
ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.615

ТЕОРИЯ p -РЕГУЛЯРНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ
НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ¹⁾

© 2023 г. Ю. Г. Евтушенко^{1,2,*}, Б. Медак⁴, А. А. Третьяков^{1,3,4,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский переулок, 9,
Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия

³ 01-447 Warsaw, Newelska, 6, System Res. Inst., Polish Acad. Sciences, Poland

⁴ 08-110 Siedlce, Siedlce University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Poland

*e-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**e-mail: prof.tretyakov@gmail.com

Поступила в редакцию 12.12.2022 г.
Переработанный вариант 12.12.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

В статье рассматривается проблема существования решения краевой задачи, непрерывно зависящего от граничных условий. Ранее такой факт был известен только для задачи Коши и является классическим в теории дифференциальных уравнений. В работе удалось обосновать аналогичную ситуацию и для краевых задач при наличии свойства p -регулярности задачи. В общем случае этот факт, вообще говоря, неверен. В данной работе доказывается несколько теорем о неявной функции в случае вырождения, что является развитием теории p -регулярности в направлении решения проблем существования решения нелинейных дифференциальных уравнений. Как иллюстрация полученных результатов, приводится пример классической краевой задачи — вырожденного уравнения Ван дер Поля и доказывается существование решения, непрерывно зависящего от граничных условий возмущенной задачи. Библ. 9.

Ключевые слова: вырожденность, p -регулярность, краевая задача, непрерывная зависимость решения, p -фактор оператор.

DOI: 10.31857/S0044466923060078, EDN: TUDVWN

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения от граничных условий — сложная проблема в различных областях математики. Изучение вопроса существования решений в вырожденных задачах — типичная тема исследований, так как вырожденность тесно связана с нелинейностью (см., например, [1]). В случае вырождения характерной является ситуация, когда существует многообразие решений и поэтому построение хотя бы одного решения является существенным. Более того, важно доказать существование непрерывного решения соответствующей проблемы, а тем более построить это решение. В настоящей статье мы решаем эту проблему, используя аппарат теории p -регулярности (p -фактор анализ), описание и представление о котором можно найти, например, в [1–3]. Отметим, что в регулярном случае для исследования такого рода проблем часто используется теорема о неявной функции. В вырожденном (нерегулярном) случае классическая теорема о неявной функции не может быть применена. Результаты, полученные в данной статье, базируются на конструкциях теории p -регулярности и обобщениях теоремы о неявной функции для нерегулярных отображений, которые можно найти, например, в [2], [4], [5]. Далее мы дадим строгое определение и понятие конструкций этой теории. Главным в обосновании наших результатов является аналог теоремы Люстерника, который мы сформулируем в следующем виде.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-71-30005).

Теорема 1. Пусть $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$, $F : X \times M \rightarrow Z$, где M – конечномерное евклидово пространство, X, Z – банаховы пространства. Пусть отображения $f_i(x, \mu)$, $i = 1, \dots, p$, определены в (8). Предположим, что $F(x^*, \mu^*) = 0$ для всех $\bar{\mu} \in M$, $\|\bar{\mu}\| = 1$, элемент $(0, \bar{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)$ и F – сильно p -регулярно на каждом элементе $(0, \bar{\mu})$, $\bar{\mu} \in M$, т.е.

$$\|\{f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[0, \bar{\mu}] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[0, \bar{\mu}]^{p-1}\}^{-1}\| \leq C. \quad (1)$$

(Здесь $\{\cdot\}^{-1}$ означает правый обратный оператор.)

Тогда существует непрерывное отображение $x = x(\mu)$, $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, где $V_\varepsilon(\mu^*)$ – окрестность μ^* , $x(\mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon > 0$, достаточно малое такое, что $F(x(\mu), \mu) = 0$ и

$$x(\mu) = x^* + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu - \mu^*\|), \quad (2)$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \leq C \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu)\|_{Z_k}^{1/k} \quad \forall \mu \in V_\varepsilon(\mu^*). \quad (3)$$

При доказательстве этой теоремы применим теорему Майкла о селекторе (см. [6]) в несколько модифицированной форме.

Теорема 2. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A \in L(X, Y)$ и $A : X \xrightarrow{on} Y$. Тогда существует непрерывное отображение $M : Y \rightarrow X$ такое, что $AM(y) = y$ и $\|M(y)\| \leq c\|y\|$, где $c > 0$ – константа, независимая от y .

В качестве иллюстрации наших результатов рассмотрим краевую задачу вырожденного нелинейного уравнения Ван дер Поля $\ddot{x} + \sigma(x^2 - 1)\dot{x} + x + x^p = 0$, $x(0) = v$, $x(2\pi) = 0$, где $\sigma = 0$ или

$$F(x) = x'' + x + x^2 = 0, \quad x(0) = v, \quad x(2\pi) = \rho, \quad (4)$$

где v и ρ – малые параметры из $U(v^*, \rho^*) = U(0, 0)$, $v^* = 0, \rho^* = 0$, $p = 2$. Покажем, что для любых h_v, h_ρ таких, что $h_v \neq h_\rho$, отображение F является 2-регулярным на элементе $H = [0, h_v, h_\rho]$. Таким образом, исходя из теоремы 1, можно заключить, что существует непрерывное решение (4), зависящее от параметров $\mu = (v, \rho)$ для $h_v \neq h_\rho$, при этом для $h_v = h_\rho$ отображение F является 2-регулярным на элементе $H = [\sin t, h_v, h_\rho]$. Отсюда следует, что, исходя из нашей теоремы, непрерывное решение уравнения (4), зависящее от параметра μ , существует для всех достаточно малых μ .

1. ОБОБЩЕННАЯ p -ФАКТОР ТЕОРЕМА ЛЮСТЕРНИКА И ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ p -ГО ПОРЯДКА

Аппарат p -регулярности является важным инструментом исследования нелинейных задач. В данном разделе будут представлены некоторые определения, обозначения и теоремы теории p -регулярности, которые будут использованы ниже (см. [1–5], [7]).

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x, \mu) = 0, \quad (5)$$

где отображение $F : X \times M \rightarrow Z$, а X, M и Z являются банаховыми пространствами.

Предположим, что в некоторой точке $(x^*, \mu^*) \in X \times M$, $\text{Im } F'(x^*, \mu^*) \neq Z$. Пусть

$$Z = Z_1 \oplus \dots \oplus Z_p, \quad (6)$$

где $Z_1 = \text{cl}(\text{Im } F'(x^*, \mu^*))$ и $W_1 = Z$. В качестве W_2 берем замкнутое дополнение к Z_1 в Z . Пусть $P_{W_2} : Z \rightarrow W_2$ – проектор на W_2 вдоль Z_1 . Определим Z_2 как замыкание линейной оболочки образа квадрата квадратичного отображения $P_{W_2} F''(x^*, \mu^*)[\cdot, \cdot]^2$. Далее, индуктивно,

$$Z_i = \text{cl}(\text{span } \text{Im } P_{W_i} F^{(i)}(x^*, \mu^*)[\cdot, \cdot]^i) \subseteq W_i, \quad i = 2, \dots, p-1, \quad (7)$$

где W_i — замкнутое дополнение к $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$, до пространства Z и $P_{W_i} : Z \rightarrow W_i$ проектор на W_i вдоль $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$. Наконец, $Z_p = W_p$. Порядок p — это минимальное число (если оно существует), для которого выполняется представление (6). Далее обозначим $\varphi^{(0)} = \varphi$ для любого отображения φ .

