E^0$ . В случае  $s$ -поляризации вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения (см. фиг. 1).

2. Построим точное решение этой задачи. Очевидно, оно равно сумме падающей и отраженной волн при  $z < b$  и прошедшей волне при  $z > b$ . Амплитудные коэффициенты отраженной и прошедшей волн выражаются общеизвестными формулами Френеля. Таким образом, при  $0 < z < b$  решение имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_y \exp(ix\tilde{k}_1 \sin \alpha) \left[ E^0 \exp(iz\tilde{k}_1 \cos \alpha) + C_2 \exp(-iz\tilde{k}_1 \cos \alpha) \right], \\ \mathbf{H} &= (\mathbf{E}_x \cos \alpha + \mathbf{E}_z \sin \alpha) \exp(ix\tilde{k}_1 \sin \alpha) \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \left[ E^0 \exp(iz\tilde{k}_1 \cos \alpha) - C_2 \exp(-iz\tilde{k}_1 \cos \alpha) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

$$C_2 = E^0 \frac{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \alpha - \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \beta}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \beta} e^{i\tilde{k}_1 b}, \quad \tilde{k}_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}. \quad (40)$$

При  $b < z \leq a$  оно равно

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_y C_3 \exp(ix\tilde{k}_2 \sin \alpha + iz\tilde{k}_2 \cos \alpha), \\ \mathbf{H} &= (\mathbf{E}_x \cos \beta + \mathbf{E}_z \sin \beta) C_3 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \exp(ix\tilde{k}_2 \sin \alpha + iz\tilde{k}_2 \cos \alpha), \end{aligned} \quad (41)$$

$$C_3 = E^0 \frac{2\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \alpha}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \beta} e^{i(\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)b}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}. \quad (42)$$

3. Построим теперь решение задачи в переменной  $\eta$ , т.е. вдоль лучевой траектории. Запишем одномерную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{i\mu_1 \omega}{c} H; \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{i\epsilon_1 \omega}{c} E, \quad 0 \leq \eta \leq b \cos \alpha; \quad (43)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{i\mu_2 \omega}{c} H; \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{i\epsilon_2 \omega}{c} E, \quad b \cos \alpha \leq \eta \leq a \cos \beta; \quad (44)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} + \frac{i\omega}{c} E = 2i\tilde{k} E^0, \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \eta} - \frac{i\omega}{c} E = 0, \quad \eta = a \cos \beta; \quad (45)$$

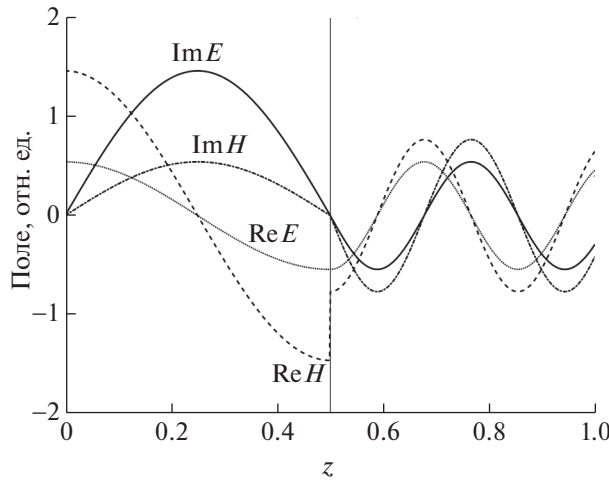
$$E|_{\eta=b \cos \alpha - 0} = E|_{\eta=b \cos \alpha + 0}, \quad H \cos \alpha|_{\eta=b \cos \alpha - 0} = H \cos \beta|_{\eta=b \cos \alpha + 0}. \quad (46)$$

Исключим  $H$ . Это даст стационарное волновое уравнение для  $E$ . Коэффициенты в общем решении по обе стороны от границы раздела определяются подстановкой в условия излучения (45) и условия сопряжения (46). Решение имеет вид

$$E = E^0 e^{i\tilde{k}_1 \eta} + C_2 e^{-i\tilde{k}_1 \eta}, \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E^0 e^{i\tilde{k}_1 \eta} - C_2 e^{-i\tilde{k}_1 \eta}), \quad 0 \leq \eta \leq b \cos \alpha; \quad (47)$$

$$E = C_3 e^{i\tilde{k}_2 \eta}, \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} C_3 e^{i\tilde{k}_2 \eta}, \quad b \cos \alpha \leq \eta \leq a \cos \beta. \quad (48)$$

Здесь коэффициенты  $C_2, C_3$  определяются выражениями (40), (42).



