

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.958

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ  
НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ  
В ШАРЕ И СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ<sup>1)</sup>**

© 2023 г. В. А. Галкин<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup> 628422 Сургут, ХМАО-Югра, ул. Базовая, 34, Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Россия

<sup>2</sup> 628422 Сургут, ХМАО-Югра, пр-т Ленина, 1, Сургутский государственный университет, Россия

\*e-mail: val-gal@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.10.2022 г.  
Переработанный вариант 21.11.2022 г.  
Принята к публикации 13.01.2023 г.

В работе получен класс точных решений уравнений Навье–Стокса для вихревого течения несжимаемой жидкости. Построено трехпараметрическое семейство решений в шаре, сферических слоях и во всем пространстве  $\mathbb{R}_3$ .

**Ключевые слова:** уравнения несжимаемой жидкости, точные решения, точные решения системы Навье–Стокса.

**DOI:** 10.31857/S004446692306008X, **EDN:** UW0XQH

**1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

В трехмерной области  $D \subset \mathbb{R}_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$  рассматривается система Навье–Стокса для динамики во времени  $t$  поля скоростей  $V(x, t) \in \mathbb{R}_3$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P(x, t) = \varepsilon^2 \Delta V, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} V = 0, \quad x \in D, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

где  $P = P(x, t)$  – давление жидкости,  $\varepsilon^2$  – неотрицательная постоянная, характеризующая вязкость жидкости,  $\bar{\rho} > 0$  – постоянная плотность жидкости. Поле скоростей течения  $V(x, t)$  подчиним условию непротекания (“скольжения”) на гладкой границе  $\partial D$  области  $D$ , выражающемся в требовании ортогональности поля  $V(x, t)$  к нормальному вектору  $n(x)$  к границе  $\partial D$  в каждой точке  $x \in \partial D$

$$(V(x, t), n(x))|_{x \in \partial D} = 0. \quad (1.3)$$

**Определение.** Назовем решением задачи (1.1), (1.2), (1.3) пару  $\{V, P\}$ , состоящую из гладкого векторного поля  $V : D \times \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}_3 \left( \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{t > 0\} \right)$ , непрерывного на  $(D \cup \partial D) \times \mathbb{R}_+ \left( \mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{t \geq 0\} \right)$ , и скалярной функции  $P(x, t)$ , гладкой по  $x \in D$  при всех  $t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$ .

В рамках модели гидродинамики (1.1), (1.2), (1.3), описывающей течение несжимаемой жидкости в пространственных областях  $D$  в случае шара

$$B_R = \left\{ x \in \mathbb{R}_3 : \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2} < R \right\},$$

<sup>1)</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 “Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления”.

сферических слоев

$$B_{R_1, R_2} = \{x \in \mathbb{R}_3: R_1 < \|x\| < R_2\}, \quad R_1 > 0,$$

и всего пространства  $\mathbb{R}_3$  (в последнем случае, естественно, без условия (3)), рассмотрены точные вихревые нестационарные решения в классе бесконечно дифференцируемых функций  $C^\infty$ . Данная работа является развитием идей и подходов, представленных в [1–6].

Верификация точными решениями результатов вычислительных экспериментов моделирования течения жидкости в указанных областях весьма немногочисленна, что связано с малым количеством известных точных решений рассматриваемых задач [2–6].

Моделированию течения жидкости в области изменяющейся во времени в рамках модели слоистого течения жидкости и исследованию точного решения этой задачи посвящена работа авторов [7].

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

С целью упрощения записи дальнейших соотношений для каждого вектора  $x \in \mathbb{R}_3$  обозначим символом  $r \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|$  его евклидову норму. Границу шара  $B_R$  обозначим  $S_R \stackrel{\text{def}}{=} \partial B_R$  – сфера радиуса  $R$ . Отметим, что для каждой сферы  $S_R$  при  $R > 0$  значения вектора нормали  $\mathbf{n}(x)$  можно выбрать равными  $\mathbf{n}(x) \equiv x \in S_R$ .