Определим следующее отображение:

$$f_i : U \subset X \times M \rightarrow Z_i, \quad f_i(x, \mu) = P_{Z_i} F(x, \mu), \quad i = 1, \dots, p, \quad (8)$$

где $P_{Z_i} : Z \rightarrow Z_i$ — оператор проектирования на Z_i вдоль $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1} \oplus Z_{i+1} \oplus \dots \oplus Z_p$. Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(x, \mu) = f_1(x, \mu) + \dots + f_p(x, \mu) \quad (9)$$

или

$$F(x, \mu) = (f_1(x, \mu), \dots, f_p(x, \mu)). \quad (10)$$

Пусть $h = [h_x, h_\mu]$, $h_x \in X$, $h_\mu \in M$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h) : X \times M \rightarrow Z$, определенный как

$$\Psi_p(h) = f'_1(x^*, \mu^*) + f''_2(x^*, \mu^*)[h] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1} \quad (11)$$

и такой, что

$$\Psi_p(h)[x, \mu] = f'_1(x^*, \mu^*)[x, \mu] + f''_2(x^*, \mu^*)[h][x, \mu] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}[x, \mu] \quad (12)$$

называется p -фактор оператором.

Определение 2. Будем говорить, что F абсолютно вырождено на (x^*, μ^*) до порядка p , если $F^{(i)}(x^*, \mu^*) = 0$, $i = 1, \dots, p-1$.

Замечание 1. В случае абсолютной вырожденности p -фактор оператор сводится к

$$F^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}.$$

Замечание 2. Для каждого отображения f_i , имеем (см. [1], с. 145)

$$f_i^{(k)}(x^*, \mu^*) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, i-1, \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (13)$$

Замечание 3. Каждое отображение $f_i^{(k)}(x^*, \mu^*)$ будет абсолютно вырождено и

$$f_i^{(i)}(x^*, \mu^*)[h]^{i-1} = P_{Z_i} F^{(i)}(x^*, \mu^*)[h]^{i-1}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (14)$$

Это означает, что f_i является i -фактор оператором, соответствующим абсолютно вырожденному отображению f_i до порядка i . Поэтому общий случай вырожденности F может быть сведен к изучению абсолютной вырожденности отображений f_i , $i = 1, \dots, p$, и их композиций.

Определение 3. p -ядро оператора $\Psi_p(h)$ есть множество

$$H_p(x^*, \mu^*) = \text{Ker}^p \Psi_p(h) = \{h \in X \times M : f'_1(x^*, \mu^*)[h] + f''_2(x^*, \mu^*)[h]^2 + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^p = 0\}.$$

Отметим, что имеет место следующее соотношение:

$$\text{Ker}^p \Psi_p(h) = \left\{ \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}^i f_i^{(i)}(x^*, \mu^*) \right\},$$

p -ядро оператора $F^{(p)}(x^*, \mu^*)$, в случае абсолютной вырожденности есть множество

$$\text{Ker}^p F^{(p)}(x^*, \mu^*) = \{h \in X \times M : F^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^p = 0\}.$$

Определение 4. Отображение F называется p -регулярным в точке (x^*, μ^*) на h ($p > 1$), если $\text{Im } \Psi_p(h) = Z$ (т.е. оператор $\Psi_p(h)$ сюръективен).

Определение 5. Отображение F называется p -регулярным в точке (x^*, μ^*) ($p > 1$), если либо оно является p -регулярным вдоль каждого $h \in H_p(x^*, \mu^*) \setminus \{0\}$, либо $H_p(x^*, \mu^*) = \{0\}$.

Определение 6. Пусть $F : X \times M \rightarrow Z = Z_1 \oplus \dots \oplus Z_p$. Отображение $F(x, \mu)$ называется сильно p -регулярным в точке (x^*, μ^*) , если существуют $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\sup_{h \in H_\gamma} \|\{\Psi_p(h)\}^{-1}\| \leq c < \infty,$$

где

$$H_\gamma = \{h = (h_x, h_\mu) \in X \times M : \|f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[h]^k\|_{Z_k} \leq \gamma, \forall k = 1, \dots, p, \|h\|_{X \times M} = 1\}.$$

Определим множество решений для отображения F как множество

$$S = S(x^*, \mu^*) = \{x \in X \times M : F(x, \mu) = F(x^*, \mu^*) = 0\} \quad (15)$$

и пусть $T_{(x^*, \mu^*)}S$ обозначает касательный конус к множеству S в точке (x^*, μ^*) , т.е.

$$T_{(x^*, \mu^*)}S = \{h \in X \times M : (x^*, \mu^*) + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in S, \|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon), \varepsilon \in [0, \delta], \delta > 0\}. \quad (16)$$

Следующие теоремы описывают касательный конус к множеству решений уравнения (5) в случае p -регулярности.

Теорема 3. Пусть X , M и Z — банаховы пространства, и пусть отображение $F \in C^p(X \times M, Z)$ является p -регулярным на $(x^*, \mu^*) \in X \times M$ вдоль h . Тогда $h \in T_{(x^*, \mu^*)}S$.

Теорема 4 (обобщенная теорема Люстерника, [1]). Пусть X , M и Z — банаховы пространства, и пусть отображение $F \in C^p(X \times M, Z)$ является p -регулярным на $(x^*, \mu^*) \in X \times M$. Тогда

$$T_{(x^*, \mu^*)}S = H_p(x^*, \mu^*). \quad (17)$$

При доказательстве теоремы 1, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. Пусть $F : X \times M \rightarrow Z$, где X , M , Z — банаховы пространства, $z = z_1 + \dots + z_p$, $z_i \in Z_i$, $i = 1, \dots, p$, $\|h\| = 1$ и

$$\|\{\alpha_1 f_1'(x^*) + \alpha_2 f_2'(x^*)[h] + \dots + \alpha_p f_p^{(p)}(x^*)[h]^{p-1}\}^{-1}\| = C < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| \{\alpha_1 f_1'(x^*) + \alpha_2 f_2'(x^*)[th] + \dots + \alpha_p f_p^{(p)}(x^*)[th]^{p-1}\}^{-1}(z_1 + \dots + z_p) \right\| \leq \\ & \leq C \left(\frac{1}{\alpha_1} \|z_1\| + \frac{1}{\alpha_2 t} \|z_2\| + \dots + \frac{1}{\alpha_p t^{p-1}} \|z_p\| \right), \end{aligned}$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, p$, $t \neq 0$.

Следующая лемма будет иметь важное значение для исследования суръективности p -фактор оператора в нашем примере.