**Фиг. 3.** Амплитуды полей в задаче о падении  $s$ -поляризованной волны на диэлектрическую границу раздела. Вертикальная прямая — граница раздела.

Легко видеть, что решение (39)–(42) получается из (47), (48) домножением на  $\exp(ix\tilde{k}_1 \sin \alpha)$  либо  $\exp(ix\tilde{k}_2 \sin \beta)$ , что соответствует распространению волны вдоль оси  $x$ , и на  $\cos \alpha$  либо  $\sin \alpha$  в случае проекций на оси  $x$  и  $z$  соответственно (ср. с формулой (19)). Таким образом, два точных решения, полученных разными способами, согласуются между собой. Это подтверждает правильность метода оптических путей.

4. Положим  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 4$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $c = 1$ ,  $E^0 = 1$ ,  $E^a = 0$ . На трех следующих фигурах показано решение, полученное методом оптических путей. На фиг. 3 показаны амплитуды полей, т.е. непосредственно те функции, которые вычисляются в ходе точного расчета. Компонента  $\text{Re } E$  является непрерывной и гладкой. Компоненты  $\text{Im } E$ ,  $\text{Im } H$  являются непрерывными, но негладкими: на границе раздела они имеют слабый разрыв. Компонента  $\text{Re } H$  на границе раздела испытывает сильный разрыв.

На фиг. 5 представлены тангенциальные компоненты векторов  $E_y$ ,  $H_x$ . Видно, что все они непрерывны. При этом  $E_y$  совпадает с фиг. 3. Компоненты  $\text{Re } E_y$  и  $\text{Re } H_x$  являются гладкими, а  $\text{Im } E_y$  и  $\text{Im } H_x$  испытывают излом на границе раздела сред.

На фиг. 6 приведена нормальная компонента  $H_z$ . Видно, что компонента  $\text{Im } H_z$  непрерывна, но испытывает излом на границе раздела. Компонента  $\text{Re } H_z$  претерпевает там разрыв.

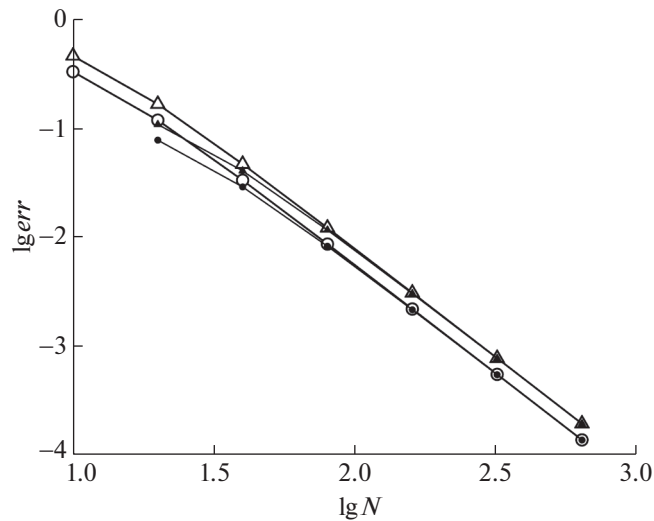
Расчет проводился на наборе сгущающихся сеток. Погрешность определялась двумя способами: (а) при помощи непосредственного сравнения численного решения с точным (47), (48) и (б) апостериорно по методу Ричардсона-Калиткина.

