ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 6, с. 938–948

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ

© 2023 г. В. И. Максимов[1,*]

[1] 620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики УрО РАН, Россия

*e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 02.11.2022 г.
Переработанный вариант 02.11.2022 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Рассматривается задача динамической реконструкции граничного неизвестного входного воздействия для нелинейной системы дифференциальных уравнений с распределенными параметрами типа реакции–диффузии. Представлен алгоритм ее решения, который основан на конструкциях теории управления с обратной связью. Библ. 19.

Ключевые слова: реконструкция, система реакции–диффузии.

DOI: 10.31857/S0044466923060169, **EDN:** TULVKW

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$
\begin{gathered}
x_t(\eta,t) - D_1\Delta x(\eta,t) + k_1 x(\eta,t) = -\gamma_1 x(\eta,t)y(\eta,t), \quad (t,\eta)\in Q,\\
y_t(\eta,t) - D_2\Delta y(\eta,t) + k_2 y(\eta,t) = -\gamma_2 x(\eta,t)y(\eta,t), \quad (t,\eta)\in Q,\\
D_1\partial_\nu x(s,t) + b(s,t,x(s,t)) = u(s,t), \quad (t,s)\in\Sigma,\\
D_2\partial_\nu y(s,t) + k_3 y(s,t) = 0, \quad (t,s)\in\Sigma,\\
x(\eta,0) = x_0(\eta), \quad \eta\in\Omega,\\
y(\eta,0) = y_0(\eta), \quad \eta\in\Omega.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь $Q = T\times\Omega$, $\Sigma = T\times\partial\Omega$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, $n\geq 1$, $b(\cdot)$ – фиксированная функция, свойства которой будут уточнены ниже, $T = [0,\vartheta]$, $\vartheta > 0$, – конечный момент времени, $u(\cdot)$ – входное воздействие, D_1 и D_2 – положительные постоянные, а k_1, k_2, k_3, γ_1 и γ_2 – неотрицательные постоянные. Символ ∂_ν означает производную по внешней нормали к $\partial\Omega$.

В дальнейшем считаем начальное состояние $\{x_0, y_0\}$ системы (1.1), где $x_0 = x_0(\eta)\in C(\tilde{\Omega})$, $y_0 = y_0(\eta)\in C(\tilde{\Omega})$, $\eta\in\Omega$ – неотрицательные функции, известным.

Здесь и всюду ниже $\tilde{\Omega}$ означает замыкание множества Ω.

Введем пространство

$$
W(T) = \{x(\cdot)\in L_2(T;H^1(\Omega)) : y_t(\cdot)\in L_2(T;(H^1(\Omega))^*)\}
$$

с нормой

$$
|x|_{W(T)} = \left(\int_0^\vartheta (|x(t)|^2_{H^1(\Omega)} + |x_t(t)|^2_{(H^1(\Omega))^*})dt\right)^{1/2}.
$$

Здесь $H^1(\Omega)$ – пространства Соболева, $(H^1(\Omega))^*$ – сопряженное к $H^1(\Omega)$ пространство, производная $x_t(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений, $L_2(T;H^1(\Omega))$ – пространство эквивалентных классов абстрактных функций $x(\cdot):T\to H^1(\Omega)$, $\int_0^{\vartheta}|x(t)|^2_{H^1(\Omega)}dt<\infty$ с нормой

$$|x(\cdot)|_{L_2(T;H^1(\Omega))}=\left(\int\limits_0^{\vartheta}x(t)|^2_{H^1(\Omega)}dt\right)^{1/2}.$$

Можно дать другое (эквивалентное [1, с. 23]) определение пространства $W(T)$. Это есть пространство абсолютно непрерывных функций $x(\cdot):T\to H^1(\Omega)$, которые почти всюду на T дифференцируемые и таковы, что $t\to dx(t)/dt\in L_2(T;H^1(\Omega))$. Заметим, что пространство $W(T)$ непрерывно вложено в пространство $C(T;L_2(\Omega))$ – пространство непрерывных функций, действующих из T в пространство $L_2(\Omega)$. Поэтому существует постоянная $c^*>0$ такая, что для всех $x(\cdot)\in W(T)$ выполняется неравенство

$$|x(\cdot)|_{C(T;L_2(\Omega))}\le c^*|x(\cdot)|_{W(T)}.$$

В дальнейшем считаем выполненными следующие два условия из работы [2].

Условие 1. Нелинейная функция $b(s,t,x):\Sigma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является непрерывной по совокупности переменных и монотонно неубывающей по x при всех $(s,t)\in\Sigma$. Кроме того, функция b дважды непрерывно дифференцируема по x, причем функция $\partial^2b(s,t,x)/\partial x^2$ является локально липшицевой, т.е. для любого $\rho>0$ можно указать $L=L(\rho)>0$ такое, что для любых $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $|x_j|\le\rho$, $j=1,2$, и любых $(s,t)\in\Sigma$, выполняется неравенство

$$|\partial^2b(s,t,x_1)/\partial x_1^2-\partial^2b(s,t,x_2)/\partial x_2^2|\le L(\rho)|x_1-x_2|.$$

Здесь и всюду ниже символ $|\cdot|$ означает модуль числа.