Лемма 2. Предположим, что $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где Y_1 , Y_2 — замкнутые подпространства в Y , $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\text{Im } A = Y_1$. Пусть также P_2 является проекцией на Y_2 вдоль Y_1 . Тогда $(A + P_2 B)X = Y \Leftrightarrow (P_2 B) \text{Ker } A = Y_2$.

Эта лемма является следствием следующей леммы.

Лемма 3. Предположим, что $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где Y_1, Y_2 — замкнутые подпространства в Y , $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A_1 X \subset Y_1$, $A_2 X \subset Y_2$. Тогда $(A_1 + A_2)X = Y$, если $A_1 \text{ Ker } A_2 = Y_1$ и $A_2 \text{ Ker } A_1 = Y_2$.

Доказательство очевидно. Лемма 2 следует из леммы 3, если положить $A_1 = A$ и $A_2 = P_2 B$.

Некоторые обобщения теоремы о неявной функции на теорему о неявной функции p -порядка для нерегулярных отображений и теорему о неявной функции p -порядка для нетривиального ядра можно найти в [8].

При доказательстве теоремы 1 используется теорема о многозначном сжимающем отображении (см. [9]).

2. НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЮСТЕРНИКА О КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ

В этом разделе мы докажем теорему 1, которая является аналогом и обобщением теоремы Люстерника о касательном конусе, и в которой говорится о существовании непрерывного решения уравнения $F(x, \mu) = 0$.

Замечание 4. Элемент $\mu - \mu^*$ играет роль $\bar{\mu}$ в теореме 1.

Доказательство (теоремы 1). Любой элемент $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$ можно представить как $\mu^* + t\bar{\mu}$, где $t \in [0, \delta]$ и $\delta > 0$ достаточно мало. Отсюда необходимо найти решение уравнения

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0,$$

где $\tilde{\mu} \in V_\varepsilon(0)$, $\bar{\mu} \in M$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : C(V_\varepsilon(0)) \times V_\varepsilon(0) \rightarrow 2^{X \times M}$, определяемое по формуле

$$\Phi(x, \tilde{\mu}) = (x, \tilde{\mu}) - \{\Psi_p(h)\}^{-1} F(x^* + x, \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}), \quad (18)$$

где

$$h = (0, t\bar{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)$$

и p -фактор оператор $\Psi_p(h) : X \times M \rightarrow Z$ представлен в форме

$$\Psi_p(h) = f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[h] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}.$$

Отметим, что обратный оператор многозначного отображения имеет вид

$$\{\Psi_p(h)\}^{-1}(z) = \{[\xi, \eta] \in X \times M : f_1'(x^*, \mu^*)[\xi, \eta] + f_2''(x^*, \mu^*)[h][\xi, \eta] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}[\xi, \eta] = z\},$$

где $z = z_1 + \dots + z_p$ или $z = (z_1, \dots, z_p)$, $z_i \in Z_i$, $i = 1, \dots, p$.

“Норма” этого оператора:

$$\|\{\Psi_p(h)\}^{-1}\| = \sup_{\|z\|=1} \inf \{\|(x, \mu)\| : \Psi_p(h)[x, \mu] = z\}.$$

Покажем, что существует элемент $(x, \tilde{\mu})$ такой, что

$$\|(x, \tilde{\mu})\| = \|x\| + \|\tilde{\mu}\| = o\|(t\bar{\mu})\|$$

и $(x, \tilde{\mu}) \in \Phi(x, \tilde{\mu})$, т.е. $(x, \tilde{\mu})$ — неподвижная точка отображения Φ . Тогда

$$(0, 0) \in \{-\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1} F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\}.$$

Следовательно, получим

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0$$

и $\|(x(t\bar{\mu}), \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\| = o(t)$.

Сначала, докажем, что

$$\text{dist}((0, 0), \Phi(0, 0)) = \|\Phi(0, 0)\| \leq ct^2 = O(t^2) = o(t).$$

Имеем

$$\Phi(0,0) = -\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1} F(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}),$$

$$\Phi(0,0) = -\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1} (f_1(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) + f_2(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) + \dots + f_p(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}))$$

и

$$\|\Phi(0,0)\| = \left\| -\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1} (f_1(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) + f_2(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) + \dots + f_p(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})) \right\|.$$

По лемме 1 получаем

$$\|\Phi(0,0)\| \leq \|c(f_1(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}))\| + \frac{c}{t} \|f_2(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\| + \dots + \frac{c}{t^{p-1}} \|f_p(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\|. \quad (19)$$

Применив формулу Тейлора к выражениям $f_i(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})$ при $i = 1, \dots, p$, получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi(0,0)\| &\leq c \left\| f_1(x^*, \mu^*) + f_1'(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}] + O_Z(t^2) \right\| + \\ &+ \frac{c}{t} \left\| f_2(x^*, \mu^*) + f_2'(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}] + \frac{1}{2!} f_2''(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}]^2 + O_Z(t^3) \right\| + \dots \\ &\dots + \frac{c}{t^{p-1}} \left\| f_p(x^*, \mu^*) + f_p'(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}] + \dots + \frac{1}{p!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}]^p + O_Z(t^{p+1}) \right\|. \end{aligned}$$

Поэтому, исходя из соотношений (13), можно оценить

$$\|\Phi(0,0)\| \leq ct^2 + \frac{c}{t} t^3 + \dots + \frac{c}{t^{p-1}} t^{p+1} = pct^2 \quad (20)$$

и

$$\|\Phi(0,0)\| = O(t^2) = o(t). \quad (21)$$

Теперь покажем, что для любого $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in V_{O(t^2)}(0,0)$, справедлива следующая оценка:

$$\text{dist}_H(\Phi(x_1, \mu_1), \Phi(x_2, \mu_2)) \leq \theta \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|, \quad (22)$$

где $0 < \theta < 1$.

Сначала заметим, что

$$\Psi_p(th)\Phi(x_1, \mu_1) = \Psi_p(th)(x_1, \mu_1) - F((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) \quad (23)$$

и

$$\Psi_p(th)\Phi(x_2, \mu_2) = \Psi_p(th)(x_2, \mu_2) - F((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)). \quad (24)$$

Пусть $(z_1, \xi_1) \in \Phi(x_1, \mu_1)$, $(z_2, \xi_2) \in \Phi(x_2, \mu_2)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(\Phi(x_1, \mu_1), \Phi(x_2, \mu_2)) &= \inf \{ \|(z_1, \xi_1) - (z_2, \xi_2)\| : (z_i, \xi_i) \in \Phi(x_i, \mu_i), i = 1, 2 \} = \\ &= \inf \{ \|(z_1, \xi_1) - (z_2, \xi_2)\| : \Psi_p(th)((z_1, \xi_1) - (z_2, \xi_2)) = \Psi_p(th)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - \\ &- [F((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - F((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))] \} = \inf \{ \|(z, \xi)\| : \Psi_p(th)(z, \xi) = \\ &= \Psi_p(th)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - [F((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - F((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))] \} = \\ &= \inf \left\{ \|(z, \xi)\| : \Psi_p(th)(z, \xi) = \Psi_p(th)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\sum_{i=1}^p (f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))) \right] \Bigg\} = \\
& = \inf \left\{ \left\| \Psi_p(th) \right\|^{-1} \left[f_1'((x^*, \mu^*))((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) + \sum_{i=2}^p f_i^{(i)}((x^*, \mu^*)) [th]^{i-1} ((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left[\sum_{i=1}^p (f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))) \right] \right] \right\} = \\
& = \inf \left\{ \left\| \Psi_p(th) \right\|^{-1} \left[\left[f_1'((x^*, \mu^*))((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - (f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))) \right] + \sum_{i=2}^p \left[f_i^{(i)}((x^*, \mu^*)) [th]^{i-1} ((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))) \right] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

