

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.96

## ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. В. Ф. Чистяков<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> 664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, ИДСТУ СО РАН, Россия

\*e-mail: chist@icc.ru

Поступила в редакцию 31.08.2022 г.

Переработанный вариант 27.11.2022 г.

Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматриваются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с тождественно вырожденной в области определения матрицей при старшей производной искомой вектор-функции и с нагружениями в виде интегральных операторов Вольтерра и Фредгольма. При постановке начальных задач задаются проекторы на допустимые множества начальных векторов. Особое внимание уделено системам при наличии на отрезке интегрирования особых точек. В статье формализовано понятие особой точки. В случае дифференциальных уравнений дана их классификация. Приведен ряд примеров, иллюстрирующих теоретические результаты. Библ. 30.

**Ключевые слова:** дифференциально-алгебраические уравнения, линейные системы, операторы Вольтерра и Фредгольма, пространство решений, размерность, индекс, особые точки.

DOI: 10.31857/S0044466923060066, EDN: TRQOZZ

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\Lambda_k x := \sum_{i=0}^k A_i(t) x^{(i)}(t) = f, \quad t \in T, \quad (1)$$

и соответствующие им системы интегродифференциальных уравнений (ИДУ)

$$(\Lambda_k + \mathcal{V})y := \sum_{i=0}^k A_i(t) y^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^t \mathcal{H}(t,s) y(s) ds = f(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

$$(\Lambda_k + \mathcal{V} + \lambda \Phi)z := \sum_{i=0}^k A_i(t) z^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^t \mathcal{H}(t,s) z(s) ds + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s) y(s) ds = f(t), \quad t \in T, \quad (3)$$

где  $T = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}^1$ ,  $A_i(t)$ ,  $\mathcal{H}(t,s)$ ,  $K(t,s)$  суть  $(n \times m)$ -матрицы, определенные в областях  $T$  и  $T \times T$  соответственно,  $x \equiv x(t)$ ,  $y \equiv y(t)$ ,  $z \equiv z(t)$  — искомые и  $f \equiv f(t)$  — известная вектор-функции соответственно,  $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t)$ ,  $x^{(0)}(t) = x(t)$ ,  $\lambda$  — скалярный параметр (в общем случае комплексный). Ниже предполагается, что входные данные систем (1)–(3) обладают гладкостью, необходимой при проведении рассуждений, и выполнено условие

$$\det A_k(t) = 0 \quad \forall t \in T. \quad (4)$$

При моделировании природных и технических процессов, начиная с 70-х годов прошлого века, встречаются системы, включающие в себя взаимосвязанные ОДУ различных порядков, алгебраические уравнения, интегральные уравнения (ИУ) Вольтерра и Фредгольма I и II рода (см., например, [1–5]). Эту совокупность уравнений можно записать в общем случае в виде систем вида (1)–(3), удовлетворяющих условию (4). Но в общем случае, есть примеры систем (1)–(3), ко-

торые нельзя разделить неособенными преобразованиями на подсистемы ОДУ, алгебраические уравнения и ИУ.

Системы (1), удовлетворяющие условию (4), называют обычно в настоящее время линейными дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) (см., например, [4]). Используются также термины “сингулярные системы” (см. [1]), “дескрипторные системы” (см. [5]), “алгебродифференциальные системы” (АДС) (см. [6]). Системы вида (2), (3) авторы называют вырожденными системами интегродифференциальных уравнений (ИДУ).

Под решениями систем (1)–(3) мы понимаем любые  $k$ -раз дифференцируемые на  $T$  вектор-функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , которые обращают системы в тождество на  $T$  при подстановке.

При изучении систем вида (1)–(3) обычно ставится задача Коши: предполагается, что в начальной точке решения систем удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= (a_0^\top a_1^\top \dots a_{k-1}^\top)^\top, \\ y(\alpha) &= (b_0^\top b_1^\top \dots b_{k-1}^\top)^\top, \quad z(\alpha) = (e_0^\top e_1^\top \dots e_{k-1}^\top)^\top, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $x = (x^\top \dot{x}^\top \dots (x^{(k-1)})^\top)^\top$ ,  $y = (y^\top \dot{y}^\top \dots (y^{(k-1)})^\top)^\top$ ,  $z = (z^\top \dot{z}^\top \dots (z^{(k-1)})^\top)^\top$ ,  $\dot{x}^\top \equiv (d/dt)x^\top$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $e_i$  – заданные векторы из  $\mathbf{R}^n$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ ,  $\top$  – символ транспонирования.

**Замечание 1.** Очевидно, что для существования решений задач Коши для систем (1)–(3) необходимо (но не всегда достаточно) выполнение критерия Кронекера–Капелли в точке  $t = \alpha$  для векторов  $x^{(k)}(\alpha)$ ,  $y^{(k)}(\alpha)$ ,  $z^{(k)}(\alpha)$ , а именно,

$$\begin{aligned} \text{rank } A_k(\alpha) &= \text{rank} \left( A_k(\alpha) | f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{a}_i \right), \quad \text{rank } A_k(\alpha) = \text{rank} \left( A_k(\alpha) | f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{b}_i \right), \\ \text{rank } A_k(\alpha) &= \text{rank} \left( A_k(\alpha) | f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{e}_i - \int_{\alpha}^{\beta} K(\alpha, s) z(s) ds \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\bar{a}_i = A_i(\alpha)a_i$ ,  $\bar{b}_i = A_i(\alpha)b_i$ ,  $\bar{e}_i = A_i(\alpha)e_i$ . Итак, для разрешимости задач Коши необходимо, чтобы начальные векторы  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $e_i$  в формулах (5) принадлежали некоторым линейным многообразиям  $\mathcal{R}_x$ ,  $\mathcal{R}_y$ ,  $\mathcal{R}_z \subset \mathbf{R}^m$ .

Поэтому начальные задачи для систем (1)–(3) ставятся ниже в виде соотношений

$$P_x x(\alpha) = a, \quad P_y y(\alpha) = b, \quad P_z z(\alpha) = e, \quad (7)$$

где  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  суть  $(m \times n)$  – заданные матрицы полного ранга,  $m = kn$ ,  $m \leq m$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $e$  – заданные векторы. Задачи (1)–(3), (7) при  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z = E_m$  совпадают с задачами Коши, где  $E_m$  – единичная матрица размерности  $m$ . Матрицы  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  в формулах (7) выбираются проекторами начальных данных на  $\mathcal{R}_x$ ,  $\mathcal{R}_y$ ,  $\mathcal{R}_z$ . В школе Г.А. Свиридюка условия вида (7) называют условиями Шоуолтера–Сидорова (см. [7]). Для ДАУ в такой форме начальные условия записывал Ю.Е. Бояринцев (см. [8]).

Если вектор-функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  являются решениями и удовлетворяют условиям (7), то они являются решениями задач (1)–(3), (7).

Под особыми точками (ОТ) систем (1)–(3) мы неформально будем понимать любую точку на отрезке  $T$ , при наличии которой система не имеет решений на  $T$ , теряется единственность, меняется размерность многообразия решений и т.д.

Системы (1)–(3) приводимы к нормальной форме (форме Коши) умножением на матрицы  $A_k^{-1}(t)$ ,  $t \in T$ , если  $\det A_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in T$ . При непрерывных входных данных для систем ОДУ (1) в нормальной форме справедлив ряд теорем существования (см., например, [9]), на которых базируются теоремы о разрешимости систем ИДУ (2), (3). При наличии изолированных точек  $t_* \in T$  со свойством  $\det A_k(t_*) = 0$  условия этих теорем нарушаются.

В [9–11] изложены методы исследования систем ОДУ при  $A_k(t) = (t - t_*)^i E_n$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Часто предполагается, что  $t$  – комплексная переменная и  $t_* = 0$ . В ряде работ ОТ указаны в виде усло-

вий  $\det A_k(\alpha) = 0$ ,  $A_k(\alpha) = 0$  (см., например, [12–17]). Большое внимание уделено методам исследования, основанных на введении малого параметра в системы ОДУ или ДАУ с ОТ и построении асимптотических приближений к решениям (см., например, [18], [19]). Точки изменения ранга матрицы  $A_k(t)$  для вырожденных систем ИДУ, в частности, для ДАУ, в отличие от систем с вырождением  $A_k$  в изолированных точках, не всегда совпадают с ОТ, и нужны методики их поиска. Для ДАУ исследования в этом направлении проводились в [2], [6], [20].

Основными задачами настоящей статьи являются: 1) формализация понятия ОТ систем ИДУ и ДАУ и их классификация; 2) изучение влияния ОТ на разрешимость ДАУ.

**Замечание 2.** Для упрощения записи указание зависимости от  $t$  в работе будет иногда опускаться, если это не вызывает путаницы. Используются следующие обозначения: включения  $M(\zeta) \in C(U)$ ,  $M(\zeta) \in C^i(U)$ ,  $i \geq 1$ ,  $M(\zeta) \in C^\infty(U)$ ,  $M(\zeta) \in C^A(U)$ , где  $M(\zeta)$  – некоторая матрица (вектор-функция)  $U = T$ ,  $\zeta = t$  или  $U = T \times T$ ,  $\zeta = (t, s)$ , означают, что все элементы  $M(\zeta)$  являются непрерывными,  $i$ -раз дифференцируемыми, бесконечно-дифференцируемыми, вещественно-аналитическими функциями в  $U$  соответственно.

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Нам потребуются следующие понятия и факты.

**Определение 1** (см., например, [1]). Полуобратной матрицей к  $(m \times n)$ -матрице  $M$ , называется  $(n \times m)$ -матрица  $M^-$ , удовлетворяющая уравнению  $MM^-M = M$ .

Полуобратная матрица определена для любой  $(m \times n)$ -матрицы  $M$ . Если матрица  $M$  квадратная и неособенная, то  $M^{-1} = M^-$ . Матрица  $M^-$  определена в общем случае неединственным образом (ее частным случаем является псевдообратная матрица  $M^+$ ).

Важную роль в статье играет утверждение В. Дозеля (см., например, [21]).

