ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 6, с. 891–895

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 512.643

О НОВОМ ТИПЕ ЮНИТОИДНЫХ МАТРИЦ

Х. Д. Икрамов[1,*]

[1] *119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия*

**e-mail: ikramov@cs.msu.su*

Поступила в редакцию 10.09.2022 г.
Переработанный вариант 10.09.2022 г.
Принята к публикации 03.03.2023 г.

Коквадрат невырожденной комплексной матрицы A определяется как $A^{-\top}A$ в теории T-конгруэнций и как $A^{-*}A$ в теории эрмитовых конгруэнций. Существует еще одно произведение подобного рода, а именно, $\overline{A}^{-1}A$. В статье обсуждается следующий вопрос: можно ли и это произведение интерпретировать как коквадрат в рамках какой-то теории конгруэнций? Какова эта теория, и как в ней выглядит каноническая форма? Библ. 5.

Ключевые слова: конгруэнции, юнитоид, коквадрат, каноническая форма, канонические углы, конинволюция.

DOI: 10.31857/S0044466923060091, **EDN:** UYPHCY

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории (квадратных) комплексных матриц рассматриваются два типа конгруэнтных преобразований или, короче, конгруэнций: T-конгруэнции, т.е. преобразования вида

$$A \to S^{\top}AS, \tag{1}$$

и эрмитовы, или *-конгруэнции

$$A \to S^*AS. \tag{2}$$

В обеих формулах S – произвольная невырожденная матрица.

И в том, и в другом случае матрицу S можно выбрать так, чтобы A приобрела вид

$$B \oplus J_{n_1} \oplus \dots \oplus J_{n_p}. \tag{3}$$

Здесь $J_{n_1}, \dots, J_{n_p}$ – жордановы клетки соответствующих порядков с нулем на главной диагонали, а B – невырожденная матрица, определяемая с точностью до конгруэнции.

Прямая сумма $J_{n_1} \oplus \dots \oplus J_{n_p}$ называется сингулярной частью разложения (3), а о матрице B говорят, что она определяет регулярную часть разложения. Несколько алгоритмов для вычисления такого разложения описаны в [1], [2]. Некоторые из них можно считать рациональными. Рациональным алгоритмом мы называем конечный вычислительный процесс, использующий только арифметические операции.

Существование рациональных алгоритмов для выделения из матрицы ее регулярной части позволяет нам в дальнейшем ограничиться рассмотрением только невырожденных матриц. Каждой такой матрице A можно сопоставить матрицу

$$\mathscr{C}_A = A^{-\top}A, \tag{4}$$

если обсуждаются T-конгруэнции, и матрицу

$$\mathscr{C}_A = A^{-*}A \tag{5}$$

в случае *-конгруэнций. И та, и другая называются *коквадратами* матрицы A.

Если A подвергается конгруэнции (1) или (2), то ее коквадрат претерпевает подобие

$$\mathscr{C}_A \to S^{-1}\mathscr{C}_A S,$$

задаваемое той же матрицей S. Таким образом, класс конгруэнтности, содержащий матрицу A, сопровождается классом подобия ее коквадрата. В частности, каноническая форма матрицы относительно конгруэнций, как она описана в § 4.5 книги [3], в значительной мере определяется жордановой формой ее коквадрата. Обе формы суть блочно-диагональные матрицы, порядки диагональных блоков которых согласованы.

Матрицы типов (4) и (5) обладают любопытными особенностями спектра. Все собственные значения матрицы (4), кроме чисел 1 и –1, можно расположить парами вида (μ, μ^{-1}). Жордановы структуры обоих собственных значений такой пары одинаковы.

Собственные значения матрицы (5), лежащие вне единичной окружности γ_1, также можно объединить в пары вида $(\mu, \bar{\mu}^{-1})$. Жордановы структуры этих двух чисел, симметричных относительно γ_1, одинаковы.