По лемме 1, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
& \text{dist}_H(\Phi(x_1, \mu_1), \Phi(x_2, \mu_2)) \leq c \|f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - \\
& - f_1'((x^*, \mu^*))((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\| + \frac{c}{t} \|f_2((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_2((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - \\
& - f_2'[th](x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\| + \dots + \frac{c}{t^{p-1}} \|f_p((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_p((x^*, \mu^*) + \\
& + th + (x_2, \mu_2)) - f_p^{(p)}[th]^{p-1}(x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\| = A_1 + A_2 + \dots + A_p,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= c \|f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - f_1'((x^*, \mu^*))((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\|, \\
A_2 &= \frac{c}{t} \|f_2((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_2((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - f_2'[th](x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\|, \\
&\vdots \\
A_p &= \frac{c}{t^{p-1}} \|f_p((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_p((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - \\
&\quad - f_p^{(p)}[th]^{p-1}(x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\|.
\end{aligned}$$

К компоненте A_1 применим теорему о среднем значении, а затем формулу Тейлора к выражению $f_1'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]$. Получаем

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq c \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_1'((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))) - f_1'(x^*, \mu^*)\| \times \\
&\times \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = c \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_1'(x^*, \mu^*) + O_Z(t) - f_1'(x^*, \mu^*)\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = \\
&= c \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|O_Z(t)\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| \leq cc_1 t \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = k_1 t \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|,
\end{aligned}$$

где $k_1 M_1$. Положим $\theta_1 = k_1 t$, где $t \in (0, \delta)$, δ достаточно мало и тогда

$$A_1 \leq \theta_1 \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|.$$

К компоненте A_2 применим теорему о среднем значении, а затем формулу Тейлора к выражению $f_2'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]$. Получаем

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_2'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] - f_2''(x^*, \mu^*)[th]\| \times \\ &\times \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_2'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]\| + \\ &+ O_Z(t^2) - f_2''(x^*)[th]\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_2'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[th] + \\ &+ f_2''(x^*, \mu^*)[(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]\| + O_Z(t^2) - f_2''(x^*, \mu^*)[th]\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|. \end{aligned}$$

Поскольку $f_2'(x^*, \mu^*) = 0$ (см. (13)), получаем

$$A_2 \leq \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_2''(x^*, \mu^*)[(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]\| + O_Z(t^2) \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|,$$

следовательно,

$$A_2 \leq \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} (\|f_2''(x^*, \mu^*)[(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]\| + \|O_Z(t^2)\|) \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|.$$

И, наконец, принимая во внимание, что порядок выражения $f_2''(x^*, \mu^*)[(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]$ есть t^2 , порядок выражения $O_Z(t^2)$ есть t^2 и свойства нормы, заключаем, что

$$A_2 \leq \frac{c}{t} (d_1 t^2 + d_2 t^2) \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| \leq 2k_2 t \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|,$$

где $k_2 = \max\{cd_1, cd_2\}$. Можно положить $\theta_2 = 2k_2 t$, и тогда

$$A_2 \leq \theta_2 \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|,$$

где $t \in (0, \delta)$, $\delta > 0$, достаточно мало.

Аналогично, оценим теперь компоненту A_p , используя теорему о среднем значении и разложении выражения $f_p'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]$ по формуле Тейлора.

Итак, отметим, что

$$\begin{aligned} A_p &\leq \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left\| f_p'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th]^{p-1} \right\| \times \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|. \end{aligned} \quad (25)$$

По формуле Тейлора получаем:

$$\begin{aligned} f_p'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] &= f_p'(x^*, \mu^*) + f_p''(x^*, \mu^*)[th + (x_2, \mu_2) + \\ &+ \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] + \dots + \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]^{p-1} + O_Z(t^p). \end{aligned}$$

Согласно (13), отображение $f_p^{(i)}(x^*, \mu^*) = 0$, $i = 1, 2, \dots, p-1$. Поэтому

$$\begin{aligned} A_p &\leq \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left\| \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]^{p-1} + O_Z(t^p) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th]^{p-1} \right\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left\| \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th]^{p-1} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*) [th]^{p-2} [(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] + \\ + O_Z(t^p) - \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*) [th]^{p-1} \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|,$$

т.е.

$$A_p \leq \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left\| \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*) [th]^{p-2} [(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] + O_Z(t^p) \right\| \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|.$$

Согласно свойствам нормы, получаем

$$A_p \leq \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left(\left\| \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*) [th]^{p-2} [(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] \right\| + \left\| O_Z(t^p) \right\| \right) \times \\ \times \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|.$$

Поскольку $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in V_{O(t^2)}(0, 0)$, то

$$A_p \leq \frac{c}{t^{p-1}} (\bar{d}_1 t^{p-2+2} + \bar{d}_2 t^p) \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\| \leq 2k_p t \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\| = \theta_p \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|,$$

где $k_2 = \max\{c\bar{d}_1, c\bar{d}_2\}$, $t \in (0, \delta)$, $\delta > 0$, достаточно мало и $\theta_p = 2k_p t$.

Подставляя $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p = \bar{c}t$, $\bar{c} > 0$, получаем

$$\text{dist}_H(\Phi(x_1, \mu_1), \Phi(x_2, \mu_2)) \leq \theta \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|, \quad (26)$$

и $0 < \theta < 1$.

Покажем, что согласно принципу многозначных сжимающих отображений, будет

$$\varrho((0, 0), \Phi(0, 0)) = \left\| \Phi(0, 0) \right\| < (1 - \theta)\varepsilon,$$

где $\theta = \bar{c}t$, $\varepsilon = 4pct^2$, для t достаточно малых.

Можно положить $0 < \theta = \bar{c}t < \frac{1}{2}$. Это неравенство эквивалентно $1 < 2(1 - \bar{c}t)$. Отсюда и из неравенства $\left\| \Phi(0, 0) \right\| \leq pct^2$, получаем

$$\left\| \Phi(0, 0) \right\| \leq pct^2 \leq 2p(1 - \bar{c}t)ct^2 < (1 - \bar{c}t)4pct^2 = (1 - \theta)\varepsilon,$$

что и следовало доказать.