**Лемма 1.** Пусть

- 1)  $(m \times n)$ -матрица  $M(t) \in C^A(T)$ ;
- 2)  $\text{rank } M(t) \leq r$ ,  $t \in T$ .

Тогда существуют  $(m \times m)$ -матрица  $L(t) \in C^A(T)$  и  $(n \times n)$ -матрица  $R(t) \in C^A(T)$  со свойствами  $\det L(t) \det R(t) \neq 0 \ \forall t \in T$ ,  $L(t)M(t)R(t) = \begin{pmatrix} M_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $M_{11}(t)$  –  $(r \times r)$ -блок,  $\det M_{11}(t) \neq 0$  на  $T$ .

Из формулы Лейбница для дифференцирования произведений вытекает формула

$$d_i[MF] = \mathcal{M}_i[M]d_i[F], \quad (8)$$

где  $M \equiv M(t)$ ,  $F \equiv F(t)$  – некоторые матрицы подходящей размерности из  $C^i(T)$ ,

$$d_i[M] = \begin{pmatrix} M \\ (d/dt)M \\ \dots \\ (d/dt)^i M \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_i[M] = \begin{pmatrix} C_0^0 M & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 M^{(1)} & C_1^1 M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_i^0 M^{(i)} & C_i^1 M^{(i-1)} & \dots & C_i^i M \end{pmatrix},$$

$C_i^j = i!/j!(i-j)!$  – биномиальные коэффициенты.

Поставим в соответствие системе (1) эквивалентное ДАУ первого порядка

$$A(t)\dot{x} + B(t)x = \begin{pmatrix} E_v & 0 \\ 0 & A_k(t) \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 0 & -E_v \\ A_0(t) & \tilde{A}(t) \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (9)$$

где  $v = (k-1)n$ ,  $\tilde{A}(t) = (A_1(t) \ A_2(t) \ \dots \ A_{k-1}(t))$ . Следствием известных теорем (см., например, [9, с. 66]) является такое утверждение.

**Теорема 1.** Пусть в системе (1)

$$1) A_i(t), f(t) \in \mathbf{C}(T), i = \overline{0, k};$$

$$2) \det A_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in T.$$

Тогда

1. Система (1) разрешима на  $T$  и все ее решения представимы в виде суммы

$$x(t, c) = X_d(t)c + \psi(t), \quad \psi(t) = Vf = \int_{\alpha}^t K(t, s)f(s)ds, \quad (10)$$

где  $X_d(t)$  есть  $(n \times d)$ -матрица из  $\mathbf{C}^k(T)$ ,  $d = nk$ ,  $\check{X}_{k-1}(t) = d_{k-1}[X_d(t)]$  – фундаментальная матрица системы (9),  $d_{k-1}[\cdot]$  – оператор из формул (8),  $\det \check{X}_{k-1}(t) \neq 0 \quad \forall t \in T$ ,  $K(t, s)$  есть  $(n \times n)$ -матрица,  $\partial^j K(t, s)/\partial t^j|_{t=s} = 0 \quad \forall t \in T, j = \overline{0, k-1}$ ,  $c$  – вектор произвольных постоянных;

2. Существует единственное решение системы (1), проходящее через любую заданную точку  $(x(\vartheta) = a \in \mathbf{R}^m, \vartheta \in T)$ .

**Следствие 1.** Пусть в системах (2), (3)

$$1) A_i(t), f(t) \in \mathbf{C}(T), i = \overline{0, k}, \mathcal{H}(t, s), K(t, s) \in \mathbf{C}(T \times T);$$

$$2) \det A_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in T.$$

Тогда

1. Система (2) разрешима на  $T$  и все ее решения представимы в виде суммы

$$y(t, c) = Y_d(t)c + \hat{\psi}(t), \quad \hat{\psi}(t) = \psi(t) + \hat{V}\psi, \quad \hat{V}\psi = \int_{\alpha}^t \hat{K}(t, s)\psi(s)ds, \quad (11)$$

где  $Y_d(t) = [X_d(t) + \hat{V}X_d] \in \mathbf{C}^k(T)$ ,  $(I + \check{V})^{-1} = I + \hat{V}$ ,  $\check{V} = V \circ \mathcal{V}$ ,  $\det \check{Y}_{k-1}(\alpha) \neq 0$ ,  $\check{Y}_{k-1}(t) = d_{k-1}[Y_d(t)]$ ,  $\hat{K}(t, s)$  есть  $(n \times n)$ -матрица,  $\partial^j \hat{K}(t, s)/\partial t^j|_{t=s} = 0 \quad \forall t \in T, j = \overline{0, k-1}$ ,  $c$  – вектор произвольных постоянных;

2. Существует единственное решение системы (2), проходящее через точку  $y(\alpha) = b$ ;

3. Система (3) разрешима на  $T$  за исключением счетного множества значений параметра  $\lambda$  и все ее решения представимы в виде суммы

$$z(t, c) = Z_d(t)c + \varphi(t), \quad \varphi(t) = \hat{\psi}(t) + \lambda \hat{\Phi}\hat{\psi}, \quad \hat{\Phi}\hat{\psi} = \int_{\alpha}^{\beta} \hat{K}(t, s, \lambda)\hat{\psi}(s)ds, \quad (12)$$

где  $Z_d(t) = [Y_d(t) + \lambda \hat{\Phi}Y_d] \in \mathbf{C}^k(T)$ ,  $(I + \lambda \check{\Phi})^{-1} = I + \lambda \hat{\Phi}$ ,  $\check{\Phi} = \hat{V} \circ \Phi$ ,  $\hat{K}(t, s, \lambda)$  –  $(n \times n)$ -резольвента оператора  $\check{\Phi}$ ,  $c$  – вектор произвольных постоянных;

4. При значениях параметра  $\lambda : |\lambda| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – некоторое малое положительное число, существует единственное решение системы (3), проходящее через точку  $z(\alpha) = e$ .

**Доказательство.** Докажем п. 1 утверждения. Запишем систему (2) в виде равенства  $\Lambda_k y = -\mathcal{V}y + f$ ,  $t \in T$ , из нее согласно формуле (10) получаем систему ИУ Вольтерра II рода  $y + \check{Y}y = X_d(t)c + \psi(t)$ ,  $t \in T$ . Используя формулу обращения  $(I + \check{V})^{-1} = I + \hat{V}$  (см. [22, с. 111]) убеждаемся в справедливости формулы (11).

Докажем п. 2. Система  $\check{X}_{k-1}(\alpha)c = b - \check{\Phi}_{k-1}(\alpha)$ ,  $\check{\Phi}_{k-1}(t) = d_{k-1}[\hat{\psi}(t)]$  однозначно разрешима относительно вектора  $c$ , так как согласно теореме 1 матрица  $\check{Y}_{k-1}(\alpha)$  неособенная, производные матрицы  $\hat{K}(t, s)$  по  $t$  равны нулю на диагонали  $t = s$ .

Докажем п. 3. Запишем систему (3) в виде равенства  $(\Lambda_k + \mathcal{V})z = -\lambda \Phi z + f$ ,  $t \in T$ . Из формулы (11) следует система ИУ Фредгольма II рода  $z + \lambda \check{\Phi}z = Y_d(t)c + \hat{\psi}$ ,  $t \in T$ , разрешая которую получаем формулу (12) (см. [22, с. 120]).

Для доказательства четвертого пункта достаточно заметить, что  $\det \check{Z}_{k-1}(\alpha) \neq 0$ , где  $\check{Z}_{k-1}(t) = d_{k-1}[Z_d(t)]$  при малых  $\lambda$ , так как  $\det \check{Y}_{k-1}(\alpha) \neq 0$ .

**Замечание 3.** Если  $A_i(t), f(t) \in C^A(T), i = \overline{0, k-1}, \mathcal{H}(t, s), K(t, s) \in C^A(T \times T)$ , то в формулах (10)–(12) справедливы включения  $X_d(t), \psi(t), Y_d(t)c, \hat{\psi}(t), Z_d(t), \varphi(t) \in C^A(T), \hat{K}(t, s) \in C^A(T \times T)$ . Любая точка  $t_* \in T$  со свойством  $\det A_k(t_*) = 0$  является особой, и число их конечно на отрезке  $T$ . Других ОТ на отрезке нет.

Более того, найдутся вектор  $a \in \mathbf{R}^m$  и свободный член  $f(t)$  такие, что имеет место неравенство  $\text{rank } A_k(t_*) \neq \text{rank} \left( A_k(t_*) | f(t_*) - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{a}_i \right), \bar{a}_i = A_i(t_*)a_i$ , вследствие которого решение задачи  $\Lambda_k x = f, t \in T, x(t_*) = a$ , не существует на  $T$  (ср. с теоремой 1).

**Замечание 4.** Часть утверждений следствия 1 можно найти в литературе по ИДУ (см., например, [23]), но автор изложил их в удобной для себя форме.

Для ИДУ теряется важное свойство общих решений ОДУ (ср. с теоремой 1).

**Пример 1.** Рассмотрим ИДУ  $\dot{y}(t) + \int_0^t \gamma^2 y(s) ds = 0, t \in T = [0, 1]$ , с условием  $y(\vartheta) = a \in \mathbf{R}^1, \vartheta \in T$ , где  $\gamma$  – вещественный параметр. Общее решение ИДУ здесь имеет вид  $y(t, c) = c \cos(\gamma t), c \in \mathbf{R}^1$ . Начальная задача с условием  $y(0) = a$  имеет единственное решение  $y(t) = a \cos(\gamma t)$ .

Если  $a \neq 0, \vartheta \in (0, 1]$  и  $\vartheta\gamma = \pi/2$ , то исходная задача не имеет на  $T$  решений, так как  $y(\vartheta) = 0$ . В случае  $y(\vartheta) = 0, \vartheta\gamma = \pi/2$  видим, что  $y(t, c) = c \cos(\gamma t)$  при любом  $c$ .

Итак, в отличие от ОДУ решения ИДУ “помнят” отрезок, на котором определены, и при сужениях отрезка  $T_0 \subset T$  решения меняются (или могут не существовать).

### 3. СВЕДЕНИЯ О СВОЙСТВАХ ДАУ БЕЗ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Выделим класс линейных ДАУ без ОТ в области определения.