Значения радиусов сфер  $S_R$ , являющихся границами шаровых областей  $D$  в уравнениях (1.1)–(1.3), подчиним условию

$$\text{tg}(R) = R, \quad R \geq 0. \tag{2.1}$$

Обозначим через  $\rho_k$  неотрицательные корни уравнения (2.1), которые упорядочим по возрастанию номеров  $k \in \mathbb{N}$ :

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_k < \dots$$

При  $k \rightarrow \infty$  справедлива асимптотическая формула

$$\rho_k \sim \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \gg 1. \tag{2.2}$$

Положим

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} r^{-1} \sin(r), & r > 0, \\ 1, & r = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Определим для каждой точки  $x \in \mathbb{R}_3 \setminus \{0\}$  с евклидовой нормой  $r(x) > 0$  трехпараметрическое семейство векторных полей, зависящих от произвольных параметров

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_3,$$

заданное следующими формулами:

$$U_\alpha(x) = \left\{ \frac{\bar{u}'(r)}{r} \begin{bmatrix} x_2 & -2 & -x_3 \\ -x_1 & x_3 & -2 \\ -2 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \left( \bar{u}''(r) - \frac{\bar{u}'(r)}{r} \right) \begin{bmatrix} x_1 x_3 & -(x_2^2 + x_3^2) & x_1 x_2 \\ x_2 x_3 & x_1 x_2 & -(x_1^2 + x_3^2) \\ -(x_1^2 + x_2^2) & x_1 x_3 & x_2 x_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$r \equiv r(x) > 0.$$

Векторное поле  $U_\alpha(x)$  может быть продолжено в классе бесконечно дифференцируемых функций  $C^\infty(\mathbb{R}_3)$  в точку  $x = 0$ . Для доказательства установим свойства коэффициентов при матрицах в выражении (2.4) в окрестности точки  $r = 0$ .

Рассмотрим на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  с выколотой точкой  $z = 0$  мероморфные функции, заданные следующими соотношениями:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sin(z), \quad g(z) = \frac{1}{z} f'(z), \quad q(z) = \frac{1}{z^2} f''(z), \quad p(z) = q(z) - \frac{1}{z^2} g(z). \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

**Лемма 1.** *Функции  $f, g, p$  имеют аналитическое продолжение в точку  $z = 0$  до целых функций на  $\mathbb{C}$ .*

**Доказательство.** Для построения искомого продолжения заметим, что при  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  справедливы следующие разложения:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} z^{2n-2}, \quad q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(2n+1)!} z^{2n-4}, \quad z \neq 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, при  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  справедливо разложение

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(2n+1)!} z^{2n-4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} z^{2n-4} \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n(n-1)}{(2n+1)!} z^{2n-4}. \quad (2.7)$$

Поскольку в силу сходимости разложений (2.6), (2.7) в области  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  функции  $f, g, p$  представляются сходящимися рядами Тейлора, то эти ряды дают искомое продолжение функций  $f, g, p$  в точку  $z = 0$ .

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Векторное поле  $U_\alpha(x)$ , определенное формулой (2.4) при  $x \neq 0$ , может быть продолжено с  $\mathbb{R}_3 \setminus \{0\}$  на пространство  $\mathbb{R}_3$  в классе функций  $C^\infty(\mathbb{R}_3)$ .*

**Доказательство.** Отметим, что функция

$$r(x) \equiv \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2}$$

принадлежит классу  $C^\infty(\mathbb{R}_3 \setminus \{0\})$ . Для построения искомого продолжения векторного поля  $U_\alpha(x)$  в начало координат  $x = 0$  воспользуемся леммой 1. Очевидно, что для этого нужно установить существование  $C^\infty$  продолжения в точку  $r = 0$  для коэффициентов  $\frac{\bar{u}'(r)}{r}$  и  $\frac{1}{r^2} \left( \bar{u}''(r) - \frac{\bar{u}'(r)}{r} \right)$ . Поскольку для вещественных значений переменной  $z = r + i0$  справедливы тождества

$$\begin{aligned} g(z)|_{z=r+i0} &\equiv \frac{\bar{u}'(r)}{r}, \quad r \neq 0, \\ p(z)|_{z=r+i0} &\equiv \frac{1}{r^2} \left( \bar{u}''(r) - \frac{\bar{u}'(r)}{r} \right), \quad r \neq 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

