
**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.518.8

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПОМОЩЬЮ
МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОПЕРАТОРОВ СИНК-ПРИБЛИЖЕНИЙ**

© 2023 г. А. Ю. Трынин^{1,*}

¹ 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83, Саратовский гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского, Россия

*e-mail: atrynin@gmail.com, tayu@rambler.ru

Поступила в редакцию 08.12.2022 г.
Переработанный вариант 08.12.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Предложен новый метод получения обобщенного решения смешанной краевой задачи для уравнения параболического типа с граничными условиями третьего рода и непрерывным начальным условием. Обобщенные функции понимаются в смысле секвенциального подхода. В качестве промежуточного приближения используется модифицированный оператор синк-аппроксимаций. Решение получено в виде ряда, равномерно сходящегося внутри области определения решения. Библ. 49. Фиг. 1.

Ключевые слова: смешанная краевая задача, обобщенное решение, синк-аппроксимации, равномерная сходимость.

DOI: 10.31857/S0044466923050186, **EDN:** PKMNTJ

ВВЕДЕНИЕ

Оператор синк-приближений и его модификации, появившиеся в теореме отсчетов и ее обобщениях, нашли применение (см. [1–8]) в самых различных областях приложений конструктивной теории функций. Основательно разработанный аппарат рядов Фурье (см., например, [9–11]), метод характеристик, принцип сжимающих отображений и другие аналитические методы позволяют интенсивно изучать (см. [12–29]) самые тонкие вопросы в области решения смешанных краевых задач с линейными уравнениями второго порядка. Вместе с тем для реализации таких методов требуется использование вспомогательных задач, например, решение задачи Гурса или вычисление коэффициентов Фурье от функций, входящих в условия задачи. Нетривиальность аналитического представления решения задачи Гурса приводит к тому, что метод характеристик используется, как правило, для исследования корректности по Адамару смешанных краевых задач. Семейство методов Фурье, имеющих непреходящее значение в области фундаментальных исследований решений задач математической физики, требует возможности разложения в ряд Фурье функций, входящих в условия задачи. Это возможно сделать далеко не для всех непрерывных функций, даже удовлетворяющих краевым условиям. Кроме того, при подсчете коэффициентов Фурье в результате численного интегрирования быстро осциллирующих функций быстро нарастает вычислительная погрешность таких методов при их реализации в вычислительной математике, что делает затруднительным их применение в прикладных задачах компьютерных наук. Не менее основательно развита теория разностных схем (см., например, [30–36]). Этот подход к решению смешанных краевых задач для уравнения параболического типа очень хорошо зарекомендовал себя с точки зрения прикладной математики. Большинство успехов компьютерных наук в этой области связано именно с применением алгоритмов, основанных на разностных схемах. Но преимущества анализа Фурье, такие как возможность организации фильтрации сигналов, подавление помех в начальных условиях и т.п., остаются за рамками возможности этих алгоритмов.

В настоящей работе предложен метод решения смешанных краевых задач для уравнения параболического типа, сочетающий в себе достоинства обоих описанных подходов. С точки зрения фундаментальной математики здесь решена смешанная краевая задача с произвольными непрерывными, не обязательно удовлетворяющими граничным условиям, функциями в начальных

условиях и неоднородности уравнения. Вместо коэффициентов Фурье функций, входящих в условия задачи, используются их значения на счетном множестве равноотстоящих узлов. Предложенный метод относительно прост с точки зрения численной реализации нового способа получения обобщенного решения изучаемых задач математической физики. На каждом шаге выполнения алгоритма в качестве области определения его информационного оператора служит конечный набор значений непрерывных функций условий задачи. Единственное, что требуется для реализации предложенного метода в компьютерных науках, это обеспеченность сервисными средствами решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритм предусматривает возможность использовать заранее подсчитанные коэффициенты Фурье для счетного набора вспомогательных функций, что резко увеличивает скорость его работы, так как все решение сводится к вычислению линейной комбинации этих функций. В заключении работы предложен способ нахождения коэффициентов Фурье вспомогательных функций модельной задачи с помощью резольвенты одного дифференциального оператора Коши третьего порядка, исключая необходимость использования квадратурных формул для быстро осциллирующих функций.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим смешанную краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = f(x, t), \tag{1}$$

$$u(0, t) \cos \alpha + u_x(0, t) \sin \alpha = 0, \tag{2}$$

$$u(\pi, t) \cos \beta + u_x(\pi, t) \sin \beta = 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{4}$$

где $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ при $T > 0$, а функции f и φ являются непрерывными, каждая на своей области определения. Удовлетворение граничным условиям (2), (3) функциями f и φ не предполагается. Функция q имеет ограниченную вариацию.

Сначала сделаем ряд определений. В предположении $\rho_\lambda \geq 0$ при каждом неотрицательном λ считаем в дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, что зависящая от параметра λ функция q_λ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda} [0, \pi]$ радиуса $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. такая, что

$$V_0^\pi [q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad q_\lambda(0) = 0. \tag{5}$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda} [0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ нули решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \tag{6}$$

или при дополнительном условии

$$V_0^\pi [q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \neq 0 \tag{7}$$

задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \tag{8}$$

попадающие в $[0, \pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \dots < x_{n(\lambda),\lambda} \leq \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \tag{9}$$

(Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$, $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули продолжения решения задач Коши (6) или (8) после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0, \pi]$ с сохранением ограниченности вариации.) Теорема осцилляции или метод контурного интегрирования при условии (5) или (7) обеспечивают неограниченное возрастание количества нулей (9) $n(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. В дальнейшем для краткости будем обозначать $n = n(\lambda)$.