**Определение 2.** Система (1) имеет решение типа Коши на отрезке  $T$ , если она разрешима для любой вектор-функции  $f(t) \in C^m(T), m = kn$ , и ее решения представимы в виде линейной комбинации

$$x(t, c) = X_d(t)c + \psi(t), \quad (13)$$

где  $X_d(t)$  есть  $(n \times d)$ -матрица из  $C^k(T)$  со свойством  $\text{rank } d_{k-1}[X_d(t)] = d \forall t \in T, c$  – вектор произвольных постоянных,  $\psi(t)$  – вектор-функция со свойством  $\Lambda_k \psi(t) = f(t), t \in T$ , и на любом подотрезке  $[\alpha_0, \beta_0] \subseteq T$  нет решений, отличных от  $x(t, c)$ .

**Замечание 5.** Из работы [24] следует, что для ДАУ (1) с постоянными коэффициентами  $\bar{\Lambda}_k x := \sum_{i=0}^k \bar{A}_i x^{(i)} = f, t \in T$ , параметр  $d = \deg \xi(\lambda) = \deg \det \left[ \sum_{i=0}^k \lambda^i \bar{A}_i \right], 0 \leq d \leq kn$ , где  $\lambda$  – скалярный параметр (возможно комплексный),  $\deg$  – символ степени многочлена. Предполагается, что многочлен  $\xi(\lambda)$  ненулевой. Если  $\xi(\lambda) \equiv 0$ , то  $\dim \ker \bar{\Lambda}_k = \infty$ .

**Замечание 6.** Если ДАУ (1) имеет решение типа Коши, то сохраняются важнейшие свойства линейных систем ОДУ в нормальной форме (форме Коши): 1) множества решений на отрезках  $T$  и  $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$  совпадают (отсутствует “память”); 2) если через заданную точку  $(a \in \mathbf{R}^m, \vartheta \in T)$  проходит решение ДАУ, то оно единственно.

**Определение 3.** Если существуют операторы

$$\Omega_i = \sum_{j=0}^i L_j(t)(d/dt)^j, \quad \Omega_r = \sum_{j=0}^{\bar{r}} R_j(t)(d/dt)^j,$$

где  $L_j(t), R_j(t)$  суть  $(n \times n)$ -матрицы из  $C(T)$ , обладающие свойствами

$$\Omega_i \circ \Lambda_k v = \hat{\Lambda}_k v, \quad \Lambda_k \circ \Omega_{\bar{r}} v = \check{\Lambda}_k v \quad \forall v \equiv v(t) \in C^{v+k}(T),$$

где  $\hat{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \hat{A}_i(t) v^{(i)}$ ,  $\check{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \check{A}_i(t) v^{(i)}$ ,  $v = \{\hat{l} \text{ или } \check{r}\}$ ,  $\hat{A}_i(t), \check{A}_i(t)$  суть  $(n \times n)$ -некоторые матрицы из  $\mathbf{C}(T)$ ,  $\det \hat{A}_k(t) \neq 0$ ,  $\det \check{A}_k(t) \neq 0 \forall t \in T$ , то они называются левым и правым регуляризующими операторами (ЛРО и ПРО) для оператора системы (1), а наименьшие возможные  $\hat{l}, \check{r}$  называются ее индексами (левым и правым). Индексы оператора  $\Lambda_k$ ,  $t \in T$ , где  $\det A_k(t) \neq 0 \forall t \in T$ , полагаются равными нулю.

Далее, нам потребуется сводка результатов из [25, теоремы 1, 2, леммы 4, 5] и [6, леммы 4.1–4.3]. Для аналитических входных данных эти утверждения формулируются в более компактном виде.

**Теорема 2.** Пусть в ДАУ (1)  $A_i(t), f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ ,  $i = \overline{0, k}$ .

Тогда три условия на систему (1) эквивалентны:

- 1) на отрезке  $T$  определено решение типа Коши;
- 2) на отрезке  $T$  определен ЛРО;
- 3) на отрезке  $T$  определен ПРО.

**Теорема 3.** Пусть в ДАУ (1)  $A_i(t), f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ , и левый индекс ДАУ равен  $\hat{l}$ .

Тогда

1. Правый и левый индексы ДАУ равны, и справедливы неравенства  $0 \leq \hat{l} \leq m$ ;
2. В формуле (13)  $X_d(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ , при  $d = 0$  вектор-функция  $\psi(t) = x = \sum_{j=0}^{\hat{l}-1} C_j(t) f^{(j)}(t)$ , иначе

$$\psi(t) = \int_{\alpha}^t K(t, s) f(s) ds + \sum_{j=0}^{\hat{l}-k} C_j(t) f^{(j)}(t), \quad \hat{l} \geq k, \quad \psi(t) = \int_{\alpha}^t K(t, s) f(s) ds, \quad \hat{l} < k, \quad (14)$$

где  $K(t, s), C_j(t)$  суть  $(n \times n)$ -матрицы, причем  $K(t, s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$ ,  $C_j(t) \in \mathbf{C}^A(T)$  и  $\partial^j K(t, s) / \partial t^j|_{t=s} = 0 \forall t \in T, j = \overline{0, k - \hat{l} - 1}$ , если  $\hat{l} < k$ .

**Следствие 2.** Пусть для произведения операторов  $\Lambda_v = \prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}$ ,  $t \in T$ , выполнены условия

- 1) входные данные операторов  $\Lambda_{k_j}$ ,  $t \in T, j = \overline{1, i}$ , принадлежат пространству  $\mathbf{C}^A(T)$ ;
- 2) для оператора произведения  $\Lambda_v$  определен ЛРО.

Тогда для каждого сомножителя  $\Lambda_{k_j}$ ,  $j = \overline{1, i}, t \in T$ , определен свой ЛРО. Более того, если для каждого оператора  $\Lambda_{k_j}$ ,  $j = \overline{1, i}, t \in T$ , определен ЛРО, то для оператора произведения  $\Lambda_v$  определен ЛРО.

**Следствие 3.** Пусть оператор  $\Lambda_{k_1}$ ,  $t \in T$ , является ЛРО для оператора  $\Lambda_{k_2}$ ,  $t \in T$ , с входными данными из пространства  $\mathbf{C}^A(T)$ .

Тогда начальная задача  $\Lambda_{k_1} v = 0, t \in T, v^{(j)}(\alpha) = 0, j = \overline{0, k_1 - 1}$ , имеет на отрезке  $T$  только нулевое решение.

**Следствие 4.** Пусть для каждого оператора  $\Lambda_{k_j}$ ,  $j = \overline{1, i}, t \in T$ , с матрицами и коэффициентами из  $\mathbf{C}^A(T)$  определен ЛРО.

Тогда для их произведения  $\Lambda_v$ ,  $t \in T$ , справедливо равенство  $d_v = \sum_{j=0}^i d_j$ , где  $d_v, d_j$  – размерности ПР операторов  $\Lambda_v$  и  $\Lambda_{k_j}$ ,  $t \in T$ , из формулы (13).

К сожалению, нет пока общей формулы, позволяющей вычислить индекс произведения операторов ДАУ по их индексам. Он может меняться достаточно произвольно, например,

$$[E_n - (d/dt)A_1]^j = E_n - (d/dt)jA_1, \quad [E_n - (d/dt)A_1] \circ [E_n + (d/dt)A_1] = E_n,$$

где  $A_1$  – постоянная матрица со свойством  $A_1^2 = 0$ , оператор  $E_n \pm (d/dt)^j A_1$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , имеет индекс 2. Но имеются исключения из общего правила (см. ниже лемму 2).

**Лемма 2.** Пусть входные данные операторов  $\Lambda_{k_j}, t \in T, j = \overline{1, i}$ , принадлежат пространству  $C^A(T)$ . Тогда

1. Индекс оператора  $\Lambda_{k+j} = (d/dt)^j \Lambda_k, t \in T, j = 1, 2, \dots$ , равен индексу  $\Lambda_k, t \in T$ ;

2. Если индексы сомножителей  $\Lambda_{k_j}, t \in T$ , не превосходят 1, то индекс оператора  $\Lambda_\omega = \prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}, t \in T$ , не превосходит  $i$ .

Доказательство вытекает из теорем 2, 3 и вида формулы обращения (14), в которой при выполнении условия  $\hat{l} \leq k$  отсутствуют операторы  $C_j(t)(d/dt)^j, j \geq 1$ .

Очевидно, что задача (1), (7) разрешима в условиях теоремы 3 тогда и только тогда, когда разрешима система  $\hat{X}_{k-1}(\alpha)c = a - \psi_{k-1}(\alpha)$  (где  $\hat{X}_{k-1}(t) = P_x d_{k-1}[X_d(t)], \psi_{k-1}(t) = P_x d_{k-1}[\psi(t)]$ ) относительно вектора  $c$ . Решение  $x(t) \in C^A(T)$  единственно, если решение  $c$  единственно. Чтобы сформулировать утверждение о разрешимости задачи (1), (7) в терминах входных данных, нам требуется такое понятие.

**Определение 4.** Совокупность самой системы (1) и ее производных до порядка  $i$  включительно:  $d_i[\Lambda_k x - f] = 0, t \in T$ , где  $d_i[\cdot]$  – оператор из формул (8), называется  $i$ -продолженной системой (1).

С учетом формулы (8)  $i$ -продолженную систему из определения 3 запишем в виде равенств

$$D_i[A]x_{i+k} = d_i[f(t)], \quad D_i[A] = \sum_{j=0}^k (O_j \mathcal{M}_i[A_j(t)] \tilde{O}_j), \quad (15)$$

где  $A = (A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0)$ , матрица  $D_i[A]$  имеет размер  $[(i+1)n \times (i+k+1)n]$ , нулевые матрицы  $O_j, \tilde{O}_j$  имеют размеры  $[(i+1)n \times jn], [(i+1)n \times (k-j)n], j = \overline{0, k}$ , соответственно,  $x_{i+k} = d_{i+k}[x]$ . Ниже используются разбиения матрицы из формул (15) на блоки вида  $D_i[A] = (\tilde{B}_i(t) \ \Gamma_i[A(t)])$ , где  $\Gamma_i[A]$  – блочно-треугольная квадратная матрица с блоками  $A_k(t)$  на диагонали.