Условие 2. Справедливо неравенство $b(s,t,0)\le u(s,t)$ при почти всех $(s,t)\in\Sigma$. Кроме того,

$$\lim_{x\to\infty}|b(\cdot,\cdot,x)|_{C(\tilde{Q})}=\infty.$$

Следуя [2], [3], пару функций $\{x(\cdot),y(\cdot)\}:x(\cdot)=x(\cdot;0,\{x_0,y_0\},u(\cdot))$, $y(\cdot)=y(\cdot,0,\{x_0,y_0\},u(\cdot))\in$ $\in(W(T)\cap L_\infty(Q))^2$, назовем решением (слабым) уравнения (1.1), если выполняются равенства

$$x(\cdot,0)=x_0,\quad y(\cdot,0)=y_0,$$

$$\int\limits_0^{\vartheta}\langle x_t(t),\varphi(t)\rangle_{H^1(\Omega)}dt+\iint\limits_{\Sigma}b(s,t,x(s,t))\varphi(s,t)dsdt+\iint\limits_{Q}(D_1\nabla x(\eta,t)\nabla\varphi(\eta,t)+$$
$$+k_1x(\eta,t)\varphi(\eta,t)+\gamma_1x(\eta,t)y(\eta,t)\varphi(\eta,t))d\eta dt=\iint\limits_{\Sigma}u(s,t)\varphi(s,t)dsdt$$

и

$$\int\limits_0^{\vartheta}\langle_t(t),\varphi(t)\rangle_{H^1(\Omega)}dt+k_3\iint\limits_{\Sigma}y(s,t)\varphi(s,t)dsdt+$$
$$+\iint\limits_{Q}(D_2\nabla y(\eta,t)\nabla\varphi(\eta,t)+k_2y(\eta,t)\varphi(\eta,t)+\gamma_2x(\eta,t)y(\eta,t)\varphi(\eta,t))d\eta dt=0$$

при всех $\varphi(\cdot)\in L_2(T;H^1(\Omega))$. Здесь и всюду ниже $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ означает двойственность между соболевскими пространствами $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$, символ ∇ означает градиент соответствующей функции, а символ ds – меру Лебега на внешней границе $\partial\Omega$. В дальнейшем для всякой функции $\phi(\eta)\in H^1(\Omega)$ под $\phi(s)$ понимаем след функции ϕ на границе области Ω.

Прямым следствием теоремы 2.2. из [2] является теорема 1.

Теорема 1. *Пусть* $x_0(\eta)$ *и* $y_0(\eta)$ *– неотрицательные функции. Тогда, каково бы ни было входное воздействие* $u(\cdot) \in L_\infty(\Sigma)$, *если функция* $b(\cdot)$ *удовлетворяет условиям* 1 *и* 2, *то существует единственное решение системы* (1) $\{x(\cdot), y(\cdot)\} \in (W(T) \cap C(\tilde{Q}))^2$.

Обсуждаемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Имеется система (1.1) с некоторым входным воздействием $u(\cdot)$. Заранее как это воздействие, так и отвечающее ему решение $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ системы не заданы. В каждый момент времени $t \in T$ измеряется решение системы (1.1), т.е. измеряются величины $x(t)$ и $y(t)$. Эти измерения неточны: вместо функций $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ вычисляются функции $\xi^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega))$, $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega))$ и $\xi_1^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\partial\Omega))$ со свойствами

$$|x(t) - \xi^h(t)|_{L_\infty(\Omega)} \le h, \quad |y(t) - \psi^h(t)|_{L_\infty(\Omega)} \le h \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{1.2}$$

$$\left(\int_{\partial\Omega} |\xi_1^h(s,t) - x(s,t)|^2 ds \right)^{1/2} \le h \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{1.3}$$

Здесь число $h \in (0,1)$ характеризует “ошибку” измерений. Задача заключается в том, чтобы построить алгоритм приближенного восстановления неизвестного входного воздействия $u(\cdot)$.

Сформулированная задача относится к классу обратных задач (см. [4–8]). Описываемая ниже методика ее решения развивает подход к решению проблемы динамического восстановления входа, получивший развитие в ряде работ (по поводу этих работ см. монографии [9–12] и обзорную статью [13]). Этот подход основывается на комбинации известного в теории гарантированного управления принципе позиционного управления с моделью (см. [14]), а также одном из основополагающих методов теории некорректных задач – методе сглаживающего функционала (см. [4], [5]). Заметим, что в [9], [10] задачи динамической реконструкции входов изучались для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Вопросы реконструкции граничных входных воздействий для параболических и гиперболических уравнений обсуждались в [15–19]. В настоящей работе, продолжающей цикл цитированных выше работ, мы указываем алгоритм решения задачи реконструкции граничного входного воздействия для системы распределенных уравнений реакции–диффузии.