Рассмотрим функции

$$s_{k,\lambda}(x) = \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})}, \tag{10}$$

где $y(x, \lambda)$ есть решения задач Коши (6) или (8) с нулями $x_{k,\lambda}$, перенумерованными согласно соотношению (9).

Определение 1. На пространстве непрерывных на $[0, \pi]$ функций f определим операторы

$$AT_\lambda(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0) \right\} (s_{k-1,\lambda}(x) + s_{k,\lambda}(x)) + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0) \tag{11}$$

или, в другом виде,

$$\begin{aligned} AT_\lambda(f, x) &\equiv \widetilde{AT}_\lambda(f, x) + \left\{ \frac{f(x_{n,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0))x_{n,\lambda}}{\pi} - f(0) \right\} s_{n,\lambda}(x) - \\ &- \left\{ \frac{f(x_{0,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0))x_{0,\lambda}}{\pi} - f(0) \right\} s_{0,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{f(x_{k+1,\lambda}) + f(x_{k,\lambda})}{2} - \right. \\ &- \left. \frac{(f(\pi) - f(0))(x_{k+1,\lambda} + x_{k,\lambda})}{\pi} - f(0) \right\} s_{k,\lambda}(x) + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0) + \\ &+ \left\{ \frac{f(x_{n,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0))x_{n,\lambda}}{\pi} - f(0) \right\} s_{n,\lambda}(x) - \left\{ \frac{f(x_{0,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0))x_{0,\lambda}}{\pi} - f(0) \right\} s_{0,\lambda}(x), \end{aligned} \tag{12}$$

$$AT_\lambda^{(1)}(f, x) = \frac{d}{dx} AT_\lambda(f, x), \tag{13}$$

$$AT_\lambda^{(2)}(f, x) = \frac{d^2}{dx^2} AT_\lambda(f, x). \tag{14}$$

Особо отметим, что значения операторов в определении 1 зависят только от значений функции $f(x_{k,\lambda})$ в нулях $x_{k,\lambda}$ функций $y(x, \lambda)$.

Обозначим последовательность действительных чисел $\phi = \{\phi_n\}_{n=1}^\infty$, $0 \leq \phi_n < \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_{k,\lambda_n} = k\pi/n + \phi_n$ при $0 \leq k \leq n - \text{sign}(\phi_n)$. Определим линейный оператор синк-аппроксимаций, ставящий каждой конечнозначной на множестве $\{x_{k,\lambda_n}\}_{k=0, n=1}^{n-\text{sign}(\phi_n), \infty}$ функции f целую функцию по правилу

$$\begin{aligned} L_n(\phi, f, x) &= \sum_{k=0}^{n-\text{sign}(\phi_n)} \frac{\sin(n(x - \phi_n) - k\pi)}{n(x - \phi_n) - k\pi} f(x_{k,\lambda_n}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-\text{sign}(\phi_n)} \frac{(-1)^k \sin n(x - \phi_n)}{n(x - \phi_n) - k\pi} f(x_{k,\lambda_n}) = \sum_{k=0}^{n-\text{sign}(\phi_n)} l_{k,n}(x - \phi_n) f(x_{k,\lambda_n}). \end{aligned} \tag{15}$$

Необходимые и достаточные условия поточечной и равномерной сходимости значений таких операторов получены в [37]. А в [38] построен пример непрерывной функции, которую нельзя приблизить значениями такого оператора ни в одной точке интервала $(0, \pi)$.

Поэтому рассмотрим одну модификацию этого оператора, являющуюся частным случаем оператора (11), построенного по решениям задач (6), (8), когда $q_\lambda \equiv \text{const}$, $h(\lambda) \equiv 1$.

На множестве функций f , заданных в точках $\{x_{k,\lambda_n}\}_{k=0, n=1}^{n-\text{sign}(\phi_n), \infty}$, определим оператор

$$\begin{aligned} AT_n^\phi(f, x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-\text{sign}(\phi_n)} \left\{ f(x_{k,\lambda_n}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda_n} - f(0) \right\} \times \\ &\times (l_{k-1,n}(x - \phi_n) + l_{k,n}(x - \phi_n)) + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0), \end{aligned} \tag{16}$$

где фундаментальные функции $l_{k,n}(x - \phi_n)$ определены в (15). В частном случае, когда потенциал задач Коши (6) или (8) $q_\lambda \equiv \text{const}$, а вместо непрерывно меняющегося параметра λ рассматриваем последовательность $\lambda = \lambda_n$ и $h(\lambda) \equiv 1$, получаем тождества

$$L_n(\phi, f, x) \equiv \sum_{k=0}^{n(\lambda)} f(x_{k,\lambda_n}) s_{k,\lambda_n}(x) = S_{\lambda_n}(f, x), \tag{17}$$

$$l_{k,n}(x - \phi_n) \equiv s_{k,\lambda_n}. \tag{18}$$

Наряду с теорией С.Л. Соболева, основы которой изложены в знаменитой монографии [39] (см. также [12–15]), в которой для введения понятия обобщенной функции используется сходимость основных функций в метрике пространства Лебега, достаточно давно применялся другой подход к построению теории обобщенных функций. Этот подход предусматривает использование равномерной сходимости основных функций для построения классов эквивалентных последовательностей, связанных с обобщенной функцией. Например, такая теория построена в [14], гл. 1, § 9, а авторы монографии [40] этот подход называют секвенциальным. Мы будем использовать частный случай определения обобщенной функции, понимаемой в смысле секвенциального подхода (см. [40], п. 1.3).