Напомним суть метода Ричардсона-Калиткина [29]. Пусть выполнен расчет на наборе сгущающихся сеток и получена последовательность сеточных решений  $(E_y)_N$ ,  $(E_y)_{2N}$ ,  $(E_y)_{4N}$ , ... Тогда оценка погрешности решения  $(E_y)_{2N}$  имеет вид

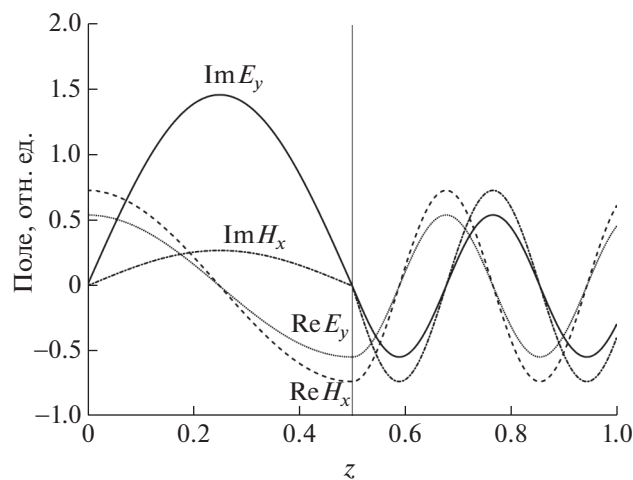
$$\delta(E_y)_{2N} = \frac{(E_y)_{2N} - (E_y)_N}{2^p - 1}, \quad (49)$$

где  $p$  — порядок точности разностной схемы. Эта оценка асимптотически точна. Она вычисляется по расчетам на каждой паре сеток  $N$ ,  $2N$ ,  $2N$ ,  $4N$  и т.д.

На фиг. 4 представлены погрешности, полученные в данной задаче. График дан в двойном логарифмическом масштабе, поэтому прямая линия соответствует степенной сходимости, причем наклон прямой равен порядку точности схемы. Видно, что линии погрешности стремятся к прямой с наклоном  $-2$ . Видно также, что на прямолинейном участке кривых погрешности, вычисленные по методу сгущения сеток, практически совпадают с погрешностями относительно точного решения. Это убедительно подтверждает работоспособность предложенного метода.



**Фиг. 4.** Погрешность решения в задаче о падении  $s$ -поляризованной волны на диэлектрическую границу раздела:  $\circ$  для  $E_x$ ,  $\Delta$  для  $H_y$ , светлые маркеры — разность численного и точного решений, темные маркеры — оценки по методу Рундсона-Калиткина.

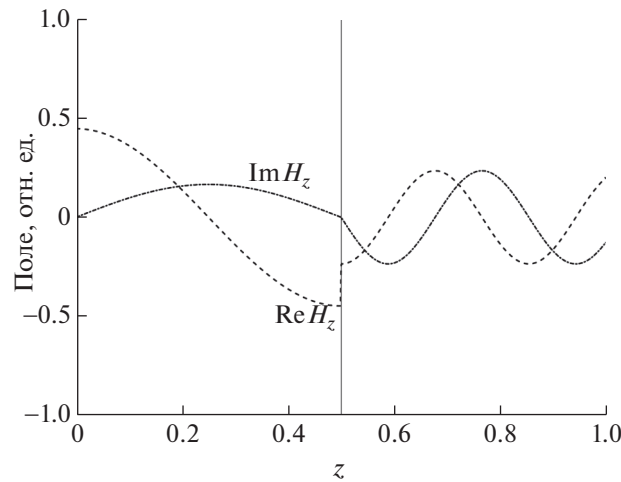


**Фиг. 5.** Тангенциальные компоненты полей в задаче о падении  $s$ -поляризованной волны на диэлектрическую границу раздела. Вертикальная прямая — граница раздела.

Из приведенных расчетов видно, что данная задача очень сложна для сеточных методов. Тем не менее бикомпактная схема на специальных сетках успешно с ней справляется.

5. Полностью аналогично рассматривается задача о падении  $p$ -поляризованной волны. Достаточно в (39), (41) поменять местами поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (при этом отраженная волна для поля  $\mathbf{E}$  должна быть со знаком “плюс”, для поля  $\mathbf{H}$  — со знаком “минус”) и заменить  $C_2, C_3$  на коэффициенты Френеля для  $p$ -поляризации.