Таким образом, мы доказали, что отображение Φ является сжимающим на множестве $V((0, 0), ct^2)$. Из принципа многозначных сжимающих отображений следует, что для $(z_0, \mu_0) = (0, 0)$ существует элемент $(x, \tilde{\mu})$ такой, что

$$\left\| (x, \tilde{\mu}) \right\| \leq \frac{2}{1 - \theta} \left\| \Phi(0, 0) \right\| \leq ct^2, \quad (27)$$

т.е. $\left\| (x, \tilde{\mu}) \right\| = o(t)$ и $(x, \tilde{\mu}) \in \Phi(x, \tilde{\mu})$. Отсюда $(x, \tilde{\mu})$ — неподвижная точка отображения Φ . Тогда

$$(0, 0) \in \{-\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1} F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\}.$$

Следовательно, получаем

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0 \quad (28)$$

и $\left\| (x(t\bar{\mu}), \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) \right\| = o(t)$.

Итак, было показано, что для параметра $\mu^* + t\bar{\mu}$ имеется решение $(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))$ уравнения $F(x, \mu) = 0$, т.е.

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0.$$

Теперь, без ограничения общности, можно предположить, что множество M совпадает с $\mathbb{R}^2$. Тогда, для любого достаточно малого элемента μ из $\mathbb{R}^2$ существует $\bar{\mu}(\mu)$ такое, что

$$\|\bar{\mu}(\mu) - \mu\| = o(\mu) \quad (29)$$

и, как было показано выше,

$$F(x^* + x(\bar{\mu}(\mu)), \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \tilde{\mu}(\bar{\mu}(\mu))) = 0. \quad (30)$$

Отметим важный момент. Вернемся к μ . Согласно допущению, мы полагаем $\mu = \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \tilde{\mu}(\bar{\mu}(\mu))$ и, обозначив $x^* + x(\bar{\mu}(\mu))$ через $x(\mu)$, получаем уравнение

$$F(x(\mu), \mu) = 0. \quad (31)$$

Данное равенство выполняется, поскольку мы взяли любой $\bar{\mu}$ из $\mathbb{R}^2$ и доказали, что (28) выполняется для любого $\bar{\mu}$. Следовательно, исходя из вышесказанного, для любого μ из $\mathbb{R}^2$ существует $\bar{\mu}(\mu)$ такое, что сжимающий процесс начинается в точке $(0, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))$, генерирует решение (30) и в конце концов (31).

На этом закончим первую часть доказательства (мы доказали существование решения).

Пусть U — достаточно малая окрестность (x^*, μ^*) .

Возьмем $\mu^* + t\bar{\mu}$, где $t > 0$ достаточно мало, и положим

$$h = \frac{(0, t\bar{\mu})}{\|t\bar{\mu}\|} = (0, \bar{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*),$$

где $\|\bar{\mu}\| = 1$. Тогда для любого $k \leq p$

$$f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, \bar{\mu}]^k = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Мы показали, что в уравнении (19)

$$\|\Phi(0, 0)\| \leq \|c(f_1(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}))\| + \frac{c}{t} \|f_2(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\| + \dots + \frac{c}{t^{p-1}} \|f_p(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\| \quad (32)$$

или

$$\|\Phi(0, 0)\| \leq c \sum_{k=1}^p \left\| \frac{f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})}{t^{k-1}} \right\|. \quad (33)$$

Для $\mu^* + t\bar{\mu}$ имеем

$$\|x(\mu^* + t\bar{\mu}) - x^*\| \leq \|x(\mu^* + t\bar{\mu}) - x^*, t\bar{\mu}\| \leq C \|\Phi(0, 0)\|. \quad (34)$$

Отметим, что выполняется следующее неравенство:

$$\|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\| \leq C_k \|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\|^{1/k} \|(0, t\bar{\mu})\|^{k-1} \quad (35)$$

или

$$\|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\|^{k-1} \leq C_k^k \|(0, t\bar{\mu})\|^{k(k-1)}. \quad (36)$$

Это верно, поскольку из разложения по формуле Тейлора и соотношения (13), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| f_k(x^*, \mu^*) + f_k'(x^*, \mu^*)[0, t\bar{\mu}] + \dots + \frac{1}{(k-1)!} f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, t\bar{\mu}]^k + O(t^{k+1}) - f_k(x^*, \mu^*) \right\|^{k-1} = \\ & = \left\| \frac{1}{(k-1)!} f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, t\bar{\mu}]^k + O(t^{k+1}) \right\|^{k-1} \leq C t^{k(k-1)} = C \|(0, t\bar{\mu})\|^{k(k-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (35) выполнено.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \|x(\mu^* + t\bar{\mu}) - x^*\| &\leq C \|\Phi(0, 0)\| \leq Cc \sum_{k=1}^p \left\| \frac{f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})}{t^{k-1}} \right\| \leq \\ &\leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \frac{\|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\|^{1/k}}{\|t^{k-1}\|} \|(0, t\bar{\mu})\|^{k-1} \end{aligned}$$

или

$$\|x(\mu^* + t\bar{\mu}) - x^*\| \leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\|^{1/k}, \quad (37)$$

так как $f_k(x^*, \mu^*) = 0$.

Затем, из (37) для любого достаточно малого μ существует $\bar{\mu}(\mu)$ такое, что

$$\|x(\mu^* + \bar{\mu}(\mu)) - x^*\| \leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))\|^{1/k}.$$

Отсюда получаем

$$\|x(\mu) - x^*\| \leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))\|^{1/k} \leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \tilde{\mu}(\mu))\|^{1/k} = \bar{\bar{C}} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu)\|^{1/k},$$

где

$$\mu = \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \tilde{\mu}(\mu). \quad (38)$$

Мы воспользовались тем фактом, что

$$\|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))\| \leq 2 \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \tilde{\mu}(\mu))\| = 2 \|f_k(x^*, \mu)\|, \quad (39)$$

поскольку

$$\|\tilde{\mu}(\mu)\| = o\left(\sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))\|^{1/k}\right),$$

где μ — достаточно мало.

Таким образом, мы доказали, что (3) выполнено. Из этого следует, что (2) верно для $\omega(\mu) = x(\mu) - x^*$ и $\|\omega(\mu)\| = o(\mu - \mu^*)$.

Последний этап доказательства, а именно непрерывность $x(\mu)$, следует из модифицированной формы теоремы Майкла о селекторе теоремы 2. Следовательно, многозначное отображение $\Phi : C(V_\epsilon(0)) \times V_\epsilon(0) \rightarrow 2^{X \times M}$, определенное в (18) по формуле

$$\Phi(x, \tilde{\mu}) = (x, \tilde{\mu}) - \{\Psi_p(h)\}^{-1} F(x^* + x, \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}),$$

дает непрерывный селектор, т.е. можно выбрать непрерывное решение $(x(t\bar{\mu}), \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))$ отображения F . Из непрерывности функции $x(t\bar{\mu})$ следует непрерывность функции $x(\mu)$.

На этом доказательство теоремы заканчивается.