В соответствии с подходом из цитированных выше работ задача восстановления неизвестного входного воздействия по результатам измерения величин $\{\xi^h(\cdot), \psi^h(\cdot)\}$ заменяется некоторой другой задачей, а именно, задачей позиционного управления вспомогательной системой M (моделью). Таким образом, задача восстановления $u(\cdot)$ сводится к следующим двум задачам:

1) задаче выбора вспомогательной системы M (функционирующей “синхронно” с реальной системой);

2) задаче управления этой системой по принципу обратной связи.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

В гл. I из [11] было отмечено, что для достаточно широкого класса параболических систем в качестве моделей удобно брать “копии” реальных систем. Там же приведены примеры таких систем. Оказывается, что и для рассматриваемой в настоящей работе системы в качестве модели M можно брать ее “копию”. Эта “копия” имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} z_t^h(\eta,t) - D_1\Delta z^h(\eta,t) + k_1 z^h(\eta,t) = -\gamma_1 \xi^h(\eta,t)\psi^h(\eta,t), \quad (t,\eta) \in Q, \\ w_t^h(\eta,t) - D_2\Delta w^h(\eta,t) + k_2 w^h(\eta,t) = -\gamma_2 \xi^h(\eta,t)\psi^h(\eta,t), \quad (t,\eta) \in Q, \\ D_1\partial_\nu z^h(s,t) + b(s,t,z^h(s,t)) = u^h(s,t), \quad (t,s) \in \Sigma, \\ D_2\partial_\nu w^h(s,t) + k_3 w^h(s,t) = 0, \quad (t,s) \in \Sigma, \\ z^h(\eta,0) = x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega, \\ w^h(\eta,0) = y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Таким образом, модель состоит из двух независимых подсистем. Первая подсистема представляет собой нелинейное параболическое уравнение с управлением $u^h(\cdot)$:

$$
\begin{gathered}
z_t^h(\eta,t) - D_1\Delta z^h(\eta,t) + k_1 z^h(\eta,t) = -\gamma_1\xi^h(\eta,t)\psi^h(\eta,t), \quad (t,\eta)\in Q,\\
D_1\partial_\nu z^h(s,t) + b(s,t,z^h(s,t)) = u^h(s,t), \quad (t,s)\in\Sigma,\\
z^h(\eta,0) = x_0(\eta), \quad \eta\in\Omega.
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Вторая подсистема также описывается параболическим уравнением. Но уже линейным, к тому же не содержащим управления

$$
\begin{gathered}
w_t^h(\eta,t) - D_2\Delta w^h(\eta,t) + k_2 w^h(\eta,t) = -\gamma_2\xi^h(\eta,t)\psi^h(\eta,t), \quad (t,\eta)\in Q,\\
D_2\partial_\nu w^h(s,t) + k_3 w^h(s,t) = 0, \quad (t,s)\in\Sigma,\\
w^h(\eta,0) = y_0(\eta), \quad \eta\in\Omega.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Заметим, что вторая подсистема на выбор управления $u^h(\cdot)$ не влияет. Поэтому при решении задачи ее можно опустить, взяв в качестве модели вместо системы (2.1) подсистему (2.2). Подсистема (2.3) потребуется при доказательстве приведенной ниже теоремы 1. Существование и единственность решений $z^h(\cdot)\in W(T)\cap C(\tilde{Q})$ и $w^h(\cdot)\in W(T)\cap C(\tilde{Q})$ приведенных выше подсистем следует, например, из [3, теорема 5.5, с. 268].

Управление $u^h(\cdot)$ в модели (2.1) (подсистеме (2.2)) зададим по формуле

$$
u^h(s,t) = u^{h,\alpha}(s,t) = 1/2\alpha^{-1}(\xi_1^h(s,t) - z^h(s,t)) \quad \text{при п.в.} \quad (s,t)\in\Sigma,
\tag{2.4}
$$

где $\alpha\in(0,1)$ – вспомогательный параметр.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $q\in(0,1)$ – некоторая постоянная. Пусть управление $u^h(\cdot)$ находится по формуле* (7). *Тогда справедливы неравенства*

$$
\varepsilon(t) \le \nu_1(h;q), \quad t\in T,
\tag{2.5}
$$

$$
|u^h(\cdot)|^2_{L_2(T;L_2(\partial\Omega))} \le |u(\cdot)|^2_{L_2(T;L_2(\partial\Omega))} + \nu_2(h;q).
\tag{2.6}
$$

Здесь

$$
\nu_1(h;q) = d^{(1)}(h + \alpha + h^2\alpha^{-1} + h^{2-q}\alpha^{-2}), \quad \nu_2(h;q) = d^{(2)}(h^q + h\alpha^{-1} + h^2\alpha^{-2} + h^{2-q}\alpha^{-3}),
$$

$$
\varepsilon(t) = 1/2|\mu^h(t)|^2_{L_2(\Omega)} + 1/2|\nu^h(t)|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \{D_1|\nabla\mu^h(\eta,\tau)|^2 + D_2|\nabla\nu^h(\eta,\tau)|^2\}d\eta d\tau + k_3\int_0^t\int_{\partial\Omega}(\nu^h(s,\tau))^2 ds d\tau,
$$

$\mu^h(t) = z^h(t) - x(t)$, $\nu^h(t) = w^h(t) - y(t)$, $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ и $\{z^h(\cdot), w^h(\cdot)\}$ – решения систем (1) и (4) соответственно, $d^{(1)}$ и $d^{(2)}$ – положительные постоянные, не зависящие от $u(\cdot)$, $u^h(\cdot)$, $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $z^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$.