**Замечание 7.** На разбиении  $D_i[A] = (\tilde{B}_i(t) \ \Gamma_i[A(t)])$  базируется способ вычисления индекса (левого) и матричных коэффициентов ЛРО (см. [2]). При вычислении ПРО для системы (1) нужно решать матричные ДАУ (см. [26]). Поэтому это понятие пока представляет только теоретический интерес.

**Лемма 3.** Начальная задача (1), (17), в условиях теоремы 3 разрешима тогда и только тогда, когда для некоторого вектора  $c \in \mathbf{R}^{nk}$  выполнены соотношения

$$\text{rank } G_{\hat{l}-1} = \text{rank } (G_{\hat{l}-1} | h - g), \quad (16)$$

где  $G_{\hat{l}-1} = \Gamma_{\hat{l}-1}[A]|_{t=\alpha}, h = d_{\hat{l}-1}[f(t)]|_{t=\alpha}, g = B_{\hat{l}-1}(\alpha)[P_x^- a + (E_{nk} - P_x^- P_x)c]$ .

Более того, если вектор  $g$  вычисляется единственным образом, то решение начальной задачи единственно.

**Доказательство.** Рассмотрим задачу Коши, где  $P_x = E_{nk}$ . Формула (16) является необходимым и достаточным условием выполнения равенства  $D_{\hat{l}-1}[A]d_{k+\hat{l}-1}[x] = d_{\hat{l}-1}[f]$  в точке  $t = \alpha$ . Согласно разбиению матрицы  $D_{\hat{l}-1}[A]$  это равенство эквивалентно разрешимости СЛАУ  $G_{\hat{l}-1}\mathcal{X} = h - B_{\hat{l}-1}(\alpha)a, \mathcal{X} = d_{\hat{l}-1}[x^{(k)}]|_{t=\alpha}$ .

Если ввести вектор-функции  $z^{(i)}(t) = (d/dt)^i[\Lambda_k x - f], t \in T, i = \overline{0, \hat{l}-1}$ , то они в силу выше-сказанного удовлетворяют условиям  $z^{(i)}(\alpha) = 0$ . Начальная задача

$$\Omega_{\hat{l}} z = 0, \quad t \in T, \quad z^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = \overline{0, \hat{l}-1},$$

где  $\Omega_{\hat{l}}$  – ЛРО для системы (1), имеет согласно следствию 2 только одно решение  $z \equiv z(t) = [\Lambda_k x - f] = 0$ . ДАУ  $\Lambda_k x = f$  имеет решение типа Коши и СЛАУ  $\hat{X}_{k-1}(\alpha)\chi = a - \hat{\psi}_{k-1}(\alpha)$ , где  $\hat{X}_{k-1}(t) = d_{k-1}[X_d], \hat{\psi}_{k-1}(t) = d_{k-1}[\psi]$ , имеет единственное решение  $\chi$ . Для завершения доказа-

тельства отметим, что согласно (см. [1, с. 33]) все начальные вектора  $x(\alpha)$  принадлежат многообразию  $P_x^- a + (E_2 - P_x^- P_x) c$ , где вектор  $c$  пробегает  $\mathbf{R}^{nk}$ .

**Пример 2.** Рассмотрим начальную задачу

$$\bar{A}_1 x = \bar{A}_1 \dot{x} + \bar{A}_0 x = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 2 + \gamma & 1 \\ 4 + 4\gamma & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} (2 + \gamma)e^t + 5e^{2t} \\ (4 + 4\gamma)e^t + 12e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, 1], \quad (17)$$

$$P_x x(\alpha) = (1 \ 2) x(0) = a = 3.$$

Если  $\gamma \neq 0$ , то индекс ДАУ  $\hat{l} = 1$ , размерность ПР  $d = 1$ , в качестве ЛРО можно принять оператор  $\Omega_1 = \text{diag}\{1, (d/dt)\} L$ ,  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Матрицы и векторы в формуле (16) имеют вид  $G_0 = \bar{A}_1$ ,  $B_0 = \bar{A}_0$ ,  $c = (c_1 \ c_2)^\top \in \mathbf{R}^2$ ,

$$P_x^- a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x) c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 7 + \gamma \\ 16 + 4\gamma \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 3 + 2\gamma \\ 4 + 8\gamma \end{pmatrix} c_2.$$

Из условия равенства рангов (16) следует уравнение  $(1 - 2\gamma)c_2 = 1 - 2\gamma$ ,  $c_2 = 1 \ \forall \gamma \neq 1/2$ . Итак, для любого  $\gamma \neq 1/2$  имеем  $x(0) = P_x^- a + (E_2 - P_x^- P_x) c = (1 \ 1)^\top$ ,  $x = (e^t \ e^{2t})^\top$ .

Если  $\gamma = 1/2$ , то умножением ДАУ (17) на матрицу  $L$  мы выделим алгебраическое уравнение  $(1 \ 2) x = e^t + 2e^{2t}$ ,  $t \in T$ , и начальное условие является его следствием при  $t = 0$ . Начальная задача совместна, но ее решение неединственно.

Если  $\gamma = 0$ , то  $d = 0$ ,  $\hat{l} = 2$ . В формуле (16) матрицы и векторы имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ \bar{A}_0 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = d_1[f(t)]_{t=0}, \quad P_x^- a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x) c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Проделав аналогии выкладок при  $l = 1$ , получим  $c_2 = 1$ ,  $x(0) = (1 \ 1)^\top$ .

#### 4. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ЛИНЕЙНЫХ ДАУ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Введем понятия.

**Определение 5.** Если существует  $(n \times d)$ -матрица  $\tilde{X}_d(t) \in \mathbf{C}^k(T)$  такая, что любой элемент линейного пространства решений (ПР) однородной системы (1) на отрезке  $T$  представим в виде произведения  $\tilde{X}_d(t)c$ , где  $c$  – вектор произвольных постоянных, то будем говорить, что это ПР конечномерно ( $\dim \ker \Lambda_k < \infty$ ). Минимально возможное значение целочисленного параметра  $d$  назовем *размерностью* ПР ДАУ (1).

ПР однородной системы (1) бесконечномерно ( $\dim \ker \Lambda_k = \infty$ ), если оно содержит бесконечное количество линейно независимых решений.

**Определение 6.** Пусть существует оператор  $\tilde{\Omega}_l = \sum_{j=0}^l \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j$ ,  $t \in T$ , где  $\tilde{L}_j(t)$  суть  $(n \times n)$ -матрицы из  $\mathbf{C}(T)$ , со свойствами

- 1) для системы  $\tilde{\Omega}_l u = 0$ ,  $t \in T$ , определен ЛРО;
- 2)  $\Omega_l \circ \Lambda_k v = \tilde{\Lambda}_k v \ \forall v \equiv v(t) \in \mathbf{C}^{l+k}(T)$ , где  $\tilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t)v^{(i)}(t)$ ,  $\det \tilde{A}_k(t) \neq 0$ ,  $t \in T$ ;
- 3) на  $T$  определены изолированные точки  $t_j$ ,  $j = \overline{1, q}$ , в которых  $\det \tilde{A}_k(t_j) = 0$ .

Тогда точки  $t_j$  называются ОТ системы (1).

**Пример 3.** Рассмотрим однородное ДАУ

$$\Lambda_1 x = \begin{pmatrix} \kappa(t-t_1)^i & \xi(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (t_2-t)^j \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, 1], \quad (18)$$

где  $i, j \geq 1$ ,  $t_1, t_2 \in T$ ,  $\kappa \in \mathbf{R}^1$ ,  $\xi(t)$  — функция из  $\mathbf{C}^1(T)$ . В определении 6 можно принять  $\tilde{\Omega}_1 = \text{diag}\{1, (d/dt)\}$ ,  $\det \tilde{A}_1(t) = \kappa(t-t_1)^i(t_2-t)^j$ ,  $t \in T$ . ОТ  $t_* = t_2$  имеет вид разрыва второго рода при любом  $j$ . В ОТ  $t_* = t_1$  в зависимости от  $i$  поведение решений существенно отличается (см., например, [9–11]).

Если  $\kappa = 0$  и ДАУ (18) рассматривается на отрезке  $\tilde{T} = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$ ,  $t_2 \notin \tilde{T}$ , то система имеет решение типа Коши, где  $d = 0$  при  $f_1 \in \mathbf{C}^1(T)$ ,  $f_2 \in \mathbf{C}^2(T)$  независимо от количества точек изменений ранга матрицы  $A_1(t)$  (нулей функции  $\xi(t)$ ).

**Пример 4.** Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_1 x = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T = [-1, 1]. \quad (19)$$

Здесь  $\text{rank } A_1(t) = \text{const} = 1$ ,  $t \in T$ . Умножая ДАУ на матрицу  $L(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$  и выражая  $x_2$  через  $x_1$ , ДАУ расщепляем на дифференциальное и алгебраическое уравнения

$$(\gamma - 2)t\dot{x}_1(t) + 2\gamma x_1(t) = \tilde{f}_1, \quad x_2(t) = \gamma t x_1(t) + \tilde{f}_2, \quad t \in T, \quad (20)$$

где  $\tilde{f}_1 = 2f_1 + tf_1 - \dot{f}_2$ ,  $\tilde{f}_2 = f_2(t) - tf_1(t)$ . При  $\gamma = 2$  существует решение системы (19) типа Коши, где  $d = 0$ , индекс  $l = 2$ .

При  $\gamma \neq 2$  свойства ДАУ качественно меняются. Система имеет ОТ  $t_* = 0$  в смысле определения 6, где  $\tilde{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt) \end{pmatrix} L(t)$ ,  $\tilde{A}_1(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -\gamma t & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det \tilde{A}_1(t) = t(\gamma - 2)$ .