Определение 2. Класс эквивалентных последовательностей непрерывно дифференцируемых на компакте K функций, т.е. сходящихся к одной и той же непрерывной функции по норме чебышёвского пространства $\|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|$, будем называть *обобщенной функцией, определенной на компакте K* .

Понятно, что непрерывно дифференцируемая функция f эквивалентна обобщенной функции, представляющей собой класс эквивалентных функциональных последовательностей, сходящихся к ней самой, так как стационарная последовательность $f_n \equiv f$ принадлежит этому классу. Мы будем считать решением смешанной краевой задачи (1)–(4) обобщенную функцию в терминах определения 2. Поэтому в случае, когда классическое решение существует, оно будет совпадать с нашим решением.

После замены $u(x, t) = U(x)V(t)$ в смешанной краевой задаче (1)–(4) и разделения переменных в однородном уравнении, соответствующем уравнению (1), получим систему уравнений, связанных между собой спектральным параметром $\hat{\lambda}$:

$$U'' + [\hat{\lambda} - q(x)]U = 0, \quad V' + \hat{\lambda}V = 0. \tag{19}$$

Добавив к уравнению (19) соответствующие условиям (2), (3) граничные условия для функции U , получим регулярную задачу Штурма–Лиувилля

$$U'' + [\hat{\lambda} - q(x)]U = 0, \quad U(0)\cos\alpha + U'(0)\sin\alpha = 0, \tag{20}$$

$$U(\pi)\cos\beta + U'(\pi)\sin\beta = 0. \tag{21}$$

Свойства таких задач хорошо изучены, например, в [41]. Обозначим собственные значения и соответствующие им ортонормированные собственные функции задачи (19)–(21) $\hat{\lambda}_m := \hat{\lambda}_m(q, \alpha, \beta)$ и $U_m := U_m(q, \alpha, \beta, x)$, $m = 0, 1, \dots$, соответственно.

Коэффициенты Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (19)–(21) функций (18) и линейной функции обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{k,n,m} &= \int_0^\pi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) l_{k,n}(\xi - \phi_n) d\xi, \\ \tau_m^{(0)} &= \int_0^\pi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) d\xi, \quad \tau_m^{(1)} = \int_0^\pi \xi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) d\xi. \end{aligned} \tag{22}$$

Набор коэффициентов Фурье (22) не зависит ни от начального условия (4), ни от правой части уравнения (1). Он определяется только параметрами смешанной краевой задачи (потенциа-

лом и граничными условиями) и может быть определен заранее для каждой задачи вида (1)–(4). А через

$$\widehat{AT}_{n,m}^\phi[f] := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\tau_{k-1,n,m} + \tau_{k,n,m}) \left\{ f(x_{k,\lambda_n}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda_n} - f(0) \right\} + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \tau_m^{(1)} + f(0) \tau_m^{(0)} \tag{23}$$

обозначим коэффициенты Фурье значения оператора (16) для произвольной функции $f \in C[0, \pi]$.

Положим

$$v_n = \begin{cases} -e^{-\lambda_n} (AT_n^\phi(f, 0) \operatorname{ctg} \alpha + AT_n^{\phi_1}(f, 0)) & \text{при } \alpha \neq \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \\ AT_n^\phi(f, 0) & \text{при } \alpha = \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} -e^{-\lambda_n} (AT_n^\phi(f, \pi) \operatorname{ctg} \beta + AT_n^{\phi_1}(f, \pi)) & \text{при } \beta \neq \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \\ AT_n^\phi(f, \pi) & \text{при } \beta = \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\mu_n = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\lambda_n}.$$

На множестве функций f заданных в точках $\{x_{k,\lambda_n}\}_{k=0,n=1}^{n-\operatorname{sign}(\phi_n), \infty}$ определим операторы

$$\eta(x, \lambda_n) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1}{3}} v_n \mu_n x & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{|\mu_n|} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right], \quad \alpha \neq \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \\ v_n \sin^3 \left(\mu_n \left(x + \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \right) & \text{при} \\ x \in \left[\frac{1}{|\mu_n|} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right), \frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right], \quad \alpha \neq \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \\ v_n \left(\frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^{-3} \left(x - \frac{\pi}{|\mu_n|} + \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^3 & \\ \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right], \quad \alpha = \pi m_1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \pi \right], \end{cases} \tag{24}$$

$$\tilde{\eta}(x, \lambda_n) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1}{3}} \tilde{v}_n \mu_n (\pi - x) & \text{при } x \in \left[\pi - \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right), \pi \right], \quad \beta \neq \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{v}_n \sin^3 \left(\mu_n \left(\pi - x + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \right) & \text{при} \\ x \in \left[\pi - \frac{\pi}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \pi - \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right], \quad \beta \neq \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{v}_n \left(\frac{\pi}{\mu_n} - \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^{-3} \left(\pi - \frac{\pi}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) - x \right)^3 & \\ \text{при } x \in \left[\pi - \frac{\pi}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \pi \right], \quad \beta = \pi m_2, \quad m_2 \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{при } x \in \left[0, \pi - \frac{\pi}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right]. \end{cases} \tag{25}$$

Положим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{cases} 1 & \text{при } (\alpha = \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}) \wedge f(0) \neq 0, \\ 0 & \text{при } (\alpha \neq \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}) \vee f(0) = 0, \end{cases} \\ \tilde{\sigma}_1 &= \begin{cases} 1 & \text{при } (\beta = \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}) \wedge f(\pi) \neq 0, \\ 0 & \text{при } (\beta \neq \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}) \vee f(\pi) = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{26}$$

Обозначим коэффициенты Фурье значений операторов (24), (25) по собственным функциям задачи (19)–(21) как