Каков бы ни был тип конгруэнции, условимся называть матрицу A *юнитоидной* (или просто *юнитоидом*), если ее каноническая форма относительно рассматриваемого типа конгруэнций является диагональной матрицей. Диагональную форму имеют и коквадраты канонических юнитоидов. Из определения коквадратов теперь следует:

1. В случае T-конгруэнций все диагональные элементы коквадрата канонической матрицы равны единице, а сам коквадрат – это единичная матрица. Единичная матрица не изменяется подобиями, поэтому всякая матрица A в классе конгруэнтности юнитоидной матрицы удовлетворяет соотношению $A^{-\top}A = I$, т.е. является симметричной матрицей, вещественной или комплексной. Термин “юнитоид” превращается в синоним термина “симметричная матрица”, так что введение его в данном случае не имеет смысла.

2. В случае *-конгруэнций диагональная форма (невырожденного) юнитоида всегда может быть выбрана так, чтобы модули всех ее диагональных элементов были равны единице. Если обозначить эти элементы $e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_n}$, полагая, например, $\phi_1, \dots, \phi_n \in [0, 2\pi)$, то числа $\phi_1, \dots, \phi_n$ называют *каноническими углами* любой матрицы из данного класса *-конгруэнтности. Коквадраты матриц из этого класса суть матрицы, диагонализуемые подобием и имеющие спектр $e^{i2\phi_1}, \dots, e^{i2\phi_n}$.

2. НОВЫЙ ТИП КОКВАДРАТОВ

Формулы (4) и (5) описывают парные произведения, получаемые применением к (невырожденной) матрице A операций обращения и транспонирования либо сопряжения. Если последнюю заменить операцией поэлементного сопряжения, то получится еще одно парное произведение подобного рода. Итак, положим

$$\mathscr{C}_A = \bar{A}^{-1}A \tag{6}$$

и будем по-прежнему называть $\mathscr{C}_A$ коквадратом матрицы A. Какому типу конгруэнций, совершаемых с матрицами A, соответствуют подобия матриц (6), и каковы эти подобия?

Ответ таков: конгруэнции, задаваемые вещественными матрицами S (в этом случае преобразования (1) и (2) не различаются). Действительно, если $B = S^\top AS$, то

$$\mathscr{C}_B = \bar{B}^{-1}B = (S^{-1}\bar{A}^{-1}S^{-\top})(S^\top AS) = S^{-1}(\bar{A}^{-1}A)S = S^{-1}\mathscr{C}_A S,$$

т.е. коквадрат претерпевает подобие, задаваемое той же матрицей S.

Присмотримся к самому коквадрату $\mathscr{C}_A$. Видно, что $\mathscr{C}_A\bar{\mathscr{C}}_A = I$. Квадратные $n \times n$-матрицы C, удовлетворяющие соотношению

$$C\bar{C} = I_n, \tag{7}$$

известны в теории матриц и называются *конинволюторными* или, короче, *конинволюциями* (coninvolutions). Подробное исследование этого класса матриц проведено в [4]. В следующем разделе мы приведем нужные нам сведения из этой статьи.

3. КОНИНВОЛЮЦИИ

Мы отметили в предыдущем разделе, что всякая матрица типа (6) есть конинволюция в смысле определения (7). Справедливо и не столь очевидное обратное утверждение: всякая конинволюция C может быть представлена в виде $C = \overline{A}^{-1}A$. (Это лемма 4.6.9 из первого издания книги [3], существующей в русском переводе; см. [5].)

Пусть λ и x — собственное значение и соответствующий собственный вектор конинволюции C. Из соотношений $Cx = \lambda x$ и $C^{-1} = \overline{C}$ выводим

$$C^{-1}x = \lambda^{-1}x, \quad \overline{C}x = \lambda^{-1}x, \quad C\overline{x} = \overline{\lambda}^{-1}\overline{x},$$

т.е. $\overline{\lambda}^{-1}$ — также собственное значение матрицы C, которому отвечает собственный вектор $\overline{x}$. Если x и $\overline{x}$ — это один и тот же вектор, то λ лежит на единичной окружности. В противном случае (λ не лежит на γ_1), векторы x и $\overline{x}$ линейно независимы.