В однородной системе (19) формально  $x_1(t) = c_1 t^{-\mu}$ , где  $\mu = 2\gamma/(\gamma - 2)$ ,  $c_1$  — произвольная константа. При  $\gamma > 2$  имеем  $\mu > 0$ . В этом случае ненулевых решений однородного ДАУ (19) на  $T$  нет,  $d = 0$ . На любом отрезке  $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$ ,  $0 \notin T_0$ , оператор  $\tilde{\Omega}_1$  является ЛРО, существует решение типа Коши, размерность ПР ДАУ (19)  $d = 1$ .

Рассмотрим влияние ОТ на разрешимость ДАУ (19). Для первого уравнения (20) имеем

$$d_i[t\dot{x}_1(t) + \mu x_1(t) - \tilde{f}_1] = \begin{pmatrix} \mu & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu + 1 & t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu + 2 & t & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g \\ g^{(1)} \\ g^{(2)} \\ \dots \end{pmatrix} = 0,$$

где  $g(t) = \tilde{f}_1(t)/(\gamma - 2)$ ,  $i \rightarrow \infty$ . Формально разрешая эту систему как алгебраическую относительно функций  $x_1$ ,  $x_1^{(1)}$ ,  $x_1^{(2)}$ , ..., для решения получим формулу

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i g^{(i)}(t)(-t)^i, \quad v_i = 1/\mu(\mu + 1)(\mu + 2) \dots (\mu + i). \quad (21)$$

Ряд (21) сходится при  $\gamma > 2$  для любой функции  $g(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ .

Иная ситуация при  $\gamma < 2$ . Например, при  $\gamma = 1$  и произвольном свободном члене ДАУ не имеет решений. Необходимо выполнение условия  $g^{(2)}(0) = 0$ , так как здесь  $\mu + 2 = 0$ .

Из равенств (20) следует, что однородная система (19) имеет семейства аналитических решений  $(x_1 \ x_2)^\top = c_1(t^2 \ t^3)^\top$  и семейство неаналитических решений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{X}_2(t)c = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ t\phi_1(t) & t\phi_2(t) \end{pmatrix}c, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,$$

где  $\phi_1(t) = \{0, t \in T_1; t^2, t \in T_2\}$ ,  $\phi_2(t) = \{t^2, t \in T_1; 0, t \in T_2\}$ ,  $T_1 = [-1, 0]$ ,  $T_2 = (0, 1]$ . Здесь (в смысле определения 5) размерность ПР  $d = 2$ . Любая начальная задача  $(x_1(\vartheta) \ x_2(\vartheta))^\top = (a \ \vartheta a)^\top$ ,  $\vartheta \in T$ , имеет бесконечное число решений ДАУ на  $T$ . Например, если  $\vartheta \neq 0$ ,  $\vartheta \in T_1$ , то

$$x_1(t) = \{(a/\vartheta^2)t^2, t \in T_1; c_2t^2, t \in T_2\}, \quad x_2(t) = tx_1(t), \quad t \in T,$$

где  $c_2$  произвольно.

**Теорема 4.** Пусть в системе (1)

1. Матрицы  $A_i(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ ;
2. ПР конечномерно ( $\dim \ker \Lambda_k < \infty$ ).

Тогда для ДАУ (9) существуют  $(m \times m)$ -матрицы  $P(t), Q(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ ,  $m = kn$ , такие, что  $\det P(t)Q(t) \neq 0 \ \forall t \in T$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t)\dot{y} + \tilde{B}(t)y &= P(t)A(t)Q(t)\dot{y} + [P(t)B(t)Q(t) + P(t)A(t)\dot{Q}(t)]y = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{A}_{22}(t) \end{pmatrix}\dot{y} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}(t) & \tilde{B}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{B}_{22}(t) \end{pmatrix}y \quad \forall y(t) \in \mathbf{C}^l(T), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $x(t) = Q(t)y(t)$ ,  $\tilde{A}_{22}(t), \tilde{B}_{22}(t)$  суть  $([m-d] \times [m-d])$  – верхнетреугольные блоки с идентичной блочной структурой, диагональ  $N(t)$  содержит  $l$  квадратных нулевых блоков,  $\det \tilde{A}_{11}(t) \neq 0$ ,  $\det \tilde{B}_{22}(t) \neq 0$  на  $T$ .

**Доказательство.** Если  $\det A \neq 0, t \in T$ , то теорема справедлива. Пусть  $\det A = 0 \ \forall t \in T$ . Тогда согласно лемме 1 существует  $(m \times m)$ -матрица  $L \in \mathbf{C}^A(T)$  такая, что

$$\det L \neq 0 \quad \forall t \in T, \quad L(A\dot{x} + Bx) = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}x, \quad LA = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad LB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где  $([m-r] \times m)$  – блок  $B_2$  имеет полный ранг для любого  $t \in T$ ,  $r = \max\{\text{rank } A, t \in T\}$ , за исключением может быть конечного числа точек.

Если это не так, то  $\text{rank}(A|B) < m \ \forall t \in T$ , и согласно [6, теорема 3.1] имеем  $\dim \ker \Lambda_k = \infty$ . Произведем замену  $x = Ry$ , где  $R \in \mathbf{C}^A(T)$ ,  $\det R \neq 0 \ \forall t \in T$  и

$$B_2R = \begin{pmatrix} 0 & B_{22} \end{pmatrix}, \quad \det B_{22} \neq 0, \quad t \in T.$$

При этом получим равенство

$$L\left(A \frac{d}{dt}(Ry) + BRy\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где  $y = (y_1^\top \ y_2^\top)^\top$ . Если  $\det A_{11} \neq 0$  на  $T$ , то теорема справедлива. В противном случае повторяем рассуждения для системы  $A_{11}\dot{y}_1 + B_{11}y_1 = 0, t \in T$ . За  $l$  шагов такого процесса мы исчерпаем систему, причем  $l \leq r+1$ , так как на каждом шаге к размерности блока  $B_{22}$  будут добавляться размерности блоков  $B_{22}^1, B_{22}^2, \dots, B_{22}^l$ , по меньшей мере, равные единице.

**Следствие 5.** Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда

1. Число точек  $t_j \in T$ ,  $j = \overline{1, q}$  со свойством  $\det \tilde{A}_{11}(t_j) = 0$ ,  $\det \tilde{B}_{22}(t_j) = 0$ ,  $t \in T$ , конечно, и на отрезках  $T_j = [\alpha_j, \beta_j] \subset (t_j, t_{j+1})$ ,  $j = \overline{1, q-1}$ , определены решения типа Коши, где точки  $t_j$  занумерованы по правилу  $t_1 < \dots < t_q$ ;

2. Существует оператор  $\tilde{\Omega}_l$  из определения 6, и равенство  $\det \tilde{A}_k(t_*) = 0$ ,  $t_* \in T$ , выполняется тогда и только тогда, когда справедливо одно из условий:  $\det \tilde{A}_{11}(t_*) = 0$  или  $\det \tilde{B}_{22}(t_*) = 0$ .

**Доказательство.** Докажем п. 1 следствия. В силу аналитичности матриц  $\tilde{A}(t)$ ,  $\tilde{B}(t)$  в формуле (22) число точек  $t_j$  конечно. Выпишем две подсистемы:

$$\dot{y}_1 + J(t)y_1 = \tilde{g}_1, N(t)\dot{y}_2 + y_2 = \tilde{g}_2, \quad t \in T_j, \quad (23)$$

$$J(t) = A_{11}^{-1}(t)\tilde{B}_{11}(t), \quad N(t) = \tilde{B}_{22}^{-1}(t)\tilde{A}_{22}(t), \quad \tilde{g}_1 = A_{11}^{-1}(t)[\tilde{g}_1 - \tilde{A}_{12}(t)\dot{y}_2 - \tilde{B}_{12}(t)y_2], \quad \tilde{g}_2 = \tilde{B}_{22}^{-1}(t)g_2, \\ g = (g_1^\top \ g_2^\top)^\top = P(t)(0^\top \ f^\top(t))^\top. \text{ Тогда решение системы (9) на } T_j \text{ имеет вид}$$

$$x(t, c) = Q(t) \begin{pmatrix} Y(t) \\ 0 \end{pmatrix} c + \int_{\alpha_j}^t Q(t) \begin{pmatrix} Y(t)Y^{-1}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{g}_1(s) ds + Q(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\Lambda}_{\varrho-1} g_2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $y_2(t) = \tilde{\Lambda}_{\varrho-1} \tilde{g}_2 = \tilde{g}_2 + \mathcal{T} \tilde{g}_2 + \dots + \mathcal{T}^{\varrho-1} \tilde{g}_2$ ,  $\mathcal{T} = -N(t)(d/dt)$ ,  $\varrho$  — количество нулевых блоков на диагонали матрицы  $\tilde{B}_{22}(t)$ ,  $Y(t)$  — матрицант первой подсистемы (23),  $c$  — вектор произвольных постоянных. Из неособенности матриц  $Q(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $t \in T_j$ , следует свойство  $\text{rank } Q(t) \begin{pmatrix} Y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = d \forall t \in T_j$ . Интегрируя по частям и приводя подобные в формуле (24), мы получим вектор-функцию  $\psi(t)$  в виде формулы из равенств (11).

Докажем п. 2. Выпишем равенство

$$\omega_0 \circ \Lambda_k v = \tilde{\Lambda}_k v, \quad \omega_0 = \text{diag}\{E_r, (d/dt)E_{n-r}\}L(t), \quad L(t)A_k(t) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где  $\tilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t)v^{(i)}(t)$ ,  $\tilde{A}_k(t) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t) \\ A_{k-1,2}(t) \end{pmatrix}$ ,  $L(t)A_{k-1}(t) = \begin{pmatrix} A_{k-1,1}(t) \\ A_{k-1,2}(t) \end{pmatrix}$ ,  $t \in T$ ,  $L(t)$  — матрица из леммы 1 применительно к матрице  $A_k(t)$ . Размерность ПР оператора  $\omega_0$  равна  $n - r \geq 1$ . Согласно следствию 4 она суммируется на отрезках  $T_j$  с размерностью ПР оператора  $\Lambda_k$ . Если  $\det \tilde{A}_k(t) \equiv 0 \forall t \in T$ , то процесс повторяем, получая оператор  $\omega_1$ . Размерность ПР дифференциального оператора порядка  $k$ , приводимого к нормальной форме, не превышает  $nk$ , и процесс построения операторов  $\omega_i$ ,  $i \geq 0$  завершится за конечное число шагов  $\chi$ . Искомый оператор  $\Omega_\chi = \prod_{i=0}^{\chi-1} \omega_i$ . Согласно формуле (24)  $\chi = \varrho$ .