Нетрудно показать, что для  $p$ -поляризованной волны решение в лучевой переменной также эквивалентно решению исходной двумерной задачи. Проводились расчеты по бикомпактной схеме, аналогичные описанным выше. Они показали, что бикомпактная разностная схема сходится со 2-м порядком точности. При этом на участке теоретической сходимости апостериорные оценки точности по методу Рундсона-Калиткина практически неотличимы от фактических погрешностей, вычисленных при помощи прямого сравнения численного решения с точным. Таким образом, этот случай также можно считать надежно верифицированным.



**Фиг. 6.** Нормальная компонента поля  $H$  в задаче о падении  $s$ -поляризованной волны на диэлектрическую границу раздела. Вертикальная прямая — граница раздела.

#### 4.2. Полное внутреннее отражение

1. Рассмотрим распространение  $s$ -поляризованного света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную. Будем считать, что обе среды не являются генерирующими. Как известно, если параметры среды таковы, что  $n_1/n_2 \sin \alpha > 1$ , то происходит полное внутреннее отражение. Волна полностью отражается обратно в плотную среду; по границе раздела распространяется поверхностная волна, амплитуда которой экспоненциально убывает по мере удаления от границы раздела.

2. Точное решение этой задачи дается формулами (39)–(42). При этом в формулах (41), (42) нужно заменить  $k \rightarrow ik$ .

Аналогично строится точное решение методом оптических путей: в соотношениях (48) нужно сделать замену  $k \rightarrow ik$ .

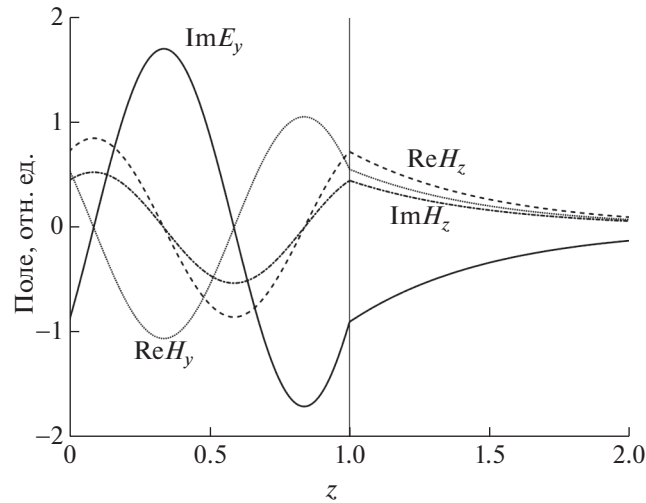
3. Положим  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 0.1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $c = 1$ ,  $E^0 = 1$ ,  $E^a = 0$ .

На фиг. 7 представлены тангенциальные компоненты  $E_y$  и  $H_x$ . Видно, что они непрерывны, но имеют излом на границе раздела. Слева от границы раздела решение является осциллирующим, справа — имеет вид затухающей экспоненты. Такой вид решения является качественно разумным (напомним, что поля предполагаются неструктурированными).

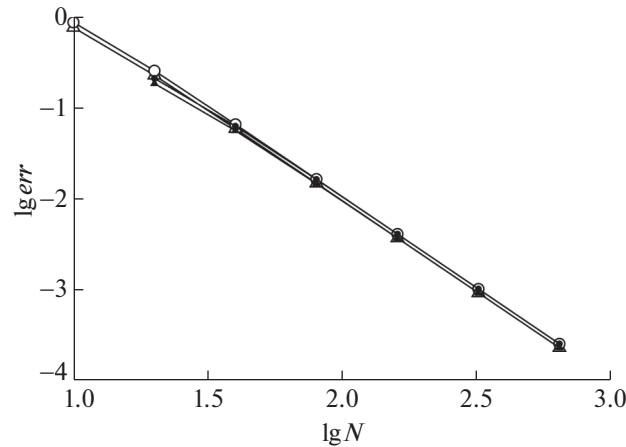
На фиг. 8 показаны погрешности, полученные в этом расчете, в зависимости от числа шагов сетки. Масштаб графика двойной логарифмический. Видно, что погрешности убывают в соответствии со 2-м порядком точности. На участке теоретической сходимости апостериорные оценки по методу Ричардсона-Калиткина практически неотличимы от истинных погрешностей, найденных как разность численного и точного решений.