Для произвольного натурального m и $\lambda \neq 0$ имеем

$$\operatorname{rank}(C - \lambda I)^m = \operatorname{rank}(I - \lambda C^{-1})^m = \operatorname{rank}(I - \lambda\overline{C})^m = \operatorname{rank}(I - \overline{\lambda}C)^m = \operatorname{rank}(C - \overline{\lambda}^{-1}I)^m.$$

Крайние части этих соотношений показывают, что жордановы структуры матрицы C, относящиеся к λ и $\overline{\lambda}^{-1}$, одинаковы.

Процитируем теперь некоторые результаты из [4]. Пусть C — конинволюция порядка n, имеющая унимодулярные собственные значения

$$\lambda_1 = e^{i\theta_1}, \ldots, \lambda_r = e^{i\theta_r} \tag{8}$$

и пары неунимодулярных собственных значений

$$(\mu_1, \overline{\mu}_1^{-1}), \ldots, (\mu_s, \overline{\mu}_s^{-1}). \tag{9}$$

Пусть $l_1, \ldots, l_r$ — порядки жордановых клеток, отвечающих числам (8) в жордановой форме матрицы C, а $k_1, \ldots, k_s$ — порядки клеток, отвечающих числам $\mu_1, \ldots, \mu_s$. (Напомним, что вторым числам в парах (9) отвечают клетки тех же порядков, что и первым.) Таким образом, жорданова форма матрицы C имеет вид

$$\begin{gathered} J = J_{l_1}(e^{i\theta_1}) \oplus \cdots \oplus J_{l_r}(e^{i\theta_r}) \oplus \left[J_{k_1}(\mu_1) \oplus J_{k_1}(\overline{\mu}_1^{-1})\right] \oplus \cdots \oplus \left[J_{k_s}(\mu_s) \oplus J_{k_s}(\overline{\mu}_s^{-1})\right], \\ l_1 + \cdots + l_r + 2(k_1 + \cdots + k_s) = n. \end{gathered} \tag{10}$$

Однако матрица (10), вообще говоря, не является конинволюцией и потому может быть недостижимой в классе подобий, разрешенных для наших коквадратов. (Напоминаем, что матрицы, задающие эти подобия, должны быть вещественными.) Следуя [4], опишем вид достижимой формы. Это потребует некоторых предварительных определений.

Пусть A и B — матрицы порядка k. Символом $G_{2k}(A, B)$ будем обозначать матрицу

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A + B & -i(A - B) \\ i(A - B) & A + B \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Спектр этой матрицы есть объединение спектров матриц A и B. Это следует из формулы

$$G_{2k}(A, B) = U(A \oplus B)U^{-1},$$

где

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_k & iI_k \\ iI_k & I_k \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица U является унитарной конинволюцией.

Мы будем использовать конструкцию (11) с жордановыми клетками. Положим

$$G_{2k}(\mu) = G_{2k}(J_k(\mu), J_k(\overline{\mu}^{-1})), \quad \mu \neq 0.$$

Теперь можно описать матрицу, к которой вещественным подобием может быть приведена конинволюция C с жордановой формой (10):

$$\hat{J} = e^{iJ_{l_1}(\theta_1)} \oplus \cdots \oplus e^{iJ_{l_r}(\theta_r)} \oplus G_{2k_1}(\mu_1) \oplus \cdots \oplus G_{2k_s}(\mu_s). \quad (12)$$

Матрица (12) – это конинволюция, что вытекает из следующих положений: а) для всякой вещественной матрицы R матрица e^{iR} есть конинволюция (см. [4, предложение 1.2(h)]); б) матрица $G_{2k}(A, B)$ тогда и только тогда является конинволюцией, когда $A\overline{B} = I_k$ (см. [4, лемма 1.1(e)]); в) прямая сумма конинволюций – это снова конинволюция (что очевидно из (7)).