Замечание 5. Если предположить, что пространства $X \times M$ и Z конечномерны, то можно доказать существование непрерывной функции $x(\mu)$, рассмотрев следующий сжимающий процесс:

$$(x_{k+1}, \tilde{\mu}_{k+1}) = (x_k, \tilde{\mu}_k) - \{\Psi_p(h)\}_R^{-1} F(x^* + x_k, \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}_k), \quad (40)$$

где $\{\Psi_p(h)\}_R^{-1} z = (x_z, \mu_z)$ — правый обратный оператор и

$$\|(x_z, \mu_z)\| = \min_{\Psi_p(h)(x, \mu) = z} \|(x, \mu)\|. \quad (41)$$

Такой процесс будет сходиться к непрерывному отображению $x(t\bar{\mu})$.

Аналогично, можно доказать две следующие теоремы.

Теорема 5 (теорема о неявной функции для нетривиального ядра). Пусть $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$, $F : X \times M \rightarrow Z$, где M — конечномерное пространство, X, Z — банаховы пространства. Предположим, что $F(x^*, \mu^*) = 0$ и $\forall \mu \in M$, $\|\mu\| = 1$; $(0, \mu) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)$, т.е.

$$\| \{f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[0, \mu] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[0, \mu]^{p-1}\}^{-1} \| \leq C. \quad (42)$$

Тогда существует отображение $x = x(\mu)$, $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $x(\mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon > 0$, достаточно малое такое, что $F(x(\mu), \mu) = 0$ и

$$x(\mu) = x^* + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu - \mu^*\|), \quad (43)$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \leq C \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu)\|_{Z_k}^{1/k} \quad \forall \mu \in V_\varepsilon(\mu^*). \quad (44)$$

Теорема 6. Пусть $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$, $F : X \times M \rightarrow Z$, где M — конечномерное пространство, X, Z — банаховы пространства. Пусть для $h_\mu \neq 0$, $h_\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$ существует $\bar{h}_x \in X$, $\|\bar{h}_x\| \leq c < \infty$ такое, что F является p -регулярным вдоль $\bar{h} = [\bar{h}_x, \bar{h}_\mu]$, т.е.

$$\begin{aligned} & \| \{f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[\bar{h}] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[\bar{h}]^{p-1}\}^{-1} \| \leq C, \\ & \bar{h} \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*), \quad \bar{h}_\mu = \frac{h_\mu}{\|h_\mu\|}. \end{aligned} \quad (45)$$

Тогда существует отображение $x = x(\mu)$, $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $x(\mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon > 0$ достаточно малое такое, что $F(x(\mu), \mu) = 0$ и

$$\mu = \mu^* + h_\mu, \quad x(\mu) = x^* + c(\mu)\bar{h}_x + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu\|), \|c(\mu)\| = \|\mu\|, \quad (46)$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \leq C \sum_{k=1}^p \|f_k(x^* + h_\mu, \mu)\|_{Z_k}^{1/k}. \quad (47)$$

3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Вернемся к нашему примеру и покажем, что отображение $F(\cdot)$ будет p -регулярным в решении $x^*(\cdot) = 0$. Не ограничивая общности, рассмотрим случай $p = 2$, так как случай $p > 2$ рассматривается аналогично.

Примем во внимание уравнение

$$\ddot{x} = f(x, v, \rho), \quad f : C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow C[0, 2\pi], \quad x(0) = v, \quad x(2\pi) = \rho, \quad (48)$$

или

$$F(x, v, \rho) = \ddot{x} - f(x, v, \rho) = 0, \quad x(0) = v, \quad x(2\pi) = \rho,$$

с граничными условиями, где $\mu \triangleq (v, \rho)$, v и ρ — малые параметры из $U(v^*, \rho^*) = U(0, 0)$, $v^* = 0$, $\rho^* = 0$.

Если отображение $x(t, v, \rho)$ невырожденно в точке решения $x^* = x(t, 0, 0)$ (в дальнейшем будем рассматривать именно такие отображения), то из теоремы о неявной функции следует, что для достаточно малого (v, ρ) существует Δ_v , Δ_ρ и функция x_μ такие, что

$$x_\mu(0 + \Delta_v) = 0, \quad x_\mu(2\pi + \Delta_\rho) = 0, \quad x_\mu(0) = v, \quad x_\mu(2\pi) = \rho, \quad (49)$$

и

$$c_1(|v| + |\rho|) \leq |\Delta_v| + |\Delta_\rho| \leq c_2(|v| + |\rho|). \quad (50)$$

В этом случае можно преобразовать (48) к виду

$$\ddot{x} = f(x, v, \rho), \quad x(\Delta_v) = 0, \quad x(2\pi + \Delta_\rho) = 0 \quad (51)$$

и, подставив

$$t = \frac{1}{2\pi}(2\pi + \Delta_p - \Delta_v)\tau + \Delta_v, \quad (52)$$

получим задачу (51) в форме

$$\bar{F}(\bar{x}, \Delta_v, \Delta_p) = 0, \quad (53)$$

где $\bar{F} : X \rightarrow C[0, 2\pi]$, $X = \{C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}(0) = 0, \bar{x}(2\pi) = 0\}$ и

$$\bar{x}(\tau) = x\left(\frac{1}{2\pi}(2\pi + \Delta_p - \Delta_v)\tau + \Delta_v\right).$$

Отображение $\bar{F}$ будем называть *канонической формой* отображения F .

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$F(x) = x'' + x + x^2 = 0, \quad x(0) = v, \quad x(2\pi) = \rho, \quad (54)$$

где v и ρ — малые параметры из $U(v^*, \rho^*) = U(0, 0)$, $v^* = 0$, $\rho^* = 0$.

Подставив

$$t = \frac{1}{2\pi}(2\pi + \Delta_p - \Delta_v)\tau + \Delta_v, \quad (55)$$

получаем следующее уравнение:

$$\frac{2\pi}{2\pi + \Delta_p - \Delta_v} \bar{x}'' + \bar{x} + \bar{x}^2 = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \quad (56)$$

где

$$\bar{x}(\tau) = x\left(\frac{1}{2\pi}(2\pi + \Delta_p - \Delta_v)\tau + \Delta_v\right). \quad (57)$$

С учетом вышесказанного, рассмотрим следующую задачу, эквивалентную (48):

$$\frac{2\pi}{2\pi + \Delta_p - \Delta_v} \bar{x}'' + \bar{x} + \bar{x}^2 = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \quad (58)$$

Пусть

$$\bar{F}(\bar{x}(\tau), \Delta_v, \Delta_p) = \bar{x}'' + \left(1 + \frac{\Delta_p}{2\pi} - \frac{\Delta_v}{2\pi}\right)(\bar{x} + \bar{x}^2) = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \quad (59)$$