Доказательство. Учитывая правило определения функций $\mu^h(\cdot)$ и $\nu^h(\cdot)$, заключаем, что справедливы равенства

$$
\mu^h(\cdot,0) = 0, \quad \nu^h(\cdot,0) = 0,
$$

$$
\begin{gathered}
\int_0^\vartheta \langle\mu_t^h(t),\varphi(t)\rangle_{H^1(\Omega)}dt + \int_0^\vartheta\int_{\partial\Omega}\{b(s,t,z^h(s,t)) - b(s,t,x(s,t))\}\varphi(s,t)ds dt + \int_0^\vartheta\int_\Omega (D_1\nabla\mu^h(\eta,t)\nabla\varphi(\eta,t) + \\
+ k_1\mu^h(\eta,t)\varphi(\eta,t) + \gamma_1\{\xi^h(\eta,t)\psi^h(\eta,t) - x(\eta,t)y(\eta,t)\}\varphi(\eta,t))d\eta dt = \int_0^\vartheta\int_{\partial\Omega}\{u^h(s,t) - u(s,t)\}\varphi(s,t)ds dt
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

и

$$\int_0^{\vartheta}\langle \nu_t^h(t),\varphi(t)\rangle_{H^1(\Omega)}dt + \int_0^{\vartheta}\int_{\partial\Omega}k_3\nu^h(s,t)\varphi(s,t)dsdt + \int_0^{\vartheta}\int_{\Omega}(D_2\nabla\nu^h(\eta,t)\nabla\varphi(\eta,t) + \\ + k_2\nu^h(\eta,t)\varphi(\eta,t) + \gamma_2\{\xi^h(\eta,t)\psi^h(\eta,t) - x(\eta,t)y(\eta,t)\}\varphi(\eta,t))d\eta dt = 0. \tag{2.8}$$

Равенства (2.7) и (2.8) справедливы при любых $\phi(\cdot)\in L_2(T;H^1(\Omega))$. Положив в (2.7)

$$\phi(\eta,t) = \begin{cases}\mu^h(\eta,t), & \eta\in\Omega,\ t\in[0,r],\\ 0, & \eta\in\Omega,\ t\in(r,\vartheta],\end{cases}$$

а в (2.8)

$$\phi(\eta,t) = \begin{cases}\nu^h(\eta,t), & \eta\in\Omega,\ t\in[0,r],\\ 0, & \eta\in\Omega,\ t\in(r,\vartheta],\end{cases}$$

и сложив полученные выражения, будем иметь

$$\int_0^r (d\varepsilon(t)/dt + I_{1t} + I_{2t})dt \le \int_0^r\left(\sum_{j=3}^5 I_{jt}^h\right)dt \quad \forall r\in\mathbb{R}, \tag{2.9}$$

где

$$I_{1t}^h = \int_{\partial Q}(b(s,t,z^h(t,s)) - b(s,t,x(t,s))(z^h(s,t) - x(s,t))ds,$$

$$I_{2t}^h = k_1|\mu^h(t)|^2_{L_2(Q)} + k_2|\nu^h(t)|^2_{L_2(Q)},$$

$$I_{3t}^h = \int_{\partial\Omega}\{u^h(s,t) - u(s,t)\}(z^h(s,t) - x(s,t))ds,$$

$$I_{4t}^h = \gamma_1\int_{\Omega}|\xi^h(\eta,t)\psi^h(\eta,t) - x(\eta,t)y(\eta,t)||\mu^h(\eta,t)|d\eta,$$

$$I_{5t}^h = \gamma_2\int_{\Omega}|\xi^h(\eta,t)\psi^h(\eta,t) - x(\eta,t)y(\eta,t)||\nu^h(\eta,t))|d\eta.$$

Учитывая монотонность функции $b(\cdot)$ (см. условие 1), заключаем, что справедливо неравенство

$$I_{1t}^h \ge 0 \quad \text{при п.в.} \quad t\in T. \tag{2.10}$$

В свою очередь, в силу неравенств (1.2) можно указать такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, не зависящие от $h\in(0,1)$, что при п.в. $t\in T$ справедливы оценки

$$I_{4t}^h \le C_1 h\int_{\Omega}|\mu^h(\eta,t)|d\eta, \quad I_{5t}^h \le C_2 h\int_{\Omega}|\nu^h(\eta,t)|d\eta. \tag{2.11}$$