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{\lambda_n, m} &= \langle \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \cdot), \eta(\cdot, \lambda_n) \rangle = \int_0^\pi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) \eta(\xi, \lambda_n) d\xi, \\ \tilde{\eta}_{\lambda_n, m} &= \langle \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \cdot), \tilde{\eta}(\cdot, \lambda_n) \rangle = \int_0^\pi \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \xi) \tilde{\eta}(\xi, \lambda_n) d\xi. \end{aligned} \tag{27}$$

Операторы, ставящие в соответствие функции $f \in C[0, \pi]$ частичные суммы Фурье функции $AT_n^\phi(f, x) + \eta(x, \lambda_n) + \tilde{\eta}(x, \lambda_n)$, обозначим

$$AT_{n, j}^\phi(f, x) = \sum_{m=0}^j \widehat{AT}_{n, m}^\phi[f, \eta] \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, x), \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{AT}_{n, m}^\phi[f, \eta] &:= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\tau_{k-1, n, m} + \tau_{k, n, m}) \left\{ f(x_{k, \lambda_n}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k, \lambda_n} - f(0) \right\} + \\ &+ \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \tau_m^{(1)} + f(0) \tau_m^{(0)} + \hat{\eta}_{\lambda_n, m} + \tilde{\eta}_{\lambda_n, m} \end{aligned} \tag{29}$$

являются ее коэффициентами Фурье. Функция $AT_n^\phi(f, x) + \eta(x, \lambda_n) + \tilde{\eta}(x, \lambda_n)$ имеет абсолютно непрерывную производную на отрезке $[0, \pi]$ и удовлетворяет крайевым условиям (20), (21). Здесь также обратим внимание на то, что значения операторов (28), как и функционалов (29), определяются только с помощью значений функции $f(x_{k, \lambda_n})$ в нулях x_{k, λ_n} .

Основным результатом работы служит

Теорема 1. Пусть $T > 0$, $\varepsilon > 0$, функции f , φ являются непрерывными каждая на своей области определения, и функция q имеет ограниченную вариацию, функция $j(n)$, принимающая целые значения или бесконечность, удовлетворяет соотношению

$$[n^{2(1+\varepsilon)}] + 1 \leq j(n) \leq \infty. \tag{30}$$

Тогда обобщенное решение смешанной краевой задачи (1)–(4) представимо в виде предела

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{j(n)} \left(\widehat{AT}_{n, m}^\phi[\varphi, \eta] e^{-\hat{\lambda}_m t} + \int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n, m}^\phi[f(\cdot, \tau), \eta] d\tau \right) U_m(q, \alpha, \beta, x). \tag{31}$$

Сходимость в (31) равномерная на прямоугольнике $[\sigma_1 \tilde{\varepsilon}, \pi - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\varepsilon}] \times [0, T]$, где функционалы $\widehat{AT}_{n, m}^\phi[\cdot, \eta]$ определены с помощью (29), а $\sigma_1, \tilde{\sigma}_1$ определяются в (26).

Замечание 1. Это неоднозначное представление единственного обобщенного решения смешанной краевой задачи (1)–(4), так как вместо интегралов в (31) в качестве частного решения соответствующего неоднородного обыкновенного уравнения с правой частью $\widehat{AT}_{n, m}^\phi[f(\cdot, \tau), \eta]$ может быть выбран любой другой представитель семейства общего решения уравнения, а не обязательно удовлетворяющий нулевым начальным условиям. Но в этом случае не следует забывать, что в коэффициенты, отвечающие за начальные условия в первом слагаемом суммы следует внести соответствующие корректировки.

Кроме того, выбирая различные последовательности $j(n)$, удовлетворяющие соотношению (30), получим различные представители класса эквивалентности, являющегося обобщенной функцией согласно определению 2.

Метод, предложенный в теореме 1, по сравнению с теорией разностных схем сохраняет преимущества анализа Фурье: позволяет организовывать фильтрацию, убирать помехи в условиях и т.п. В отличие же от классических методов Фурье и Крылова, алгоритм решения смешанной краевой задачи (1)–(4) в утверждении теоремы 1 не только расширяет множество допустимых наборов функций f , φ до пространств непрерывных функций на области своего определения, но и позволяет ограничиться данными об этих функциях только в равноотстоящих узловых точках x_{k,λ_n} , а не требовать информацию о функции на множестве полной меры. Для вычисления коэффициентов $\widehat{AT}_{\lambda,m}[\cdot, \eta]$ можно использовать не зависящий от функций f , φ набор коэффициентов Фурье $\tau_{k,n,m}$ (22) функций (18), который для каждой краевой задачи (1)–(4) может быть заготовлен заранее. В силу корректности по Адамару смешанной краевой задачи для уравнения параболического типа классическое решение задачи (1)–(4) с достаточно гладкими условиями, допускающими его существование, совпадает с решением, полученным с помощью теоремы 1. Чтобы не вычислять интегралы от быстро осциллирующих функций, для определения $\tau_{k,n,m}$ можно воспользоваться следующими утверждениями.

Предложение 1. В дифференциальных уравнениях задач Коши (6), (8) и уравнении задачи Штурма–Лиувилля (19) считаем $q \equiv 0$. Тогда коэффициенты Фурье (22) функций s_{k,λ_n} (10) по ортонормированным собственным функциям U_m задачи (19)–(21) можно вычислить с помощью интеграла Римана–Стилтьеса

$$\tau_{k,n,m} = \frac{1}{(\lambda_m - \lambda_n)} (s'_{k,\lambda_n}(\pi)U_m(\pi) - s_{k,\lambda_n}(\pi)U'_m(\pi) - (s'_{k,\lambda_n}(0)U_m(0) - s_{k,\lambda_n}(0)U'_m(0))) + \frac{2}{(\lambda_m - \lambda_n)} \int_0^\pi \frac{U_m(x)}{(x - x_{k,\lambda_n})} ds_{k,\lambda_n}(x). \quad (32)$$

Если потенциал смешанной краевой задачи (1)–(4) непрерывно дифференцируем, то коэффициенты Фурье функций s_{k,λ_n} по ортонормированным собственным функциям U_m задачи Штурма–Лиувилля (19)–(21) можно получить с помощью резольвенты одного дифференциального оператора.