то правые части формулы (2.8) представляются в виде сходящихся рядов Тейлора (2.6) и (2.7) по четным степеням переменной  $r(x) \equiv \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2}$ . Следовательно, коэффициенты в формуле (2.4) имеют продолжение класса  $C^\infty(\mathbb{R}_3)$  в начало координат  $x = 0$ .

Отметим, что в начале координат справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} U_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} U_\alpha(0) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (2.9)$$

В дальнейшем поле (2.4) с продолжением (2.9) будем обозначать тем же символом  $U_\alpha(x) \forall x \in \mathbb{R}_3$ .

Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Векторное поле  $U_\alpha$  является касательным в каждой точке  $x$  на сфере  $S_{\rho_k}$ , где  $\rho_k$  являются корнями уравнения (2.1), упорядоченными по возрастанию номеров  $k \in \mathbb{N}$ .*

**Доказательство.** В силу соотношений (2.1), (2.3) справедливы равенства

$$\bar{u}'(\rho_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Следовательно, учитывая (2.4), получаем

$$U_\alpha(x)|_{x \in S_{\rho_k}} = A_x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где матрица

$$A_x = \frac{1}{\rho_k^2} \left( \bar{u}''(\rho_k) - \frac{\bar{u}'(\rho_k)}{\rho_k} \right) \begin{bmatrix} x_1 x_3 & -(x_2^2 + x_3^2) & x_1 x_2 \\ x_2 x_3 & x_1 x_2 & -(x_1^2 + x_3^2) \\ -(x_1^2 + x_2^2) & x_1 x_3 & x_2 x_3 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Для доказательства утверждения леммы заметим, что для каждого вектора  $x \in \mathbb{R}_3$  справедливо тождество

$$A_x^* x = 0, \tag{2.13}$$

где  $A_x^*$  – транспонированная к матрице  $A_x$ . Каждый вектор  $x \in \mathbb{R}_3 : \|x\| = \rho_k$  ортогонален к поверхности сферы  $S_{\rho_k}$ . Используя формулы (2.11), (2.12), (2.13), вычислим скалярное произведение

$$(U_\alpha(x), x)|_{x \in S_{\rho_k}} \equiv (A_x \alpha, x) \equiv (\alpha, A_x^* x) \equiv 0.$$

Таким образом, в каждой точке  $x \in S_{\rho_k}$  векторное поле  $U_\alpha(x)$  является касательным к сфере  $S_{\rho_k}$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.** Векторное поле  $U_\alpha(x)$ , определенное на  $\mathbb{R}_3$  формулами (2.4), (2.9), удовлетворяет следующим дифференциальным тождествам:

$$\operatorname{div} U_\alpha = 0, \tag{2.14}$$

$$\Delta U_\alpha + U_\alpha = 0, \tag{2.15}$$

$$(U_\alpha \cdot \nabla) U_\alpha = \frac{1}{2} \nabla (U_\alpha, U_\alpha). \tag{2.16}$$

**Доказательство.** В силу леммы 2 векторное поле  $U_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}_3)$ . Поэтому во всех точках  $x \in \mathbb{R}_3$  определены дифференциальные операторы в формулах (2.14)–(2.16). Получение этих формул выполняется прямым вычислением значений указанных операций на основе формул (2.3), (2.4), (2.9). Для обоснования формул (2.15), (2.16) существенно используется то, что функция  $\bar{u}(r(x))$ , где  $\bar{u}$  определяется соотношением (2.3), является собственной функцией трехмерного оператора Лапласа, т.е.