Из (2.11) получаем в силу неравенства Гёльдера

$$I_{4t}^h \le C_3 h|\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)} \le C_4 h + C_5 h|\mu^h(t)|^2_{L_2(\Omega)}, \quad I_{5t}^h \le C_6 h|\nu^h(t)|_{L_2(\Omega)} \le C_7 h + C_8 h|\nu^h(t)|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Кроме того, в виду (1.3) имеем

$$I_{3t}^h \le \pi_t(z,\xi,u,u^h) + \int_{\partial\Omega}|\xi_1^h(s,t) - x(s,t)|\{|u^h(s,t)| + |u(s,t)|\}ds \le \pi_t(z,\xi,u,u^h) + \\ + \left(\int_{\partial\Omega}|\xi_1^h(s,t) - x(s,t)|^2ds\right)^{1/2}\left(\left(\int_{\partial\Omega}|u^h(s,t)|^2ds\right)^{1/2} + \left(\int_{\partial\Omega}|u(s,t)|^2ds\right)^{1/2}\right) \le \\ \le \pi_t(z,\xi,u,u^h) + h\{|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}\}, \tag{2.13}$$

где

$$\pi_t(z,\xi,u,u^h) = \int_{\partial\Omega}\left(z^h(s,t) - \xi_1^h(s,t))(u^h(s,t) - u(s,t)\right)ds.$$

В силу (2.4) справедливо неравенство

$$\pi_t(z,\xi,u,u^h) + \alpha\{|u^h(t)|^2_{L_2(\partial\Omega)} - |u(t)|^2_{L_2(\partial\Omega)}\} \le 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{2.14}$$

Из (2.9), учитывая (2.10), (2.12)–(2.14), получаем

$$\int_0^s \Big(d\varepsilon(t)/dt + \alpha\{|u^h(t)|^2_{L_2(\partial\Omega)} - |u(t)|^2_{L_2(\partial\Omega)}\}\Big) dt \le C_9 h + h\int_0^s (C_5|\mu^h(t)|^2_{L_2(\Omega)} + \\ + C_8|\nu^h(t)|^2_{L_2(\Omega)} + \{|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}\})dt \quad \forall s \in T. \tag{2.15}$$

Обозначим

$$\gamma_\alpha(t) = \varepsilon(t) + \alpha\int_0^t |u^h(\tau)|^2_{L_2(\partial\Omega)} d\tau.$$

Тогда из (2.15) получим

$$d\gamma_\alpha(t)/dt \le C_{10}h\{1 + |\mu^h(t)|^2_{L_2(\Omega)} + |\nu^h(t)|^2_{L_2(\Omega)} + |u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}\} + \alpha|u(t)|^2_{L_2(\partial\Omega)} \tag{2.16}$$

при п.в. $t \in T$. Далее, имеем

$$|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega} \le \alpha^{-1}|\xi^h(t) - z^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

Поэтому, каково бы ни было $q \in (0,2)$, ввиду (1.3), при п.в. $t \in T$ имеет место неравенство

$$h|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \le h^2\alpha^{-1} + h\alpha^{-1}|\mu^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \le h^2\alpha^{-1} + h^{2-q}\alpha^2 + h^q|\mu^h(t)|^2_{L_2(\partial\Omega)}. \tag{2.17}$$

Из (2.16), учитывая (2.17), получаем

$$\frac{d\gamma_\alpha(t)}{dt} \le C_{11}\max\{h,h^q\}\gamma_\alpha(t) + C_{12}(h + h^2\alpha^{-1} + h^{2-q}\alpha^{-2} + h|u(t)|_{L_2(\partial\Omega} + \alpha|u(t)|^2_{L_2(\partial\Omega)}) \\ \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{2.18}$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла, отсюда получаем

$$\gamma_\alpha(t) \le C_{13}\{h + \alpha + h^2\alpha^{-1} + h^{2-q}\alpha^{-2}\}, \quad t \in T. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует неравенство (2.5). Установим справедливость неравенства (2.6). Если $q \in (0,1)$, $h \in (0,1)$, то из (2.18), учитывая (2.19), получаем

$$\alpha\int_0^t |u^h(\tau)|^2_{L_2(\partial\Omega)} d\tau \le \alpha\int_0^t |u(\tau)|^2_{L_2(\partial\Omega)} d\tau + C_{15}(h + \alpha h^q + h^2\alpha^{-1} + h^{2-q}\alpha^{-2}).$$

Следовательно,

$$|u^h(\cdot)|^2_{L_2(T;L_2(\partial\Omega))} \le |u(\cdot)|^2_{L_2(T;L_2(\partial\Omega))} + C_{16}(h^q + h\alpha^{-1} + h^2\alpha^{-2} + h^{2-q}\alpha^{-3}). \tag{2.20}$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Из предыдущей теоремы вытекает