Предложение 2. В дифференциальных уравнениях задач Коши (6), (8) и уравнении задачи Штурма–Лиувилля (19) считаем потенциалы непрерывно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими соотношению $q(x) \equiv 0$. Тогда коэффициенты Фурье (22) функций s_{k,λ_n} по ортонормированным собственным функциям U_m задачи (19)–(21) можно вычислить с помощью резольвенты дифференциального оператора Коши

$$\Phi'''_{k,\lambda_n,m}(x) + (\lambda_n + \lambda_m)\Phi'_{k,\lambda_n,m}(x) = 2s'_{k,\lambda_n}(x) \left(\frac{U_m(x)}{(x - x_{k,\lambda_n})} \right) (x - x_{k,\lambda_n}), \quad (33)$$

$$\Phi_{k,\lambda_n,m}(x_{k,\lambda_n}) = 0, \quad \Phi'_{k,\lambda_n,m}(x_{k,\lambda_n}) = U_m(x_{k,\lambda_n}), \quad \Phi''_{k,\lambda_n,m}(x_{k,\lambda_n}) = U'_m(x_{k,\lambda_n})$$

следующим образом:

$$\tau_{k,n,m} = \Phi_{k,\lambda_n,m}(\pi) - \Phi_{k,\lambda_n,m}(0). \quad (34)$$

Замечание 2. В силу инвариантности дифференциального оператора задач Коши (6) или (8) относительно группы сдвигов спектрального параметра и потенциала $\tilde{q} = q + \text{const}$, $\tilde{\lambda} = \lambda + \text{const}$ в предложениях 1 и 2 без потери общности можно считать $q = \text{const}$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Сначала приведем ряд вспомогательных утверждений.

2.1. Асимптотические формулы

Предложение 3 (см. [42, теорема 1], [43, предложение 2]). Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. для любого действительного λ

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \text{где } \rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ решение задачи Коши (6) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \left| y(x, \lambda) - \gamma(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x - \beta(x, \lambda, h) \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\lambda} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \\ \left| y'(x, \lambda) + \sqrt{\lambda}\gamma(x, \lambda, h) \sin \sqrt{\lambda}x - \beta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\beta(x, \lambda, h) = h(\lambda) + \frac{1}{2} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau, \quad \gamma(x, \lambda, h) = 1 - \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau.$$

Предложение 4 (см. [42, теорема 1'], [43, предложение 3]). Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ решение задачи Коши (8) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \left| y(x, \lambda) - \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \delta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\lambda\sqrt{\lambda}}, \\ \left| y'(x, \lambda) - h(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x - \sqrt{\lambda}\delta(x, \lambda, h) \sin \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\lambda}, \\ \left| y''(x, \lambda) + h(\lambda)\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x - \lambda\delta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\sqrt{\lambda}}, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\delta(x, \lambda, h) = \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau.$$

Предложение 5 (см. [42, теоремы 2, 2'], [43, предложение 4]). Пусть выполняется условие (5). Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для нулей решений задачи Коши (6), попадающих в $[0, \pi]$ и перенумерованных в порядке возрастания согласно (9), справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} x_{k,\lambda} &= \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right), \\ y'(x_{k,\lambda}, \lambda) &= \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)} \left((-1)^{(k+1)} + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow \infty$.

А для перенумерованных согласно (9) нулей решений задачи Коши (8) с $h(\lambda) \neq 0$ и q_λ , удовлетворяющими соотношению (7), справедливы асимптотические формулы вида

$$x_{k,\lambda} = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\pi + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

$$y'(x_{k,\lambda}, \lambda) = h(\lambda)\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Стремление к нулю в o -символике равномерно по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $k : 0 \leq k \leq n$.

Для того чтобы по свойствам нулей (9) восстановить условия задач (6), (8), можно воспользоваться результатами исследований в [44], [45].

Нам потребуется еще одно свойство фундаментальных функций $s_{k,\lambda}$.

Лемма 1 (см. [43, лемма 2]). Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$, при $\lambda \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ — шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (8) требуем еще выполнения условия $h(\lambda) \neq 0$). Тогда найдется такое значение λ_0 (выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (5) или (7)), что для любых потенциалов $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и функции $h(\lambda)$, а также для всех $\lambda > \lambda_0$, функции $s_{k,\lambda}(x)$, построенные по решениям задач Коши (6) и (8) могут быть оценены таким образом

$$\max_{x \in [0, \pi]} |s_{k,\lambda}(x)| = \max_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} \right| \leq 3 \quad \text{при } \lambda > \lambda_0.$$

2.2. Дифференциальное уравнение для функций $s_{k,\lambda}$

Предложение 6. Пусть функция q_λ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, \pi]$. Функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению задач (6), (8) и $y(x_{k,\lambda}, \lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $s_{k,\lambda}$ является ограниченным решением дифференциального уравнения вида

$$s_{k,\lambda}'' + \frac{2}{(x - x_{k,\lambda})} s_{k,\lambda}' + (\lambda - q_\lambda(x)) s_{k,\lambda} = 0. \quad (37)$$

Доказательство. Действительно, пусть функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению задач (6), (8). Тогда подстановкой получаем соотношение

$$\frac{1}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} (y''(x, \lambda) + (\lambda - q_\lambda(x)) y(x, \lambda)) \equiv 0.$$

Наоборот, пусть $s_{k,\lambda}$ есть ограниченное решение дифференциального уравнения вида (37) всюду на множестве $[0, x_{k,\lambda}) \cup (x_{k,\lambda}, \pi]$. Тогда подстановкой убеждаемся в том, что функция $y(x, \lambda) = y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})s_{k,\lambda}(x)$ удовлетворяет уравнению задач (6), (8). Учитывая, что $y(x_{k,\lambda}) = 0$, продолжаем это соотношение на весь отрезок $[0, \pi]$. Предложение 6 доказано.