**Замечание.** Точное решение (39)–(42) и аналогичное решение для  $p$ -поляризованной волны соответствуют стационарной постановке. На их основе методом спектрального разложения легко построить решения соответствующих нестационарных задач, в которых падающая волна является не бесконечным цугом, а импульсом. Для этого в качестве  $E^0$  нужно взять спектральную амплитуду падающего импульса и выполнить обратное преобразование Фурье.

Тогда точное решение нестационарной задачи будет иметь вид (39)–(42), где вместо  $E^0 \exp(iz\tilde{k}_{1,2} \cos \alpha)$ ,  $E^0 \exp(-iz\tilde{k}_1 \cos \alpha)$  нужно подставить соответственно  $\mathcal{E}(\sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}}z/c - t)$ ,  $\mathcal{E}((2b - z)/c\sqrt{\epsilon_1\mu_1} - t)$ . Здесь  $\mathcal{E}(t)$  — временная развертка падающего импульса. Найти эти решения в литературе не удалось. По-видимому, они являются новыми. Расчеты этих задач не проводились, нестационарная формулировка метода оптических путей является простым обобщением стационарного варианта этого метода, а также метода спектрального разложения.



**Фиг. 7.** Тангенциальные компоненты полей в задаче о полном внутреннем отражении  $s$ -поляризованной волны. Вертикальная прямая — граница раздела.



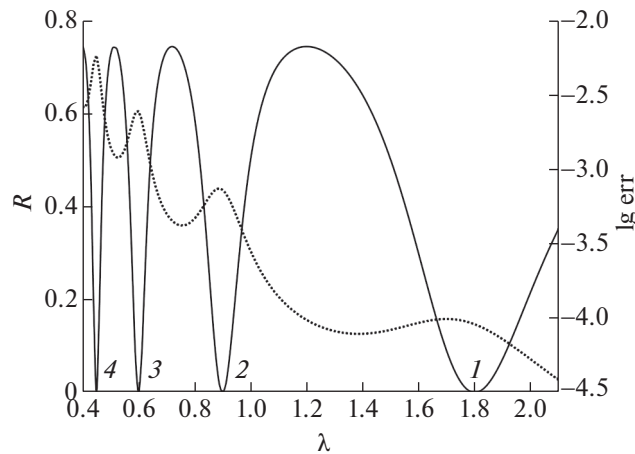
**Фиг. 8.** Погрешность решения в задаче о полном внутреннем отражении  $s$ -поляризованной волны. Обозначения соответствуют фиг. 4.

#### 4.3. Интерферометр Фабри-Перо

1. Рассмотрим наклонное падение плоской волны на плоско-параллельную пластину (интерферометр Фабри-Перо). Пусть толщина пластины равна  $d$ , и границы раздела соответствуют плоскостям  $z = b$  и  $z = b + d$ . Пластина расположена в воздухе. Материальные параметры пластины равны  $\epsilon, \mu$ .

2. Поскольку число переотражений внутри пластины формально бесконечно, то построение точного решения является затруднительным. Однако в этой задаче хорошо известен характер спектра отражения. Положим  $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.5, c = 1$ . Показатель преломления является вещественным, т.е. пластинка оптически прозрачна. Угол  $\alpha$  подберем так, чтобы  $\cos \beta$  было рациональным числом. Это позволит исключить влияние ошибок округления при вычислении тригонометрических функций и более аккуратно проверить сходимость. Положим  $\cos \beta = 9/10$ . Тогда  $\alpha = \arcsin(\sqrt{\epsilon} \cos \beta) \approx 1.059 = 60.67^\circ$ . Положим  $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.5, c = 1$ . Нули в спектре отражения соответствуют набегу фазы  $\delta = 2\pi m, m = 1, 2, \dots$ , см. формулу (23). Соответствующие длины волн равны

$$\lambda = 2 \cos \beta / m = 9/(5m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (50)$$



**Фиг. 9.** Задача о прозрачной пластинке при наклонном падении. Сплошная линия – спектр отражения, пунктир – погрешность полей по методу Ричардсона-Калиткина на сетке с  $N = 1280$ . Цифры – номер минимума, равный значению  $m$  в (50).