$$\Delta \bar{u}(r(x)) + \bar{u}(r(x)) \equiv 0, \quad r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad x \in \mathbb{R}_3.$$

Лемма доказана.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (1.1), (1.2), (1.3). НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

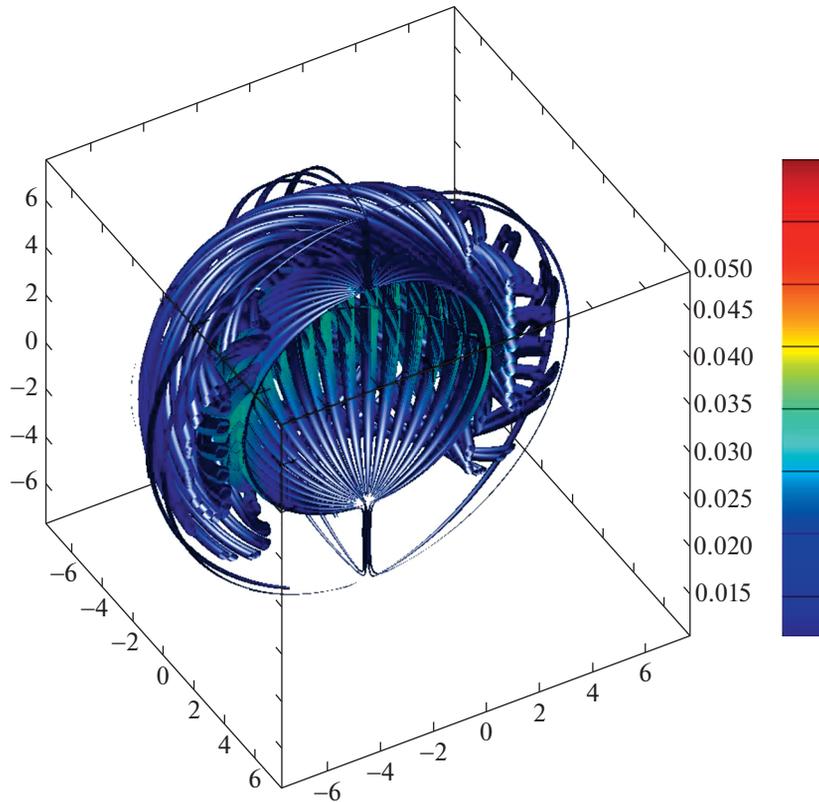
В следующей теореме предлагается построение трехпараметрического семейства решений системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в шаре, сферических слоях и во всем пространстве  $\mathbb{R}_3$  на основе векторных полей  $U_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}_3)$ , свойства которых установлены в леммах 1–4.

**Теорема.** Пусть векторное поле

$$V_\alpha(x, t) = U_\alpha(x) \exp(-\varepsilon^2 t), \quad x \in \mathbb{R}_3, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon = \text{const}, \tag{3.1}$$

и скалярная функция

$$P(x, t) = -\frac{\bar{\rho}}{2} (V_\alpha(x, t), V_\alpha(x, t)) + \beta(t), \quad \bar{\rho} \equiv \text{const} > 0, \tag{3.2}$$



Фиг. 1. Визуализация решения в сферическом слое  $B_{\rho_1, \rho_2}$ .

где  $\beta(t)$  – произвольная функция, зависящая от времени  $t$ . Тогда пара  $\{V_\alpha, P\}$  является решением системы уравнений Навье–Стокса (1.1), (1.2) в области  $D = \{x \in \mathbb{R}_3\}$ . Более того, на границе  $S_{\rho_k}$  каждого шара  $B_{\rho_k} = \left\{x \in \mathbb{R}_3 : \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)^{1/2} < \rho_k\right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , выполняются условия скольжения (1.3), т.е. формулы (3.1), (3.2) дают решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) в каждом пространственном шаре  $D = B_{\rho_k}$  и сферическом слое  $D = B_{\rho_k, \rho_l}$ ,  $1 \leq k < l \leq +\infty$ . (Равенство  $l = +\infty$  по определению означает, что  $D = \mathbb{R}_3 \setminus (B_{\rho_k} \cup S_{\rho_k})$ .) Векторное поле скоростей (3.1), рассматриваемое в области  $D = \{x \in \mathbb{R}_3\}$  и сферических слоях  $D = \mathbb{R}_3 \setminus (B_{\rho_k} \cup S_{\rho_k})$ , стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Утверждение теоремы получается прямой подстановкой выражений (3.1), (3.2) в соотношения (1.1), (1.2), (1.3) с учетом утверждений лемм 3 и 4.