4. ЮНИТОИДЫ НЕОБЫЧНОГО ТИПА

В теории *-конгруэнций юнитоиды – это матрицы, канонические формы которых суть диагональные матрицы. Коквадрат канонического юнитоида – это также диагональная матрица. Естественно считать матрицу (12) простейшей формой, достижимой для коквадрата в классе разрешенных (вещественных) подобий. Но тогда, по аналогии со случаем *-конгруэнций, естественно назвать юнитоидными матрицы, для которых эта простейшая форма коквадрата является диагональной.

Принимая это определение, мы выводим из (12) такие следствия:

1) коквадрат юнитоида не должен иметь неунимодулярных собственных значений;

2) в жордановой форме коквадрата никакому собственному значению не могут соответствовать клетки порядка >1.

Теперь каноническую форму относительно вещественных конгруэнций следует искать среди матриц с диагональными коквадратами. Пусть

$$D = \operatorname{diag}\left(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\right)$$

есть такой коквадрат. Матрицы с коквадратом D описываются уравнением

$$\overline{A}^{-1}A = D \quad (13)$$

или уравнением

$$A = \overline{A}D, \quad (14)$$

или, в поэлементной записи,

$$a_{kj} = \overline{a}_{kj}e^{i\theta_j} \quad \forall k, j.$$

Скалярное уравнение

$$z = \overline{z}e^{i\theta}$$

решается так:

$$ze^{-i\theta/2} = \overline{z}e^{i\theta/2},$$

откуда следует, что решения z имеют вид

$$z = re^{i\theta/2},$$

где r – произвольное вещественное число. Соответственно решениями уравнений (13) и (14) являются матрицы

$$A = RD^{1/2}, \quad (15)$$

где R – произвольная (невырожденная) вещественная матрица и

$$D^{1/2} = \operatorname{diag}\left(e^{i\theta_1/2}, \ldots, e^{i\theta_n/2}\right).$$

Итак, канонической формой юнитоида называем матрицу вида (15). Если $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}$ – собственные значения ее коквадрата D, то числа $\theta_1/2, \ldots, \theta_n/2$ естественно назвать *каноническими углами* этого юнитоида.

В выборе матрицы R для представления (15) есть некоторая свобода. Если S – вещественная матрица, коммутирующая с $D^{1/2}$, то

$$S^\top AS = (S^\top RS)(S^{-1}D^{1/2}S) = (S^\top RS)D^{1/2}, \tag{16}$$

т.е. канонической формой данного класса вещественной конгруэнтности может считаться и матрица $S^\top AS$. Такая свобода минимальна, если канонические углы попарно различны. В этом случае матрица S в соотношениях (16) может быть только диагональной, и $S^\top AS$ разве что величиной элементов отличается от A. Свобода в выборе канонической формы несколько больше, если имеются кратные канонические углы. Их наличие можно использовать, например, для придания какого-то специального вида некоторым диагональным блокам канонической матрицы.

Закончим статью итоговым описанием предлагаемого нового типа юнитоидных матриц: это комплексные матрицы, которые посредством вещественных конгруэнций могут быть представлены в виде произведения вещественной матрицы и диагональной унитарной матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horn R.A., Sergeichuk V.V.* A regularization algorithm for bilinear and sesquilinear forms // Linear Algebra Appl. 2006. V. 412. P. 380–395.
2. *Икрамов Х.Д.* О конгруэнтном выделении жордановых блоков из вырожденной квадратной матрицы // Сиб. журнал вычисл. матем. 2018. Т. 21. С. 255–258.
3. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2013.
4. *Horn R.A., Merino D.I.* A real-coninvolutory analog of the polar decomposition // Linear Algebra Appl. 1993. V. 190. P. 209–227.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.