3. На фиг. 9 приведен расчетный спектр отражения. Его качественный вид соответствует теоретическому. Контроль точности расчета проводился двумя способами.

Во-первых, вычислялась погрешность сеточного решения по методу Ричардсона-Калиткина. Погрешность на последней сетке, содержащей  $N = 1280$  шагов, в зависимости от длины волны приведена на фиг. 9. Видно, что с уменьшением длины волны (т.е. с увеличением частоты) погрешность возрастает, поскольку увеличиваются производные решения. Тем не менее даже для наименьшей из рассмотренных длин волн погрешность не превышает 1%.

Во-вторых, вычислялась погрешность положений минимумов в спектре отражения. Она равна разности расчетных локальных минимумов и теоретических значений (50). Зависимость этой погрешности от числа шагов сетки для минимумов с  $m = 1-4$  приведена на фиг. 10. Масштаб графика двойной логарифмический. Видно, с ростом  $m$  погрешности положения минимумов увеличиваются. При сгущении сеток все кривые выходят на прямые линии, т.е. погрешности убывают по степенному закону. Скорость убывания соответствует 2-му порядку точности. Это означает, что, по крайней мере, в пределах фиг. 10 погрешность положения минимума определяется только сеточной погрешностью разностной схемы. В противном случае погрешность вышла бы на некоторые предельные значения и дальше перестала бы убывать.

Таким образом, если поглощение равно нулю (т.е. пластинка прозрачна), то погрешность расчетного положения минимума определяется только погрешностью разностной схемы. При этом сам метод оптических путей не вносит физической погрешности.

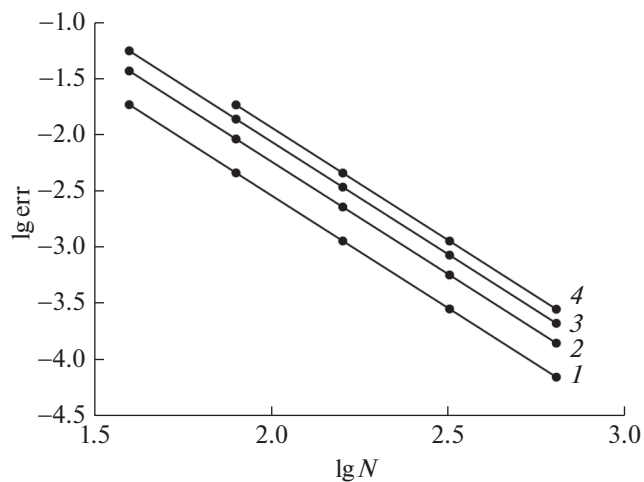
5. Как отмечалось ранее, для материалов с поглощением метод оптических путей вносит некоторую физическую погрешность. Она возрастает с увеличением  $\text{Im}\epsilon$ . Чтобы оценить эту погрешность, проводились расчеты задачи о наклонном падении на пластинку с комплекснозначным  $\epsilon$ .

В предыдущей задаче положим  $\epsilon = 4 + i$ . Такое поглощение очень велико: типичные  $\text{Im}\epsilon$  для актуальных материалов составляют  $\sim 10^{-2}-10^{-3}$ , реже  $10^{-1}$ . Поэтому данный тест является представительным.

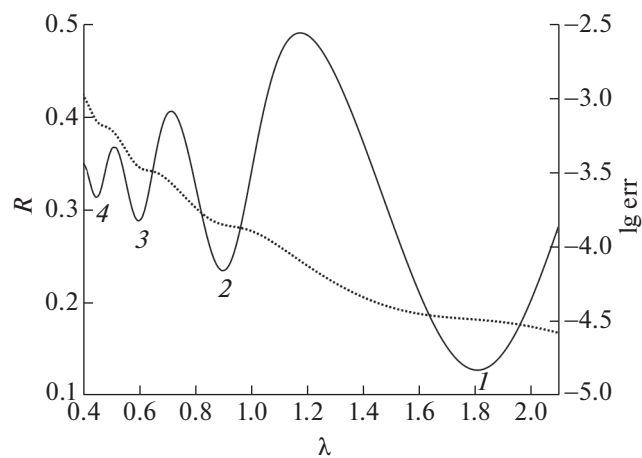
Расчетный спектр отражения приведен на фиг. 11. Видно, что с увеличением  $m$  минимумы отражения становятся более мелкими. На этой фигуре показана также апостериорная оценка точности полей  $E$  и  $H$  на сетке с  $N = 1280$  шагов. Поскольку решение является более плавным, чем в предыдущей задаче, то фактическая погрешность оказалась заметно меньше и не превосходит 0.3%.