Следствие. Если $\alpha = h^\rho$, $q = 1 - \rho$, $\rho = \text{const} \in (0,1/2)$, то справедливы неравенства

$$\varepsilon(t) \le d^{(3)}h^\rho,$$

$$|u^h(\cdot)|^2_{L_2(T;L_2\partial\Omega))} \le |u(\cdot)|^2_{L_2(T;L_2(\partial\Omega))} + d^{(4)}h^{1-2\rho}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $h^{2-q}\alpha^{-3}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$, *где* $q = \text{const} \in (0,1)$. *Тогда имеет место сходимость*

$$u^h(\cdot) \to u(\cdot) \quad \textit{в} \quad L_2 = L_2(T;L_2(\partial\Omega)) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство. Покажем, что, каковы бы ни были последовательности чисел $h_j \to 0+$ при $j \to \infty$, а также последовательности функций $\xi^{h_j}(\cdot), \psi^{h_j}(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega))$, $\xi_1^{h_j}(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\partial\Omega))$ со свойствами (1.2), (1.3) (в (1.2) и (1.3) мы полагаем $h = h_j$), имеет место сходимость

$$u^{h_j}(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Здесь и ниже управления $u^{h_j}(\cdot)$ определяются согласно (2.4), где полагается $h = h_j$. Предполагая противное, заключаем, что найдется подпоследовательность последовательности $u^{h_j}(\cdot)$ (для простоты обозначаем ее тем же символом, т.е. $u^{h_j}(\cdot)$) такая, что

$$u^{h_j}(\cdot) \to u_0(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2 \quad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{2.21}$$

$$u_0(\cdot) \neq u(\cdot). \tag{2.22}$$

Пусть $q^{h_j}(t) = z^{h_j}(t) - z^0(t)$, $p^{h_j}(t) = w^{h_j}(t) - w^0(t)$, где $\{z^{h_j}(\cdot), w^{h_j}(\cdot)\}$ – решение системы (2.1) при $h = h_j$, а $\{z^0(\cdot), w^0(\cdot)\}$ – решение системы

$$\begin{gathered} z_t^0(\eta,t) - D_1\Delta z^0(\eta,t) + k_1 z^0(\eta,t) = -\gamma_1 x(\eta,t)y(\eta,t), \quad (t,\eta) \in Q, \\ w_t^0(\eta,t) - D_2\Delta w^0(\eta,t) + k_2 w^0(\eta,t) = -\gamma_2 x(\eta,t)y(\eta,t), \quad (t,\eta) \in Q, \\ D_1\partial_\nu z^0(s,t) + b(s,t,z^0(s,t)) = u_0(s,t), \quad (t,s) \in \Sigma, \\ D_2\partial_\nu w^0(s,t) + k_3 w^0(s,t) = 0, \quad (t,s) \in \Sigma, \\ z^0(\eta,0) = x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega, \\ w^0(\eta,0) = y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{gathered} \tag{2.23}$$

В (2.23) $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ означает решение системы (1.1). Аналогично (2.9), устанавливаем неравенство

$$\int_0^s \left(d\tilde{\varepsilon}^{h_j}(t)/dt + \tilde{I}_{1t}^{h_j} + \tilde{I}_{2t}^{h_j} \right) dt \le \int_0^s \left(\sum_{j=3}^5 \tilde{I}_{jt}^{h_j} \right) dt, \quad s \in T, \tag{2.24}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}^{h_j}(t) = 1/2|q^{h_j}(t)|^2_{L_2(\Omega)} + 1/2|p^{h_j}(t)|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega \{D_1|\nabla q^{h_j}(\eta,\tau)|^2 + D_2|\nabla p^{h_j}(\eta,\tau)|^2\} d\eta d\tau + k_3 \int_0^t \int_{\partial\Omega} (p^{h_j}(s,\tau))^2 ds d\tau, \quad t \in T,$$

$$\tilde{I}_{1t}^{h_j} = \int_{\partial\Omega} (b(s,t,z^{h_j}(t,s)) - b(s,t,z^0(t,s))(z^{h_j}(s,t) - z^0(s,t)) ds,$$

$$\tilde{I}_{2t}^{h_j} = k_1|q^{h_j}(t)|^2_{L_2(\Omega)} + k_2|p^{h_j}(t)|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$\tilde{I}_{3t}^{h_j} = \int_{\partial\Omega} \{u^{h_j}(s,t) - u_0(s,t)\}(z^{h_j}(s,t) - z^0(s,t)) ds,$$

$$\tilde{I}_{4t}^{h_j} = \gamma_1 \int_\Omega |\xi^{h_j}(\eta,t)\psi^{h_j}(\eta,t) - x(\eta,t)y(\eta,t)||q^{h_j}(\eta,t)| d\eta,$$

$$\tilde{I}_{5t}^{h_j} = \gamma_2 \int_\Omega |\xi^{h_j}(\eta,t)\psi^{h_j}(\eta,t) - x(\eta,t)y(\eta,t)||p^{h_j}(\eta,t))| d\eta.$$

Учитывая монотонность функции $b(\cdot)$ (см. условие 1), заключаем, что верно неравенство

$$\tilde{I}_{1t}^{h_j} \ge 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{2.25}$$