2.3. Некоторые операторы теории приближения функций

Предложение 7 (см. [43, предложение 1]). Пусть $f \in C[0, \pi]$, и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (5) в случае задачи Коши (6) или (7) — в случае задачи (8). Тогда равномерно по x на отрезке $[0, \pi]$ и по q_λ на шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} AT_\lambda(f, x) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \widetilde{AT}_\lambda(f, x) = f(x). \quad (38)$$

Предложение 8. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ — шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (8) требуем еще выполнения условия $h(\lambda) \neq 0$). Тогда существует такое значение λ_0 (зависящее только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (5) или (7)), что для любых потенциалов $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и функции $h(\lambda)$, а также для всех $\lambda > \lambda_0$, нормы операторов (13) и (14), действующих из пространства

ограниченных функций $M[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$ и построенных по решениям задач Коши (6) или (8), сверху оцениваются следующим образом:

$$AT_\lambda^{(1)} \leq \frac{17\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln \lambda, \tag{39}$$

$$AT_\lambda^{(2)} \leq \frac{17\lambda}{\pi} \ln \lambda. \tag{40}$$

Доказательство. Сначала установим справедливость оценки (39) для оператора (13) в случае задачи Коши (8). В силу инвариантности оператора (12) относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу без потери общности полагаем $h(\lambda) \equiv 1$.

Возьмем произвольное $x \in [0, \pi]$. Пусть k_0 – номер ближайшего к x узла (если таких узлов два, то в качестве k_0 выбираем номер любого из них). Из асимптотики нулей решений задачи Коши предложения 5 получаем оценку

$$|x - x_{k_0, \lambda}| = O\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right). \tag{41}$$

Тогда норма функционала (будем рассматривать представление AT_λ в виде (12)), ставящего каждой ограниченной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f \in M[0, \pi]$ значение производной результата действия оператора (12) в точке $x \in [0, \pi]$, может быть оценена следующим образом:

$$AT_\lambda^{(1)}(x) \leq 2 \sum_{k=0}^n |s'_{k, \lambda}(x)| + \frac{2}{\pi} = 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} |s'_{k, \lambda}(x)| + 2|s'_{k_0, \lambda}(x)| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n |s'_{k, \lambda}(x)| + \frac{2}{\pi}. \tag{42}$$

А норма оператора (13), ставящего каждой ограниченной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f \in M[0, \pi]$ непрерывную производную значения оператора (12), действующего из $M[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$, есть

$$AT_\lambda^{(1)} = \max_{x \in [0, \pi]} AT_\lambda^{(1)}(x). \tag{43}$$

Второе слагаемое в (42) оценивается с помощью формулы Лагранжа, (41) и асимптотических формул предложения 5:

$$2|s'_{k_0, \lambda}(x)| = 2 \left| \frac{y'(x, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda}) - y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})^2} \right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Отсюда и из (42) получаем оценку

$$AT_\lambda^{(1)}(x) \leq 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{|y'(x, \lambda)|}{|y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})|} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{|y'(x, \lambda)|}{|y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})|} \right| + 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{|y(x, \lambda)|}{|y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})^2|} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{|y(x, \lambda)|}{|y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})^2|} \right| + \frac{2}{\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \tag{44}$$

Из асимптотических формул для нулей решения задач Коши предложения 5 для достаточно больших λ будут выполняться соотношения

$$\min_{1 \leq k \leq n} |x_{k, \lambda} - x_{k-1, \lambda}| \geq \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \min(|x - x_{k_0-1, \lambda}|, |x - x_{k_0+1, \lambda}|) \geq \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}. \tag{45}$$

В силу (44), (45) и асимптотических формул предложения 5 найдется значение λ_1 (выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров в (5), (7)) такое, что для всех $\lambda > \lambda_1$ справедливо неравенство

$$AT_\lambda^{(1)}(x) \leq 2|y'(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) (x - x_{k,\lambda})} \right| + 2|y(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) (x - x_{k,\lambda})^2} \right| + \frac{2}{\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Здесь и далее штрих у суммы означает отсутствие слагаемого с индексом $k = k_0$. Если $k_0 = 0$, то в сумме отсутствует первое слагаемое, если же $k_0 = n$, то нет третьего. Отсюда получаем оценку

$$AT_\lambda^{(1)}(x) \leq 2|y'(x, \lambda)| \left(1 + \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^\pi \frac{dt}{t-x} \right] + 2|y(x, \lambda)| \left(1 + \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^\pi \frac{dt}{(t-x)^2} \right] + \frac{2}{\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \tag{46}$$

Учитывая то, что при $x \in [0, \pi]$ $x(\pi - x) \geq 0$, и что при $x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right]$ в силу выбора номера k_0 первый интеграл в полученной оценке исчезает, а при $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]$ нет второго интеграла, оценка суммы интегралов распадается на два случая:

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^\pi \frac{dt}{t-x} = -\ln(x-t) \Big|_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} + \ln(t-x) \Big|_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^\pi \leq \begin{cases} \ln(\lambda) + \ln 16 & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right], \\ \frac{1}{2} \ln(\lambda) + \ln 8 & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right] \cup \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]. \end{cases}$$

Теперь оценим сумму интегралов

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^\pi \frac{dt}{(t-x)^2} = \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{\pi}{x(\pi-x)}.$$

Учитывая, что $x(\pi - x) \geq 0$ при $x \in [0, \pi]$, $x(\pi - x) > 0$ при $x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]$, и что при $x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right]$ в силу выбора номера k_0 первый интеграл в полученной оценке исчезает, а при $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]$ нет второго интеграла, оценка суммы интегралов распадается на три случая:

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^\pi \frac{dt}{(t-x)^2} \leq \begin{cases} \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{\pi}{x(\pi-x)} & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right], \\ \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{1}{\pi-x} & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right], \\ \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{1}{x} & \text{при } x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi\right]. \end{cases}$$

Равномерная по $x \in [0, \pi]$ оценка нормы оператора (13) таким образом в силу (46) имеет вид

$$AT_{\lambda}^{(1)} \leq \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\ln(\lambda) + \frac{16 + \pi \ln 16}{\pi} \right] + o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right).$$

Отсюда следует существование $\lambda_0 \geq \lambda_1$ настолько большого, что для всех $\lambda > \lambda_0$ верна оценка (39) в случае задачи Коши (8).

Покажем, что неравенство (39) при достаточно больших λ справедливо для $s_{k,\lambda}$ ($0 \leq k \leq n$), построенных с помощью решений задачи Коши (6). Для этого продолжим функцию

$$q_{\lambda}(x) = \begin{cases} q_{\lambda}(x) & \text{при } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \pi]. \end{cases} \quad (47)$$

После чего сделаем замену независимой переменной

$$t = \frac{\pi \left(x\sqrt{\lambda} + \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right)}{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}}, \quad (48)$$

Обозначим

$$\hat{y}(t, \hat{\lambda}) = y \left(\frac{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}}{\pi\sqrt{\lambda}} t - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}, \lambda \right) \quad (49)$$

и

$$\hat{q}_{\hat{\lambda}}(t) = \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right)^2 \times \\ \times q_{\lambda} \left(\frac{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}}{\pi\sqrt{\lambda}} t - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right), \quad (50)$$

где

$$\hat{\lambda} = \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right)^2 \lambda.$$

После замены переменных (48) убеждаемся с помощью теоремы Пикара, что функции (49) есть одновременно решение задач Коши

$$\hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t))\hat{y} = 0, \quad \hat{y}(t(0), \hat{\lambda}) = y(0, \lambda) = 1, \\ \hat{y}'(t(0), \hat{\lambda}) = \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right) h(\lambda) \quad (51)$$

и

$$\hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t))\hat{y} = 0, \quad \hat{y}(0, \hat{\lambda}) = y \left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right) = 0, \\ \hat{y}'(0, \hat{\lambda}) = \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right) = \hat{h}(\hat{\lambda}). \quad (52)$$

Кроме того, в силу (47) и (50) $\sqrt{\hat{\lambda}} - 1/2 \leq \sqrt{\lambda} \leq \sqrt{\hat{\lambda}} + 1/2$, т.е. $\sqrt{\hat{\lambda}} \simeq \sqrt{\lambda}$. Следовательно, соотношение (5) для задачи (52) сохраняется, так как из (47) и (50) получаем

$$q_{\hat{\lambda}}(0) = 0 \quad \text{и} \quad V_0^\pi[\hat{q}_{\hat{\lambda}}] \leq \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\hat{\lambda}}}\right)^2 V_0^\pi[q_{\lambda}] = o\left(\frac{\sqrt{\hat{\lambda}}}{\ln \lambda}\right) = o\left(\frac{\sqrt{\hat{\lambda}}}{\ln \hat{\lambda}}\right). \tag{53}$$

Согласно (49) при $t \in [0, \pi]$ и $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}, \pi\right]$ имеем тождество

$$s_{k,\lambda}(x) \equiv \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} \equiv \frac{\hat{y}(t, \hat{\lambda})}{\hat{y}'(t_{k,\hat{\lambda}}, \hat{\lambda})(t - t_{k,\hat{\lambda}})} \equiv \hat{s}_{k,\hat{\lambda}}(t). \tag{54}$$

Так как $\hat{s}_{k,\hat{\lambda}}(t)$ построены с помощью задачи Коши (52) вида (8), соотношение (39) доказано полностью.

Перейдем к доказательству оценки (40) нормы оператора (14).

Опять сначала рассуждения будем проводить в случае задачи Коши (8). В силу инвариантности оператора (12) относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу без потери общности полагаем $h(\lambda) \equiv 1$.

Возьмем произвольное $x \in [0, \pi]$. Пусть k_0 – номер ближайшего к x узла (если таких узлов два, то в качестве k_0 выбираем номер любого из них). Из асимптотики нулей решений задачи Коши предложения 5 получаем оценку (41). Тогда норма функционала (будем рассматривать представление \widetilde{AT}_λ в виде (12)), ставящего каждой ограниченной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f \in M[0, \pi]$ значение второй производной результата действия оператора (12) в точке $x \in [0, \pi]$, может быть оценена следующим образом:

$$AT_\lambda^{(2)}(x) \leq 2 \sum_{k=0}^n |s''_{k,\lambda}(x)| = 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} |s''_{k,\lambda}(x)| + 2|s''_{k_0,\lambda}(x)| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n |s''_{k,\lambda}(x)|. \tag{55}$$

А норма оператора (14), ставящего каждой ограниченной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f \in M[0, \pi]$ непрерывную вторую производную значения оператора (12), действующего из $M[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$, есть

$$AT_\lambda^{(2)} = \max_{x \in [0, \pi]} AT_\lambda^{(2)}(x). \tag{56}$$

Второе слагаемое в (55) оценивается с помощью формулы Лагранжа, леммы 1 и асимптотических формул предложения 5.