На фиг. 12 показана зависимость погрешности положения минимумов от числа шагов сетки. Масштаб графика двойной логарифмический. Вид кривых принципиально отличается от случая прозрачной среды. Начало кривых соответствует грубым сеткам. Здесь физическая погрешность метода оптических путей мала по сравнению с математической сеточной погрешностью. Поэто-

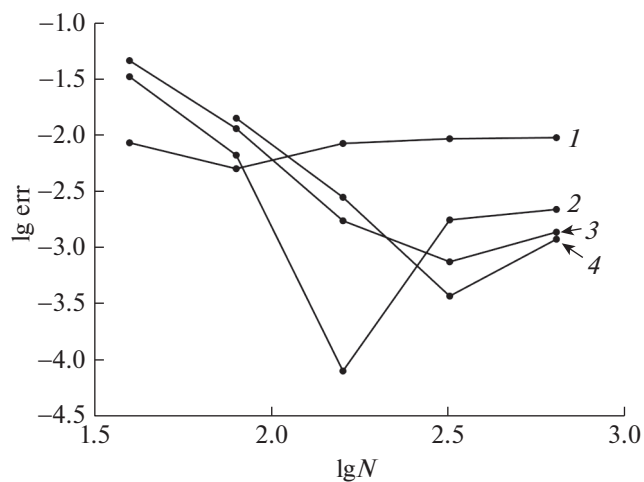




**Фиг. 10.** Задача о прозрачной пластинке при нормальном падении. Погрешность положения  $m$ -го минимума в спектре отражения. Цифры около линий — значения  $m$ .



**Фиг. 11.** Задача о поглощающей пластинке при наклонном падении. Обозначения соответствуют фиг. 9.



**Фиг. 12.** Задача о поглощающей пластинке при наклонном падении. Погрешность положения  $m$ -го минимума в спектре отражения. Цифры около линий — значения  $m$ .

му в начале кривых на фиг. 12 погрешность убывает при увеличении числа шагов. Однако на достаточно подробных сетках сеточная погрешность становится сопоставима с физической погрешностью. Поэтому при дальнейшем сгущении сетки погрешность на фиг. 12 перестает убывать и выходит на константу. Эта константа различна для разных  $m$ . Она оказалась наибольшей для первого минимума  $m = 1$ . Однако даже для него физическая погрешность не превышает 1%. Такую точность можно считать отличной.

6. Таким образом, расчеты данного пункта верифицируют корректность приближения эффективных толщин и показывают, что метод оптических путей применим к широкому кругу важных прикладных задач.