В свою очередь, в силу неравенств (1.2) можно указать такие числа $C_1^* > 0$ и $C_2^* > 0$, не зависящие от $h \in (0,1)$, что при п.в. $t \in T$ справедливы оценки

$$\tilde{I}_{4t}^{h_j} \le C_1^* h_j \int_\Omega |q^{h_j}(\eta,t)| d\eta, \quad \tilde{I}_{5t}^{h_j} \le C_2^* h_j \int_\Omega |p^{h_j}(\eta,t)| d\eta. \tag{2.26}$$

Из (2.26) получаем, воспользовавшись неравенством Гёльдера,

$$\tilde{I}_{4t}^{h_j} \le C_3^* h_j |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)} \le C_4^* h_j + C_5^* h_j |q^{h_j}(t)|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \tilde{I}_{5t}^{h_j} \le C_6^* h_j |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)} \le C_7^* h_j + C_8^* h_j |p^{h_j}(t)|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.27}$$

Рассмотрим $\tilde{I}_3^{h_j}(t)$. Имеем

$$\tilde{I}_3^{h_j}(t) = \int_{\partial\Omega} (z^{h_j}(s,t) - z(s,t))(u^{h_j}(s,t) - u_0(s,t))ds + \int_{\partial\Omega} (z(s,t) - z^0(s,t))(u^{h_j}(s,t) - u_0(s,t))ds.$$

Тогда

$$\sup_{t\in T} \left| \int_0^t \tilde{I}_3^{h_j}(\tau) d\tau \right| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{2.28}$$

Этот факт вытекает из теоремы 2 и слабой сходимости последовательности функций $u^{h_j}(\cdot)$ к $u_0(\cdot)$ (см. (2.21)). В таком случае из (2.24)–(2.28) получаем

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sup_{t\in T} \tilde{\varepsilon}^{h_j}(t) \to 0. \tag{2.29}$$

Учитывая (2.29), а также теорему 2, устанавливаем справедливость равенств

$$\sup_{t\in T} |z^0(t) - z(t)|_H = 0, \quad \sup_{t\in T} |y^0(t) - y(t)|_H = 0.$$

Значит,

$$y^0(\cdot) = y(\cdot), \quad z^0(\cdot) = z(\cdot).$$

Поэтому

$$u_0(\cdot) = u(\cdot).$$

Последнее противоречит (2.21), (2.22). Следовательно,

$$u^{h_j}(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{2.30}$$

Ввиду известного свойства слабого предела, из (2.30) вытекает неравенство

$$\underline{\lim}_{j\to\infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \ge |u(\cdot)|_{L_2}. \tag{2.31}$$

Кроме того, в силу (2.6) имеет место оценка

$$|u^{h_j}(\cdot)|^2_{L_2} \le |u(\cdot)|^2_{L_2} + \nu_2(h;q).$$

В таком случае

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \le |u(\cdot)|_{L_2}. \tag{2.32}$$

Значит (см. (2.31), (2.32)),

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \le |u(\cdot)|_{L_2} \le \underline{\lim}_{j\to\infty} |\tilde{u}^{h_j}(\cdot)|_{L_2}.$$

Отсюда следует сходимость

$$|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \to |u(\cdot)|_{L_2} \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{2.33}$$

Учитывая (2.30) и (2.33), в силу теоремы Ефимова–Стечкина заключаем

$$u^{h_j}(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Теорема 3 доказана.

3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

При некоторых дополнительных условиях можно указать оценку скорости сходимости алгоритма (см. ниже теорему 4).

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1 (см. [11], с. 47). *Пусть* $V(\cdot)\in L_\infty(T_*;V^*)$ и $\tilde v(\cdot)\in W(T_*;V)$, $T_*=[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$,

$$\left|\int_a^t V(\tau)d\tau\right|_{V^*}\le \varepsilon_*,\quad |\tilde v(t)|_V\le K\quad \forall t\in T_*.$$

Тогда для всех $t\in T_*$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^t\langle V(\tau),\tilde v(\tau)\rangle_V\,d\tau\right|\le \varepsilon_*(K+\mathrm{var}(T_*;\tilde v(\cdot))).$$

Здесь V банахово пространство с нормой $|\cdot|_V$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – двойственость между V и V^*. Символ $\mathrm{var}(T_*;v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_*, а символ $W(T_*;V)$ – множество функций $y(\cdot):T_*\to H_1$ ограниченной вариации.

Теорема 4 *Пусть функция* $z\to b(s,t,z)$ *липшицева и выполнены условия теоремы* 3. *Пусть также* $u(s,t)=u_*(s,t)$ *при п.в.* $(s,t)\in\Sigma$, *где* $u_*(\cdot)\in W(T;H^1(\Omega))$. *Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма*:

$$|u(\cdot)-u^h(\cdot)|^2_{L_2(T;L_2(\partial\Omega))}\le c^{(0)}\{\nu_1^{1/2}(h;q)+\nu_2(h;q)\},$$

где $c^{(0)}$ *– некоторая постоянная, не зависящая от* $h\in(0,1)$.