**Определение 7.** Нули функции  $\det \tilde{A}_{11}(t)$ ,  $t \in T$ , будем называть *дифференциальными* ОТ системы (1), а нули функции  $\det \tilde{B}_{22}(t)$ ,  $t \in T$ , назовем *алгебраическими* ОТ системы (1).

**Следствие 6.** Пусть выполнены условия теоремы 4 и на отрезке  $T$  определена хотя бы одна алгебраическая ОТ. Тогда найдется свободный член  $f(t) \in C^A(T)$ , при котором не существует решений системы (1) на  $T$ .

Доказательство очевидно. Сделаем замечания о влиянии дифференциальных ОТ на разрешимость ДАУ (1). Анонсируем следующий результат.

**Теорема 5.** Пусть

1. Выполнены условия теоремы 4 и на отрезке  $T$  определена хотя бы одна дифференциальная ОТ;
2. Однородное ДАУ (1) имеет нетривиальные решения. Тогда найдется свободный член  $f(t) \in C^A(T)$ , при котором не существует решений системы (1) на  $T$ .

## 5. СВЕДЕНИЯ О СВОЙСТВАХ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ИДУ

Введем для вырожденных систем ИДУ понятие, аналогичное ЛРО для ДАУ.

**Определение 8.** Если существуют операторы

$$\tilde{\Omega}_l = \sum_{j=0}^{\tilde{l}} \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j, \quad \tilde{\Omega}_r = \sum_{j=0}^{\tilde{r}} \tilde{R}_j(t)(d/dt)^j,$$

где  $\tilde{L}_j(t), \tilde{R}_j(t)$  суть  $(n \times n)$ -матрицы из  $\mathbf{C}(T)$ , обладающие свойствами

$$\tilde{\Omega}_l \circ (\Lambda_k + \mathcal{V})v = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})v, \quad (\Lambda_k + \mathcal{V}) \circ \tilde{\Omega}_r v = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})v \quad \forall v \equiv v(t) \in \mathbf{C}^{v+k}(T),$$

где  $(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})v = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t)v^{(i)} + \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t,s)v(s)ds$ ,  $(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})v = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t)v^{(i)} + \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t,s)v(s)ds$ ,  $v = \{\tilde{l} \text{ или } \tilde{r}\}$ ,  $\tilde{A}_i(t), \tilde{K}(t)$  суть  $(n \times n)$ -некоторые матрицы из  $\mathbf{C}(T)$ ,

$$\det \tilde{A}_k(t) \neq 0, \quad \det \tilde{A}_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in T,$$

то они называются левым и правым регуляризирующими операторами (ЛРО и ПРО) для системы (2), а наименьшие возможные  $\tilde{l}, \tilde{r}$  называются ее индексами (левым и правым). Индекс оператора  $\Lambda_k + \mathcal{V}$ ,  $t \in T$ , где  $\det A_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in T$ , полагается равным нулю.

**Пример 5.** Рассмотрим систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + \mathcal{V} + \lambda \Phi)z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \dot{z}(t) + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} z(t) + \int_0^t (t-s)^v \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} z(s)ds + \lambda \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} z(s)ds = f, \\ t \in T = [0, 1],$$

где  $z = (z_1 \ z_2)^T$ ,  $f = (f_1 \ f_2)^T \in \mathbf{C}^{v+2}(T)$ . Здесь в качестве ЛРО в смысле определения 8 можно принять оператор

$$\tilde{\Omega}_{v+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt)^{v+2} \end{pmatrix} L, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПР системы  $\Lambda_1 x = 0$ ,  $t \in T$ , бесконечномерно (в качестве базиса можно взять набор вектор-функций  $\phi_j = (t^j, -t^j)^T$ ,  $j = 0, 1, \dots$ ). ЛРО для оператора  $\Lambda_1$  не существует. Умножим систему ИДУ на матрицу  $L$ . Второе уравнение новой системы имеет вид ИУ

$$\int_0^t (t-s)^v z_2(s)ds + \lambda \int_0^1 z_2(s)ds = g(t), \quad t \in T.$$

ИУ (следовательно, и наша система ИДУ) имеют решения при  $\lambda = 0$  тогда и только тогда, когда  $(d/dt)^j g(t)|_{t=0} = 0$ ,  $g(t) = [f_2(t) - 4f_1(t)]$ ,  $j = \overline{0, v}$ .

Еще сложнее условия разрешимости выглядят при  $\lambda \neq 0$ . Для простоты предположим, что  $v = 0$ . Условие совместности ИУ имеет вид равенства  $\lambda \int_0^1 z_2(s)ds = g(0)$ . Дифференцируя ИУ по  $t$ , получаем  $z_2(t) = \dot{g}(t)$ ,  $t \in T$ . Тогда из условия совместности получим равенства  $\lambda \int_0^1 \dot{g}(s)ds = \lambda[g(1) - g(0)] = g(0)$ . Итак, ИУ разрешимо тогда и только тогда, когда  $(1 + \lambda)g(0) - \lambda g(1) = 0$ . При  $\lambda = 0$  имеем условие  $g(0) = 0$ .

В отличие от ДАУ, существование ЛРО для вырожденной системы ИДУ не гарантирует ее разрешимость при сколь угодно гладких входных данных, причем в общем случае индекс ИДУ не ограничен числом  $m$ , так как  $v$  можно задавать произвольно.

Существование ЛРО для системы  $\Lambda_k x = 0$ ,  $t \in T$ , не гарантирует существование ЛРО для системы ИДУ (2), а следовательно, и для системы ИДУ (3).

**Пример 6.** Рассмотрим вырожденную систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + \gamma \mathcal{V})y = A_1 \dot{y}(t) + A_0 y(t) + \gamma \int_0^t A_1^T y(s)ds = f, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = E_2, \quad t \in T = [0, 1],$$

где  $A_1^2 = 0$ ,  $y = (y_1 \ y_2)^T$ ,  $f = (f_1 \ f_2)^T \in \mathbf{C}^2(T)$ . Для ДАУ  $\Lambda_1 x = 0$ ,  $t \in T$ , в качестве ЛРО можно принять оператор  $\Omega_2 = A_1(d/dt)^2 - A_0(d/dt)$ . Если  $\gamma \neq 1$ , то индекс системы ИДУ  $\tilde{l} = 2$ . В качестве

ЛРО можно принять оператор  $\tilde{\Omega}_2 = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \omega$ ,  $\omega = \text{diag}\{1, (d/dt)\}$ . В определении 8  $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma - 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Решение

$$y = \left( y_1(t), f_2(t) - \gamma \int_0^t y_1(s) ds \right)^\top,$$

где  $y_1(t) = [f_1(t) - \dot{f}_2(t)]/(1 - \gamma)$ , существует при любой  $f \in \mathbf{C}^2(T)$  и единственно (ср. с примером 5). При  $\gamma = 1$  индекс не определен и ПР системы  $(\Lambda_1 + \gamma V)y = 0$ ,  $t \in T$ , бесконечномерно. В качестве базиса можно принять  $\phi_j(t) = (-jt^{j-1} \ t^j)^\top$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Для совместности системы ИДУ необходимо выполнение условия  $f_1(t) - \dot{f}_2(t) = 0$ ,  $t \in T$ .

С учетом формул (8), (15) для системы ИДУ (2) по аналогии с определением 4 запишем  $i$ -продолженную систему  $d_i[(\Lambda_k + {}^V V)y - f] = 0$ ,  $t \in T$ , в виде равенства

$$\tilde{D}_i[A, \mathcal{K}]y_{i+k} + \int_\alpha^t d_i[\mathcal{K}(t, s)]y(s)ds = d_i[f(t)], \quad \tilde{D}_i[A, \mathcal{K}] = D_i[A] + \sum_{j=1}^i \mathcal{M}_i[Q_{j-1}]\mathcal{E}_{-j}, \quad (25)$$

где  $\mathcal{E}_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n(i+1-j)} & 0 \end{pmatrix}$ , нулевые блоки в матрице  $\mathcal{E}_{-j}$  уравнивают размеры слагаемых матриц,  $Q_{j-1} \equiv Q_{j-1}(t) = \partial^{j-1} \mathcal{K}(t, s) / \partial t^{j-1} \Big|_{t=s}$ .

Укажем условия, когда существование ЛРО для системы  $\Lambda_k x = 0$ ,  $t \in T$ , гарантирует существование ЛРО для системы ИДУ и рассмотрим этот класс систем.

**Теорема 6.** Пусть в системах (2), (3)

- 1)  $A_i(t)$ ,  $f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ ,  $i = \overline{0, k}$ ,  $\mathcal{K}(t, s)$ ,  $K(t, s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$ ;
- 2) для ДАУ  $\Lambda_k x = 0$ ,  $t \in T$ , определен ЛРО  $\Omega_1$  со свойством  $1 \leq k$ .