является канонической формой уравнения (54). Тогда

$$\bar{F}'(\bar{x}, \Delta_v, \Delta_p) = \left[\frac{d^2}{d\tau^2} + \left(1 + \frac{\Delta_p}{2\pi} - \frac{\Delta_v}{2\pi}\right)(1 + 2\bar{x}), -\frac{1}{2\pi}(\bar{x} + \bar{x}^2), \frac{1}{2\pi}(\bar{x} + \bar{x}^2) \right], \quad (60)$$

$$\bar{F}'(0, 0, 0) = \left[\frac{d^2}{d\tau^2} + 1, 0, 0 \right]. \quad (61)$$

Определим ядро первой производной отображения $\bar{F}$ по переменной $\bar{x}$

$$\text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \{\bar{x} : \bar{x}'' + \bar{x} = 0, \bar{x}(0) = \bar{x}(2\pi) = 0\}. \quad (62)$$

Отсюда $\bar{x}(\tau) = c_1 \cos \tau + c_2 \sin \tau$. С учетом граничных условий получаем $c_1 = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ и

$$\text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \text{span}\{\sin \tau\}. \quad (63)$$

Оценим вторую производную отображения $\bar{F}$

$$\bar{F}''(\bar{x}, \Delta_v, \Delta_p) = \begin{bmatrix} 2\left(1 + \Delta_p - \frac{\Delta_v}{2\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}(1 + 2\bar{x}) & \frac{1}{2\pi}(1 + 2\bar{x}) \\ -\frac{1}{2\pi}(1 + 2\bar{x}) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\pi}(1 + 2\bar{x}) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$\bar{F}''(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2\pi} & \frac{1}{2\pi} \\ -\frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Отметим, что

$$\bar{F}''(0, 0, 0)[h_{\bar{x}}, h_v, h_p] = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2\pi} & \frac{1}{2\pi} \\ -\frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{\bar{x}} \\ h_v \\ h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h_{\bar{x}} - \frac{1}{2\pi}h_v + \frac{1}{2\pi}h_p \\ -\frac{1}{2\pi}h_{\bar{x}} \\ \frac{1}{2\pi}h_{\bar{x}} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

$$\bar{F}''(0, 0, 0)[h_{\bar{x}}, h_v, h_p]^2 = 2h_{\bar{x}}^2 - \frac{1}{\pi}h_{\bar{x}}h_v + \frac{1}{\pi}h_{\bar{x}}h_p. \quad (67)$$

Введя скалярное произведение в виде

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \int_0^{2\pi} z_1(\tau)z_2(\tau)d\tau \quad \forall z_1, z_2 \in Z = C[0, 2\pi], \quad (68)$$

мы опишем пространство $Z_1 = \text{Im } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$ такое, что $Z = Z_1 \oplus W_2$, $W_2 = \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$.

Отсюда имеем

$$Z_1 = \text{Im } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \left\{ z \in C[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} z(\tau) \sin \tau d\tau \right\}. \quad (69)$$

Легко показать, что проекция на W_2 имеет форму

$$P_{W_2}z = \frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} z(\tau) \sin \tau d\tau. \quad (70)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Z_2 &= \text{span}(\text{Im } P_{W_2} \bar{F}''(0, 0, 0)[\cdot]^2) = \\ &= \text{span} \left\{ z \in Z : z(t) = \frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \bar{F}''(0, 0, 0)[\cdot]^2 \sin \tau d\tau \right\} = \text{span}\{\sin t\} = W_2, \end{aligned} \quad (71)$$

т.е. $P_{W_2} = P_{Z_2}$.

Определим 2-фактор оператор

$$\begin{aligned} \forall \bar{h} = [h_{\bar{x}}, h_v, h_p] \in C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Psi_2(h)[\bar{h}] &= \Psi_2((0, 0, 0), [h_{\bar{x}}, h_v, h_p])[h_{\bar{x}}, h_v, h_p] = \\ &= (\bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) + P_{Z_2} \bar{F}''(0, 0, 0)[h_{\bar{x}}, h_v, h_p])[h_{\bar{x}}, h_v, h_p] = \frac{d^2 h_{\bar{x}}}{dt^2} + h_{\bar{x}} + \end{aligned} \quad (72)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \left(2h_{\bar{x}} \bar{h}_{\bar{x}} - \frac{1}{2\pi} h_{\bar{v}} \bar{h}_{\bar{x}} + \frac{1}{2\pi} h_{\bar{p}} \bar{h}_{\bar{x}} - \frac{1}{2\pi} h_{\bar{x}} \bar{h}_{\bar{v}} + \frac{1}{2\pi} h_{\bar{x}} \bar{h}_{\bar{p}} \right) \sin \tau d\tau$$

и 2-ядро 2-фактор оператора $\Psi_2(h)$

$$\begin{aligned} \text{Ker}^2 \Psi_2(h) = & \left\{ h = [h_{\bar{x}}, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}] \in C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \Psi_2((0, 0, 0), [h_{\bar{x}}, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}])[h_{\bar{x}}, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}] = \right. \\ & \left. = \frac{d^2 h_{\bar{x}}}{dt^2} + h_{\bar{x}} + \frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \left(2h_{\bar{x}}^2 - \frac{1}{\pi} h_{\bar{x}} h_{\bar{v}} + \frac{1}{\pi} h_{\bar{x}} h_{\bar{p}} \right) \sin \tau d\tau = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (73)$$

С учетом уравнений

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \tau d\tau = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau = \pi \quad (74)$$

и того факта, что $h_{\bar{x}} = q \sin t$ (так как $h_{\bar{x}} \in \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$), мы должны решить следующее уравнение с неизвестными $q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}$:

$$\frac{1}{\pi} \sin t \left[q \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} h_{\bar{p}} - \frac{1}{\pi} h_{\bar{v}} \right) \sin^2 \tau d\tau + 2q^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \tau d\tau \right] = 0. \quad (75)$$

Получаем $\left(\frac{1}{\pi} h_{\bar{p}} - \frac{1}{\pi} h_{\bar{v}} \right) q = 0$, т.е. $[q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}] = [0, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}]$ или $[q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}] = [q, h_{\bar{p}}, h_{\bar{p}}]$, где $q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}$ — любые константы, принадлежащие $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\text{Ker}^2 \Psi_2(h) = \{[0, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}]\} \cup \{[q \sin t, h_{\bar{p}}, h_{\bar{p}}]\}, \quad q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}} \in \mathbb{R}. \quad (76)$$

Теперь проверим, является ли 2-фактор оператор сюръекцией на $C[0, 2\pi]$ для элементов H , принадлежащих 2-ядру 2-фактор оператору.