Доказательство. Введем оператор $B:L_2(\partial\Omega)\to(H^1(\Omega))^*$ по формуле

$$\langle Bv,\phi\rangle_{H^1(\Omega)}=\int_{\partial\Omega}v(s)\phi(s)ds\quad\forall\phi\in H^1(\Omega).$$

Пусть

$$\phi_t(\tau)=\begin{cases}\phi, & \tau\in[0,t],\\ 0, & \tau\in(t,\vartheta],\end{cases}$$

где $\phi\in H^1(\Omega)$. Вычтем (2.2) из соответствующих соотношений в (1.1) и умножим полученную разность на $\phi_t(\cdot)\in L_2(T;H^1(\Omega))$. После интегрирования получим

$$\left\langle\int_0^t B\{u^h(\tau)-u(\tau)\}d\tau,\varphi\right\rangle_{H^1(\Omega)}\le\sum_{j=1}^{j=5}|J^h_{jt}|.\tag{3.1}$$

Здесь

$$J^h_{1t}(\varphi)=\langle\mu^h_t(t),\varphi\rangle_{H^1(\Omega)},$$

$$J^h_{2t}(\varphi)=\int_0^t\int_{\partial\Omega}(b(s,\tau,z^h(s,\tau))-b(s,\tau,z(s,\tau))\varphi(s)ds,$$

$$J^h_{3t}(\varphi)=D_1\int_0^t\int_Q\nabla\mu^h(\eta,\tau)\nabla\varphi(\eta,\tau)d\eta d\tau,$$

$$J^h_{4t}(\varphi)=\gamma_1\int_0^t\int_\Omega(\xi^h(\eta,\tau)\psi^h(\eta,\tau)-x(\eta,\tau)y(\eta,\tau))\varphi(\eta)d\eta,$$

$$J_{5t}^h(\varphi) = k_1 \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \mu^h(\eta, \tau)\varphi(\eta) d\eta d\tau.$$

Далее, имеем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \le 1} |J_{1t}^h(\varphi)| \le c_1 |\mu^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*} \le c_2 |\mu^h(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Учитывая липшицевость функции $b(\cdot)$, получаем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \le 1} |J_{2t}^h(\varphi)| \le c_3 \sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \le 1} \int\limits_0^t |\mu^h(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)} |\varphi|_{L_2(\partial\Omega)} d\tau \le c_4 \int\limits_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \tag{3.3}$$

Кроме того,

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \le 1} |J_{3t}^h(\varphi)| \le c_5 \int\limits_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \tag{3.4}$$

В свою очередь, в силу (1.2)

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \le 1} |J_{4t}^h(\varphi)| \le c_6 h. \tag{3.5}$$

Далее, имеем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \le 1} |J_{5t}^h(\varphi)| \le c_7 \int\limits_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \tag{3.6}$$

Объединив (3.2)–(3.6), получим из (3.1)

$$\left| \int\limits_0^t B\{u^h(\tau) - u(\tau)\} d\tau \right|_{(H^1(\Omega))^*} \le c_8 \left(h + \int\limits_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau \right). \tag{3.7}$$

Из (3.7) в силу теоремы 2 (см. неравенство (2.5)) вытекает оценка

$$\left| \int\limits_0^t B\{u^h(\tau) - u(\tau)\} d\tau \right|_{(H^1(\Omega))^*} \le c_9 \nu_1^{1/2}(h; q).$$

Отсюда, учитывая правило определения оператора B, а также лемму 2, получаем

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} (u^h(s, \tau) - u(s, \tau)) u(s, \tau) d\tau \right| \le c_{10} \nu_1^{1/2}(h; q). \tag{3.8}$$

Далее, воспользовавшись (2.6), (3.8), устанавливаем неравенство

$$|u^h(\cdot) - u(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \le 2 \left| \int\limits_0^\vartheta \int\limits_{\partial\Omega} (u(s, \tau) - u : p(s, \tau)) u(s, \tau) ds d\tau \right| + \nu_2(h; q) \le c_{11} \{\nu_1^{1/2}(h; q) + \nu_2(h; q)\}.$$

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barbu V.* Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces. N.Y.: Springer, 2010.
2. *Barthel W., John C., Tröltzsch F.* Optimal boundary control of a system of reaction diffusion equations // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2010. V. 90. P. 966–982.
3. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. AMS, 2010.
4. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1985.
6. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980.

7. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. *Kabanikhin S.I.* Inverse and ill-posed problems. Berlin: De Gruyter, 2011.
9. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.
10. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999.
11. *Maksimov V.I.* Dynamical inverse problems of distributed systems. VSP, Netherlands, 2002.
12. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.
13. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В, Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 129–161.
14. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
15. *Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I.* Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. V. 9. № 2. P. 149–162.
16. *Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 14–26.
17. *Максимов В.И.* Моделирование неизвестных возмущений в нелинейных параболических системах – вариационных неравенствах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 157–162.
18. *Maksimov V.I., Pandolfi L.* Dynamical reconstruction of inputs for contraction semigroup systems: boundary input case // J. Optim. Theory Appl. 1999. V. 103. № 2. P. 401–420.
19. *Maksimov V.* On reconstruction of boundary controls in a parabolic equations // Adv. Differ. Equ. 2009. V. 14. № 11–12. P. 1193–1211.