Тогда

1. Система (2) разрешима на  $T$  и все ее решения представимы в виде суммы

$$y(t, c) = Y_d(t)c + \hat{\psi}(t), \quad \hat{\psi}(t) = \psi(t) + \hat{V}\psi, \quad \hat{V}\psi = \int_\alpha^t \hat{K}(t, s)\psi(s)ds, \quad (26)$$

где  $Y_d(t) = [X_d(t) + \hat{V}X_d] \in \mathbf{C}^k(T)$ ,  $(I + \tilde{V})^{-1} = I + \hat{V}$ ,  $\tilde{V} = C_0(t)V + V \circ V$ ,  $C_0(t)$ ,  $V$  — матрица и интегральный оператор из теоремы 3, матрица  $C_0(t) \equiv 0$ , если  $1 < k$ ,  $\det \tilde{Y}_{k-1}(\alpha) \neq 0$ ,  $\tilde{Y}_{k-1}(t) = d_{k-1}[Y_d(t)]$ ,  $\hat{K}(t, s)$  есть  $(n \times n)$ -матрица,  $\partial^j \hat{K}(t, s) / \partial t^j \Big|_{t=s} = 0 \ \forall t \in T$ ,  $j = \overline{0, k-1}$ ,  $c$  — вектор произвольных постоянных;

2. Система (3) разрешима на  $T$  за исключением счетного множества значений параметра  $\lambda$  и все ее решения представимы в виде суммы

$$z(t, c) = Z_d(t)c + \varphi(t), \quad \varphi(t) = \hat{\psi}(t) + \lambda \hat{\Phi} \hat{\psi}, \quad \hat{\Phi} \hat{\psi} = \int_\alpha^\beta \hat{K}(t, s, \lambda) \hat{\psi}(s)ds, \quad (27)$$

где  $Z_d(t) = [Y_d(t) + \lambda \hat{\Phi} Y_d] \in \mathbf{C}^k(T)$ ,  $(I + \lambda \hat{\Phi})^{-1} = I + \lambda \hat{\Phi}$ ,  $\hat{\Phi} = \hat{C}_0(t)\Phi + \hat{V} \circ \Phi$ ,  $\hat{C}_0(t)$ ,  $\hat{V}$  — матрица и интегральный оператор из п. 1 теоремы,  $\hat{K}(t, s, \lambda)$  есть  $(n \times n)$ -резольвента оператора  $\hat{\Phi}$ ,  $c$  — вектор произвольных постоянных;

3. ОТ систем (1)–(3) совпадают на  $T$ .

**Доказательство.** Докажем п. 1 утверждения теоремы. Запишем систему (2) в виде равенства  $\Lambda_k y = -{}^V V y + f$ ,  $t \in T$ , из которого согласно формуле (10) получаем систему ИУ Вольтерра II рода  $y + \tilde{V}y = X_d(t)c + \psi(t)$ ,  $t \in T$ . Используя формулу обращения  $(I + \tilde{V})^{-1} = I + \hat{V}$  (см. [22, с. 111]) убеждаемся в справедливости формулы (26).

Докажем п. 2. Запишем систему (3) в виде равенства  $(\Lambda_k + \mathcal{V})z = -\lambda\Phi z + f, t \in T$ . Из формулы (26) следует система ИУ Фредгольма II рода  $z + \lambda\Phi z = Y_d(t)c + \hat{\psi}, t \in T$ , разрешая которую получаем формулу (27) (см. [22, с. 120]).

Третий пункт утверждения доказывается прямым вычислением. При действии на любую из систем (1)–(3) оператором  $\Omega_1$  мы получаем систему с одинаковой матрицей при старшей производной искомой вектор-функции. Теорема 6 доказана.

Некоторые свойства частных случаев вырожденных систем ИДУ (3) описаны в [25–28]. Приведем простейший критерий выполнения условий теоремы 6.

**Теорема 7.** Пусть в ДАУ (1) матрицы  $A_i(t) \in \mathbf{C}^A(T), i = \overline{0, k}$ , и выполнены условия

$$1) \mathbf{r}[A_k(t)] = \max\{\text{rank } A_k(t), t \in T\} = r_k < n, \mathbf{r}[(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\dots|A_{k-j}(t))] = r_k, 1 \leq j \leq k-1;$$

$$2) \text{ в многочлене } \xi(t; \lambda) = \det[\lambda A_k(t) + A_{k-j-1}(t)] = \mathbf{a}_0(t)\lambda^{\varrho} + \dots, \text{ степень } \varrho = r_k.$$

Тогда

1. Если  $\mathbf{a}_0(t) \neq 0 \forall t \in T$ , то  $\text{rank } A_k(t) = \text{const}$  на  $T$ , ДАУ (1) имеет индекс  $l = j$ , причем размерность ПР  $d = (k-j)n + r_k j$  (верно и обратное);

2. Любая точка  $t_* \in T$  со свойством  $\mathbf{a}_0(t_*) = 0$  является ОТ;

3. Если  $\text{rank}(A_k(t)|A_{k-1}(t)) = n \forall t \in T$ , то на  $T$  отсутствуют алгебраические ОТ.

**Доказательство.** Для произвольного регулярного пучка постоянных матриц  $\lambda A + B$ ,  $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$ , справедливо неравенство  $\text{rank } A \geq \deg \det(\lambda A + B)$ , так как существуют неособенные матрицы  $P, Q$  со свойством  $P(\lambda A + B)Q = \text{diag}\{\lambda E_d + J, \lambda N + E_{n-d}\}$ , где  $\det(\lambda N + E_{n-d}) = 1 \forall \lambda$ .

Тогда из условия 2) теоремы следует равенство  $\varrho = r_k = \text{const} \forall t \in T$ . Следовательно, мы можем выбрать матрицы  $L(t), R(t)$  из леммы 1 таким образом, что в равенстве

$$L(t)[\lambda A_k(t) + A_{k-j-1}(t)]R(t) = \begin{pmatrix} \lambda A_{k,11}(t) & \lambda A_{k,12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{k-j-1,11}(t) & A_{k-j-1,12}(t) \\ 0 & A_{k-j-1,22}(t) \end{pmatrix}$$

$\det A_{k,11}(t) \neq 0, \det A_{k-j-1,22} \neq 0 \forall t \in T$ . Все нули функции  $\mathbf{a}_0(t), t \in T$ , совпадают с нулями определителей  $\det A_{k,11}(t), \det A_{k-j-1,22}, t \in T$ . В произведении  $L(t)(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\dots|A_{k-j}(t))$  последние  $n - r_k$  строк нулевые, иначе  $\text{rank}(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\dots|A_{k-j}(t)) > r_k$  и можно принять, что ЛРО  $\Omega_j = \text{diag}\{E_{r_k}, (d/dt)^j E_{n-r_k}\}L(t)$ . Из следствия 4 получаем формулу для размерности ПР  $d = nk - (n - r_k)j$ .

Из вышесказанного следует справедливость п. 2 утверждения теоремы. Элементарно проверяется, что п. 3 утверждения верен, так как в теореме 4 на первом шаге процесса получаем  $\det \tilde{A}_{11}(t) \not\equiv 0, \tilde{A}_{22}(t) \equiv 0, t \in T, \det \tilde{B}_{22}(t) \neq 0 \forall t \in T$ .

**Пример 7.** Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_2 x = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} -2t^2 & t \\ -2t^3 & t^2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = f, \quad t \in T = [-1, 1], \quad (28)$$

где  $\mathbf{r}[A_2(t)] = 1, \mathbf{r}[(A_2(t)|A_1(t))] = 1, \xi(t; \lambda) = \det[\lambda A_2(t) + A_0(t)] = t(\gamma - 2)\lambda + \dots$ . Согласно теореме 7 ДАУ (28) имеет ОТ  $t_* = 0$ , если  $\gamma \neq 2$ . Точка является особой также в смысле определения 6, где

$$\tilde{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt)^2 \end{pmatrix} L(t), \quad L(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -\gamma t & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{A}_2(t) = t(\gamma - 2).$$

## 6. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Продemonстрируем на примере возможные эффекты наличия ОТ в области определения, влияющие на вычислительные процессы при решении ДАУ.

**Пример 8.** Рассмотрим задачу Коши для ДАУ и соответствующую неявную разностную схему (РС) Эйлера

$$\Lambda_1 x = A_1(t)\dot{x} + A_0(t)x = f(t), \quad x(\alpha) = a, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} t\zeta(t) & \zeta(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$A_1(t_{i+1})\frac{v_{i+1} - v_i}{\tau} + A_0(t_{i+1})v_{i+1} = f(t_{i+1}), \quad v_0 = a,$$

где  $t \in T$ ,  $x = (x_1 \ x_2)^\top$ ,  $f = (f_1 \ f_2)^\top$ ,  $a$  – заданный вектор,  $\zeta(t)$ ,  $\delta(t)$  – заданные функции из  $C^1(T)$ ,  $w(t) = \zeta(t) - \delta(t) \neq 0 \ \forall t \in T$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\tau = (\beta - \alpha)/n$ ,  $t_i = \alpha + i\tau$ . Пусть  $f \in C^2(T)$ . Второе уравнение ДАУ (29) перепишем в виде равенства  $x_2 = -tx_1 + f_2$ ,  $t \in T$ . Подставляя выражение для  $x_2$  в первое уравнение ДАУ, получим формулу

$$x = \tilde{\Lambda}_1 f = \frac{1}{w(t)} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & w(t) \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} 0 & -\zeta(t) \\ 0 & t\zeta(t) \end{pmatrix} \dot{f} \right], \quad t \in T.$$

Несмотря на произвольные изменения ранга матрицы  $A_1(t)$ , для ДАУ определен ЛРО. Можно принять, что  $\Omega_2 = (d/dt)\tilde{\Lambda}_1$ . Если  $w(t) = 0 \ \forall t \in T$ , то  $\dim \ker \Lambda_1 = \infty$ , вектор-функции  $\phi_j = (-t^j \ t^{j+1})^\top$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , образуют базис в ПР. Изолированная точка  $t_* \in T$ :  $w(t_*) = 0$  является алгебраической ОТ.

Аналогично, в РС (29)  $v_{2,i} = -t_i v_{1,i} + f_{2,i}$ , где  $v_i = (v_{1,i} \ v_{2,i})^\top$ . Подставляя выражение для  $v_{2,i}$  в первое разностное уравнение, получим формулы

$$v_{1,i+1} = \frac{\zeta_{i+1}}{\delta_{i+1}} v_{1,i} + \frac{1}{\delta_{i+1}} \left[ f_{1,i+1} - \zeta_{i+1} \frac{f_{2,i+1} - f_{2,i}}{\tau} \right], \quad v_{2,i+1} = -t_{i+1} v_{1,i+1} + f_{2,i+1},$$

где  $f_i = f(t_i)$ ,  $\zeta_i = \zeta(t_i)$ ,  $\delta_i = \delta(t_i)$ . Если выполнены равенство  $a = x(\alpha)$  и неравенство  $|\zeta(t)/\delta(t)| < 1$ , то справедлива оценка  $\|v_i - x(t_i)\| = O(\tau)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , где  $\|\cdot\|$  – произвольная норма в  $\mathbf{R}^2$ . В случае, когда  $|\zeta(t)/\delta(t)| > 1$ ,  $t \in [\alpha_0, \beta_0] \subseteq T$ , справедливо соотношение  $\|v_i - x(t_i)\| \rightarrow \infty$ ,  $t_i \in [\alpha_0, \beta_0]$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Если  $w(t) \neq 0 \ \forall t \in T$ , и  $\delta(t_*) = 0$ ,  $t_* \in T$ , то по поведению векторов  $v_i$ ,  $t_i \rightarrow t_*$ , точку  $t_*$  ошибочно можно принять за ОТ.