Пусть $H = [q \sin t, h_{\bar{p}}, h_{\bar{p}}]$. Проверим следующее

$$\forall z \in C[0, 2\pi] \quad \exists [\bar{h}_{\bar{x}}, \bar{h}_{\bar{v}}, \bar{h}_{\bar{p}}] \in C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \text{что} \quad \Psi_2(H)[\bar{h}_{\bar{x}}, \bar{h}_{\bar{v}}, \bar{h}_{\bar{p}}] = z. \quad (77)$$

Исходя из леммы 2, достаточно показать, что это утверждение выполнено для любого элемента $z = z_2 = a \sin t \in Z_2 = W_2 = \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \text{span}\{\sin t\}$. Мы ищем элемент $\bar{h}_{\bar{x}} = b \sin t \in \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$. После подстановки в полученную форму 2-фактор оператора, получаем

$$\frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \left(q \sin \tau b \sin \tau - \frac{1}{2\pi} h_{\bar{p}} b \sin \tau + \frac{1}{2\pi} h_{\bar{p}} b \sin \tau - \frac{1}{2\pi} q \sin \tau \bar{h}_{\bar{v}} + \frac{1}{2\pi} q \sin \tau \bar{h}_{\bar{p}} \right) \sin \tau d\tau = a \sin t. \quad (78)$$

Отсюда $\frac{1}{2\pi} q(-\bar{h}_{\bar{v}} + \bar{h}_{\bar{p}}) = a$. Следовательно, $\bar{h}_{\bar{p}} = \bar{h}_{\bar{v}} + \frac{2\pi a}{q}$ и $[\bar{h}_{\bar{x}}, \bar{h}_{\bar{v}}, \bar{h}_{\bar{p}}] = \left[b \sin t, \bar{h}_{\bar{v}}, \bar{h}_{\bar{v}} + \frac{2\pi a}{q} \right]$ для любого b . Поэтому $\Psi_2(H)$ является сюръективным и это означает, что отображение F является 2-регулярным в точке $(0, 0, 0)$ на элементе $H = [q \sin t, h_{\bar{p}}, h_{\bar{p}}]$.

Пусть $H = [0, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}]$.

Согласно лемме 2, берем любой элемент $z = z_2 = a \sin t \in Z_2 = W_2 = \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \text{span}\{\sin t\}$. Мы ищем элемент $\bar{h}_{\bar{x}} = b \sin t \in \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$. Подставив в указанную форму 2-фактор оператора, получаем

$$\frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \left(0 - \frac{1}{2\pi} h_{\bar{v}} b \sin \tau + \frac{1}{2\pi} h_{\bar{p}} b \sin \tau - 0 + 0 \right) \sin \tau d\tau = a \sin t. \quad (79)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \sin t \left(-\frac{1}{2\pi} h_v b \pi + \frac{1}{2\pi} h_p b \pi \right) = a \sin t, \quad (80)$$

и

$$b = \frac{2\pi a}{h_p - h_v}, \quad (81)$$

для $h_v \neq h_p$.

Тогда $\bar{F}$ является 2-регулярным в точке $(0, 0, 0)$ на элементе $H = [0, h_v, h_p]$ таком, что $h_v \neq h_p$. Поэтому, согласно нашей теореме 1, можно сформулировать следующий результат для примера 1.

Теорема 7. *Отображение $\bar{F}(\bar{x}, \mu)$ является 2-регулярным в точке $(0, 0, 0)$ на $\bar{h} = (\bar{h}_x, \bar{h}_\mu)$, где $\bar{h}_\mu = \frac{h_\mu}{\|h_\mu\|}$, $h_\mu = (v, \rho)$, и*

$$\bar{h}_x(t, \mu) = \begin{cases} b \sin t, & b \neq 0, \quad v = \rho, \\ 0, & v \neq \rho. \end{cases}$$

Тогда для $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малых существует непрерывная функция $x(t, \mu)$ такая, что

$$x(t, \mu) = c(\mu) \sin t + \omega(t, \mu), \quad x(0, \mu) = v, \quad x(2\pi, \mu) = \rho,$$

где

$$c(\mu) = \begin{cases} \|\mu\|, & v = \rho, \\ o(\|\mu\|), & v \neq \rho. \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение теории p -регулярности позволило нам сформулировать и доказать некоторый аналог теоремы Люстерника о касательном конусе, т.е. теорему 1, связанный с проблемой существования непрерывного решения сингулярного уравнения $F(x^*, \mu^*) = 0$, где $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$ и $F : X \times M \rightarrow Z$, M является конечномерным пространством, а X, Z — банаховы пространства. Мы проиллюстрируем этот результат решением дифференциального уравнения второго порядка (54) с граничными условиями.

Ниже приведем общий результат данной статьи.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$F(x, \mu) = F(x^{(k)}, \dots, x', x, v, \rho) = 0, \quad x(a) = v, \quad x(\mu) = \rho, \quad (82)$$

где $F : C_m^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow C[a, b]$, $x(t) \in C_m^k[a, b]$, $v, \rho \in \mathbb{R}$, $\mu = (v, \rho)$. Аналогично (53), введем $\bar{x}$ и каноническое отображение $\bar{F}(\bar{x}, \mu)$, где $\bar{F} : X \rightarrow C[a, b]$, $X = \{C_m^k[a, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid \bar{x}(a) = 0, \bar{x}(b) = 0\}$.

Теперь можно сформулировать общий результат.

Теорема 8. *Пусть $F(x, \mu) \in C^{p+1}(C_m^k[a, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ и для любого $h_\mu \neq 0$, $h_\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $h_\mu = (v, \rho)$ существует $\bar{h}_x(t, \mu) \in X$, $\|\bar{h}_x(t, \mu)\| \leq c < \infty$ такие, что каноническое отображение $\bar{F}(\bar{x}, \mu)$ является p -регулярным в $(\bar{x}^*, \mu^*)$ на $\bar{h}(\mu) = [\bar{h}_x(t, \mu), \bar{h}_\mu]$, где $\bar{h}(\mu) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k \bar{f}_k^{(k)}(\bar{x}^*, \mu^*)$.*

Тогда существует непрерывное отображение $x = x(t, \mu)$, $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $t \in [a, b]$, $x(t, \mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*))$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малое такое, что

$$F(x(t, \mu), \mu) = 0, \quad x(a) = v, \quad x(b) = p, \quad (83)$$

где

$$x(t, \mu) = x^* + c(\mu)\bar{h}_x(t, \mu) + \omega(t, \mu) \quad (84)$$

и

$$c(\mu) = \begin{cases} O(\mu - \mu^*), & \bar{h}_x(t, \mu) \neq 0, \omega(t, \mu) = o(\mu - \mu^*), \\ o(\mu - \mu^*), & \bar{h}_x(t, \mu) = 0, \omega(t, \mu) = o(c(\mu)). \end{cases} \quad (85)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
2. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. 2-регулярные решения нелинейных задач: теория и численные методы. М.: Наука, 1999.
3. Marsden J.E., Tret'yakov A.A. Factor analysis of nonlinear mappings: p -regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425.
4. Medak B., Tret'yakov A.A. Existence of periodic solutions to nonlinear p -regular boundary value problem // Boundary Value Problems. 2015. Art. № 91. P. 1–24.
5. Медак Б., Третьяков А.А. Теория p -регулярности. Анализ и приложения. М.: Физматлит, 2017.
6. Michael E.A. Continuous selector // Ann. Math. 1956. V. 64. P. 562–580.
7. Третьяков А.А. Теорема о неявной функции в вырожденных задачах // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. № 5. С. 215–216.
8. Brezhneva O.A., Tret'yakov A.A. Implicit function theorems for nonregular mappings in Banach spaces. Exit from singularity // Banach Spaces and Their Applications in Analysis. 2007. P. 285–302.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.