Теорема доказана.

Отметим, что результаты теоремы переносятся на шары с произвольным радиусом посредством соответствующего масштабирования пространственно-временных переменных.

**Замечание.** Формулы (3.1), (3.2) дают решение задачи Коши для системы (1.1), (1.2) в области  $D = \mathbb{R}_3$  с начальным условием

$$V_\alpha(x, t) = U_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}_3, \tag{3.3}$$

удовлетворяющее при  $x \rightarrow \infty$  условию регулярности

$$V_\alpha(x, t) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r(x)}\right) \rightarrow 0, \quad r(x) \rightarrow \infty. \tag{3.4}$$

Соотношение (3.4) является непосредственным следствием формулы (2.4).

Остановимся на некоторых свойствах решений, построенных в теореме. Отметим, что решения (3.1), (3.2) имеют слоистую, стратифицированную по сферическим слоям  $B_{\rho_k, \rho_l}$  структуру.

Нетрудно выявить некоторые инвариантные подмножества течения, исследуя линии тока. В частности, для значения параметров  $\alpha = (1, 0, 0)$  линии тока располагаются в экваториальной плоскости на окружностях с радиусами орбит  $R_k : \operatorname{tg}(R_k) = \frac{R_k}{1 - R_k^2}$ ,  $\rho_{k-1} < R_k < \rho_k$ ,  $\rho_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

На сферах  $S_{\rho_k}$  в этом случае линии тока расположены вдоль меридианов, соединяющих “северный” и “южный” полюсы, меняя поочередно на противоположное направление “течения” при изменении номера сферы на 1. Инвариантной является ось “север”–“юг”. При этом полюса являются стационарными точками. Направление “течения” на отрезках этой оси, заключенных между сферами  $S_{\rho_k}$ , меняется на противоположное при переходе от слоя к слою. Аналогичные явления наблюдаются на вышеупомянутых круговых орбитах в экваториальной плоскости. Детальное качественное исследование решений и их визуализация будут представлены в последующих публикациях. Пример визуализации решения  $V_{(1,0,0)}$  в сферическом слое  $B_{\rho_1, \rho_2}$  был выполнен Д.А. Моргуном и представлен на фиг. 1.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получен класс точных решений уравнений Навье–Стокса для вихревого течения несжимаемой жидкости. Построено трехпараметрическое семейство решений в шаре, сферических слоях и во всем пространстве  $\mathbb{R}_3$ .

Автор выражает благодарность за обсуждение работы и участие в исследованиях по визуализации построенных решений сотрудникам Сургутского филиала ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН Д.А. Моргуну и А.О. Дубовику.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Управление параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // Докл. АН. 2015. Т. 463. № 2. С. 149–151.
2. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О. Точные решения системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 13–16.
3. Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids // Czechoslovak Journal of Physics. 1994. V. 44. № 2. P. 97–106.
4. Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96.  
<https://doi.org/10.26456/vtpmk557>
5. Арнольд. “Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits”. C. R. Acad. Sci. Paris, 261:17–20, 1965.
6. Богоявленский О. И. О задаче Кельвина 1880 года и точных решениях уравнений Навье–Стокса // Общественный семинар “Математика и ее приложения” Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук 21 мая 2015 г. Москва, конференц-зал МИАН (ул. Губкина, 8). Электронный ресурс: [www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru)
7. Галкин В.А., Дубовик А.О. О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 31–42.