Отметим еще один момент. Если выполнены соотношения  $w(t) = 0$ ,  $\zeta(t) \neq 0 \ \forall t \in T$  и  $f_1(t) \neq \zeta(t)f_2(t)$ , то ДАУ (29) не имеет решений. Но решения РС  $v_i$  определены и ограничены при любом  $i$ . И наоборот, при  $\delta(t) = 0 \ \forall t \in T$  решение ДАУ (29) существует и единственно, но найдется свободный член  $f(t)$ , когда  $v_i$  не существуют для любого  $i$ .

Для численных расчетов использовался метод эрмитовой сплайн-коллокации. На отрезке  $T$  задается сетка  $\{t_i = \alpha + i\tau, i = 0, 1, \dots, n-1, \tau = (\beta - \alpha)/n\}$ . На отрезке  $[t_0, t_1]$  приближенное решение ДАУ (1) с начальными данными  $a = (a_0^\top \ a_1^\top \ \dots \ a_{k-1}^\top)^\top$  ищется в виде многочлена  $\mu_{k+q}(t) = \mu_{k-1}(t) + \mu_{k,q}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t-t_j)^j/j! + \sum_{j=k}^{k+q} c_j(t-t_j)^j/j!$ , где векторы  $c_j$  являются искомыми, и формируются выражения

$$D_q[A(t)]d_k[\mu_{k,q}(t)] = M_{k,q}(t)C, \quad D_q[A(t)]d_k[\mu_{k-1}(t)] = M_{0,k}(t)a, \quad \xi_q(t) = d_q[f(t)], \quad (30)$$

где  $C = (c_k^\top \ c_{k+1}^\top \ \dots \ c_{k+q}^\top)^\top$ . Вычисляем выражения из формул (30) в точке  $\bar{t} \in (t_0, t_1]$  и формируем систему алгебраических уравнений

$$M_{k,q}(\bar{t})C = -M_{0,k}(\bar{t})a + \xi_q(\bar{t})$$

размерности  $n(q+1)$ . Если ее решение  $C$  существует, то многочлен  $\mu_{k+q}(t)$  удовлетворяет в точке  $\bar{t}$  системе  $D_q[A(t)]d_{k+q}[x] = d_q[f]$ . Решая эту систему, находим новые вектора  $a_j = [\mu_{k+q}(t)]^{(j)}|_{t=t_i}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , и повторяем вычисления на отрезке  $[t_1, t_2]$  и т.д. Число  $q$  рекомендуется выбирать по правилу  $q = l-1$  либо  $q = 1$ , где  $l$  – индекс ДАУ. Особенностью этого метода является выпол-

нение равенства  $x(\bar{t}) = \mu_{k+q}(\bar{t})$ ,  $x(t) = \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t) f^{(j)}(t)$ , если ДАУ индекса  $l$  имеет нулевое ПР (см. теорему 3). Иначе говоря, решение ДАУ находится точно (независимо от шага сетки). Известно, что от численного процесса, описываемого формулами (30), можно перейти к (РС) (см. [29]). Тогда для ДАУ первого порядка РС при  $q = 0$  совпадает с неявным методом Эйлера.

При тестовых расчетах применялись схемы при  $q = 0, 1$ . Решалась задача Коши для ДАУ (19) с решением  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, t \in T_1 = [-1, 0]; \begin{pmatrix} e^t + c_2 t^2 \\ e^{2t} + c_2 t^3 \end{pmatrix}, t \in T_2(0, 1] \right\}$ . Решению соответствуют начальные данные  $(x_1(-1) \ x_2(-1))^T = (1/e \ 1/e^2)^T$  и свободный член  $(f_1; f_2) = (2e^{2t} + e^t(\gamma - 2t); e^{2t}(2t + 1) - 2t^2 e^t)$ , где  $c_2$  – произвольное число, если  $\gamma = 1$ , и  $c_2 = 0$ , если  $\gamma = 2$ . Задавалась сетка  $t_i = -1 + i\tau$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\tau = 2/n$ , где число узлов  $n$  варьировалось от 10 до 10 000.

При  $\gamma = 2$ ,  $q = 0$  РС сходилась с эмпирической оценкой  $O(\tau)$ . Метод при  $q = 1$  выдавал результаты на уровне ошибок округления. Если узел сетки при  $\gamma = 1$ ,  $q = 0$  совпадал с ОТ  $t = 0$ , то происходил авост. В обратном случае получали решение с эмпирической оценкой  $O(\tau)$ . Метод при  $\gamma = 1$ ,  $q = 1$  независимо от расположения узлов сетки демонстрировал сходимость на отрезке  $T_1$  с оценкой  $O(\tau^2)$  с переходом на какую-то другую ветку решения в узлах  $t_i > 0$ .

При  $\gamma = 1$  проводились расчеты для однородной системы с начальными данными  $x_1(-1) = 1$ ,  $x_2(-1) = -1$ . Здесь  $x_1(t) = \{t^2, t \in T_1, x_1(t) = c_2 t^2, t \in T_2\}$ ,  $x_2(t) = t x_1(t)$ , где  $t \in T$ . Если узел сетки схемы при  $q = 0$  совпадал с ОТ, то происходил авост. В обратном случае метод сходил к скорости  $O(\tau)$  к аналитическому решению  $(x_1 \ x_2) = (t^2 \ t^3)$ ,  $t \in T$ . В случае схемы при  $q = 1$  авоста не происходило, даже если узел сетки совпадал с особой точкой, и наблюдался численный процесс, аналогичный численному процессу при решении неоднородной системы. Ряд похожих эффектов влияния ОТ при численном решении ОДУ (в основном в нелинейном случае) описан в [30].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
2. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1996.
3. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006.
4. Lamour R., Marz R., Tischendorf C. Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Description: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH Co. KG, Germany, 2013.
5. Белов А.А. Дескрипторные системы и задачи управления / ред. А.А. Белов, А.П. Курдюков. М.: Физматлит, 2015. 270 с.
6. Бояринцев Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / ред. Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. Новосибирск: Наука, 1998.
7. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем. 2010. Т. 3. № 1. С. 104–125.
8. Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М. Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Вопросы прикладной математики. Иркутск: Изд. СЭИ СО АН СССР, 1975. С. 140–152.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
10. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 2-е изд., дополненное. М.: Наука, 1966.
12. Сидоров Н.А., Дрегла А.И. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части и неклассическими начальными условиями. В кн: Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз., 183, ВИНТИ РАН, М., 2020 С. 120–129.
13. Sidorov N.A. A study of the continuous solutions of the Cauchy problem in the neighborhood of a branch point // Sov. Math. (Iz. VUZ). 1976. V. 20. № 9. P. 77–87.

14. *Maerz R., Weinmuller E.B.* Solvability of Boundary Value Problems for Systems of Singular Differential-Algebraic Equations // *SIAM J. Math. Anal.* 1993. V. 24. № 1. P. 200–215.  
<https://doi.org/10.1137/0524012>
15. *Gorbunov V.K., Gorobetz A., Sviridov V.* The method of normal splines for linear implicit differential equations of second order // *Lobachevskii J. Math.* 2005. V. 20. P. 59–75.
16. *Marz R., Rianza R.* Linear differential-algebraic equations with properly stated leading term: Regular points // *J. Math. Anal. Appl.* 2006. V. 323. № 2. P. 1279–1299.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.038>
17. *Estevez Schwarz D., Lamour R.* Diagnosis of singular points of structured DAEs using automatic differentiation // *Numer. Algorithm.* 2014. V. 69. № 4. P. 667–691.  
<https://doi.org/10.1007/s11075-014-9919-8>
18. *Lomov S.A.* Introduction to the General Theory of Singular Perturbations. MONOGRAPHS, V. 112 i. Am. Math. Soc. 1992.
19. *Samoilenko A.M., Samusenko P.F.* Asymptotic integration of singularly perturbed differential algebraic equations with turning points. Part I // *Ukrains'kyi Mat. Zh.* Vol. 2020. V. 72. № 12. P. 1669–1681.  
<https://doi.org/10.37863/umzh.v72i12.6261>
20. *Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.* Evaluation of the Index and Singular Points of Linear Differential-Algebraic Equations of Higher Order // *J. Math. Sci.* 2018. V. 231. Iss. 6. P. 827–845.
21. *Silverman L.M., Bucy R.S.* Generalizations of theorem of Dolezal // *Math. System Theory.* 1970. V. 4. P. 334–339.
22. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М: Наука, 1975.
23. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. 2-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2002. 160 с.
24. *Лузин Н.Н.* К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений // *Автомат. и телемех.* 1940. № 5. С. 4–66.
25. *Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.* Linear Differential-Algebraic Equations Perturbed by Volterra Integral Operators // *Different. Equat.* 2017. V. 53. № 10. P. 1274–1287.
26. *Щеглова А.А.* Исследование и решение вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью замен переменных // *Сиб. матем. журн.* 1995. V. 36. № 6. P. 1435–1445.
27. *Chistyakova E.V., Chistyakov V.F.* Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // *Appl. Numer. Math.* 2020. V. 149. P. 43–51.
28. *Chistyakov V.F.* Improved Estimates of the Effect of Perturbations on the Solutions of Linear Differential-Algebraic Equations // *Different. Equat.* 2019. V. 55. P. 279–282.
29. *Булатов М.В., Чистяков В.Ф.* Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2002. Т. 42. № 4. С. 459–470.
30. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Численное интегрирование задач Коши с особыми точками. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2020. 076. 36 с.