Авторы искренне благодарны Н.Н. Калиткину и Л.А. Севастьянову за ценные замечания и обсуждения и А.Н. Боголюбову за внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Robertson W.M., May M.S. Surface electromagnetic wave excitation on onedimensional photonic band-gap arrays // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 74. P. 1800.
2. Augu'e B., Fuertes M.C., Angelom'e P.C., et al. Tamm plasmon resonance in mesoporous multilayers: Toward a sensing application // ACS Photonics. 2014. V. 1. № 9. P. 775–780.
3. Afinogenov B.I., Popkova A.A., Bessonov V.O., Fedyanin A.A. Measurements of the femtosecond relaxation dynamics of tamm plasmon-polaritons // Appl. Phys. Lett. 2016. V. 141. P. 171107.
4. Brückner R., Sudzius M., Hintschich S.I. et al. Hybrid optical tamm states in a planar dielectric microcavity // Phys. Rev. B. 2011. V. 83. P. 033405.
5. Gessler J., Baumann V., Emmerling M. et al. Electro optical tuning of tammplasmon exciton-polaritons // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 105. P. 181107.
6. Белов А.А., Добровская Ж.О. Тестирование бикомпактных схем для одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 9. С. 1532–1550.
7. Berreman D.W. Optics in stratified and anisotropic media:  $4 \times 4$ -matrix formulation // J. Opt. Soc. Am. 1972. V. 62. № 9. P. 502–510.
8. Свешников А.Г., Тихонравов А.В. Математические методы в задачах анализа и синтеза слоистых сред // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 7. С. 13–38.
9. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
10. Белов А.А., Добровская Ж.О. Прецизионные методы решения одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 90–104.
11. Доброхотов С.Ю., Клименко М.В., Носиков И.А., Толченников А.А. Вариационный метод расчета лучевых траекторий и фронтов волн цунами, порожденных локализованным источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 8. С. 1439–1448.
12. Носиков И.А. Прямой вариационный метод для расчета траекторных характеристик КВ радиотрасс в ионосфере. Диссертация ... кандидата физико-математических наук // Балтийский федеральный университет им. И. Канта // 2020.
13. Forbes G.W., Alonso M.A. What on earth is a ray and how can we use them best? // International Optical Design Conference 1998, L.R. Gardner and K.P Thompson, eds., Proc. SPIE. 1998. V. 3482. P. 22–31.
14. Forbes G.W., Alonso M.A. Using rays better. i. theory for smoothly varying media // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18. P. 1132–1145.
15. Alonso M.A., Forbes G.W. Using rays better. ii. ray families to match prescribed wave fields // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18. P. 1146–1159.
16. Alonso M.A., Forbes G.W. Using rays better. iii. error estimates and illustrative applications in smooth media // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18. P. 1359–1370.
17. Forbes G.W. Using rays better. iv. refraction and reflection // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18. P. 2557–2564.
18. Alonso M.A., Forbes G.W. Stable aggregates of flexible elements link rays and waves // Optics Express. 2002. V. 10. P. 728–739.
19. Forbes G.W., Alonso M.A. The holy grail of optical modelling // International Optical Design Conference 2002, Paul Manhart and Jose Sasian, eds., Proc. SPIE. 2002. V. 4832. P. 186–197.
20. Alonso M.A., Forbes G.W. Stable aggregates of flexible elements link rays and waves // Nonimaging Optics: Maximum Efficiency Light Transfer VII, Roland Winston ed., Proc. SPIE. 2002. V. 5185. P. 125–136.
21. Um J., Thurber C. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing // Bull. Seismol. Soc. Am. 1987. V. 77. № 3. P. 972–986.
22. Moser T.J., Nolet G., Snieder R. Ray bending revisited // Bull. Seismol. Soc. Am. 1992. V. 88. № 1. P. 259–288.
23. Coleman C.J. Point-to-point ionospheric ray tracing by a direct variational method // Radio Sci. 2011. V. 46. № 5. P. 1–7.

24. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы. Т. 2. Методы математической физики. М.: Академия, 2013.
25. *Ахманов С.А., Никитин С.Ю.* Физическая оптика. М.: Изд-во МГУ, 2004.
26. *Белов А.А., Домбровская Ж.О.* Бикompактная разностная схема для уравнений Максвелла в слоистых средах // Докл. АН. 2020. Т. 492. С. 15–19.
27. *Belov A.A., Dombrovskaya Zh.O., Bogolyubov A.N.* A bicomcompact scheme and spectral decomposition method for difference solution of maxwell's equations in layered media // Comput. and Math. with Appl. 2021. V. 96C. P. 178–187.
28. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
29. *Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
30. Polyanskiy M.N. Refractive index database. <https://refractiveindex.info>. Accessed on 2022-02-13.
31. *Gao L., Lemarchand F., Lequime M.* Exploitation of multiple incidences spectrometric measurements for thin film reverse engineering // Opt. Express. 2012. V. 20. № 14. P. 15734–15751.
32. *Ruck G.T., Barrick D.E., Stewart W.D., Kirchbaum C.K.* Radar Cross Section Handbook. Volumes 1 and 2. New York, Plenum Press, 1970.
33. *Pascoe K.J.* Reflectivity and Transmissivity through Layered Lossy Media: A User-Friendly Approach. Technical Report AFIT/EN-TR-01-07. Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 2001.