Откуда следует существование констант $\lambda_1 > 0$ и C_1 таких, что для всех $\lambda > \lambda_1$ и $x \in [0, \pi]$ справедлива оценка

$$2|s''_{k_0,\lambda}(x)| \leq C_1 \sqrt{\lambda}.$$

Отсюда и из (42) получаем оценку

$$AT_\lambda^{(2)}(x) \leq 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{|y''(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{|y''(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|} \right| + 4 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{|y'(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|^2} \right| + 4 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{|y'(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})|^2} \right| + 2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{|y(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})^3|} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{|y(x, \lambda)|}{|y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})^3|} \right| + O(\sqrt{\lambda}). \tag{57}$$

Из асимптотических формул для нулей решения задач Коши предложения 5 для достаточно больших λ будут выполняться соотношения (45).

В силу (45), (57) и асимптотических формул предложения 5 найдется значение $\lambda_2 \geq \lambda_1$ (выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров в (5), (7)) такое, что для всех $\lambda > \lambda_2$ справедливо неравенство

$$AT_\lambda^{(2)}(x) \leq 2|y''(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) (x - x_{k,\lambda})} \right| + 4|y'(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) (x - x_{k,\lambda})^2} \right| + 2|y(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{\left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) (x - x_{k,\lambda})^3} \right| + O(\sqrt{\lambda}).$$

Оценим суммы следующим образом:

$$AT_\lambda^{(2)}(x) \leq 2|y''(x, \lambda)| \left(1 + \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{t-x} \right] + 4|y'(x, \lambda)| \left(1 + \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^2} \right] + 2|y(x, \lambda)| \left(1 + \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \right) \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^3} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^3} \right] + O(\sqrt{\lambda}).$$

При оценке учитываем, что $\max_{x \in [0, \pi]} x(\pi - x) = \pi^2/4$, $x(\pi - x) > 0$ при $x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}} \right]$, и что при $x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}} \right]$ в силу выбора номера k_0 первый интеграл в полученной оценке исчезает, а при $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi \right]$ нет второго интеграла. Таким образом, получаем соотношение

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{t-x} = -\ln(x-t) \Big|_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} + \ln(t-x) \Big|_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \leq \begin{cases} \ln(\lambda) + \ln 16 & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}} \right], \\ \frac{1}{2} \ln(\lambda) + \ln 8 & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}} \right] \cup \left[\pi - \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}, \pi \right]. \end{cases}$$

Теперь оценим суммы интегралов

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^2} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^2} = \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{\pi}{x(\pi-x)}, \quad \int_0^{x-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}} \frac{dt}{(x-t)^3} + \int_{x+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}}^{\pi} \frac{dt}{(t-x)^3} \leq \frac{8^2\lambda}{\pi^2}.$$

В итоге, с учетом асимптотических формул предложения 4 получаем равномерную по $x \in [0, \pi]$ оценку

$$AT_\lambda^{(2)}(x) \leq |y''(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} [\ln(\lambda) + \ln 16] + \\ + |y'(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \left[\frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi}\right]^2 + |y(x, \lambda)| \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \frac{16\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\frac{8^2\lambda}{\pi^2}\right] + O(\sqrt{\lambda}).$$

Оценка нормы оператора таким образом имеет вид

$$AT_\lambda^{(2)} \leq \frac{16\lambda}{\pi} \ln(\lambda) + O(\lambda).$$

Отсюда следует существование $\lambda_0 \geq \lambda_2$ настолько большого, что для всех $\lambda > \lambda_0$ верна оценка (40) в случае задачи Коши (8).

Справедливость оценки (40) при достаточно больших λ для $s_{k,\lambda}$ ($0 \leq k \leq n$), построенных с помощью решений задачи Коши (6), устанавливается также, как справедливость соотношения (39) для $s_{k,\lambda}$, ($0 \leq k \leq n$), построенных с помощью решений задачи Коши (6). Предложение 8 доказано полностью.

3. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Нам потребуется в дальнейшем следующее предложение в случае $\lambda = \lambda_n$.

Предложение 9. *Функции $AT_\lambda(f, x) + \eta(x, \lambda) + \tilde{\eta}(x, \lambda)$ для любого положительного $\tilde{\epsilon}$ удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|AT_\lambda(f, \cdot) + \eta + \tilde{\eta} - f\|_{C[\sigma, \tilde{\epsilon}, \pi - \tilde{\sigma}, \tilde{\epsilon}]} = 0.$$

Доказательство. Функция $\eta(x, \lambda) + \tilde{\eta}(x, \lambda)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, \pi]$. При этом ее носитель удовлетворяет соотношению

$$\text{supp}(\eta + \tilde{\eta}) \subset \left[0, \frac{\pi}{|\mu|} - \frac{1}{|\mu|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right] \cup \left[\pi - \frac{\pi}{|\tilde{\mu}|} + \frac{1}{|\tilde{\mu}|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \pi\right]. \quad (58)$$

При $\lambda > \ln \frac{4}{\sqrt{3}}$ в силу предложения 8 выполняются соотношения

$$\left[0, \frac{\pi}{|\mu|} - \frac{1}{|\mu|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right] \cap \left[\pi - \frac{\pi}{|\tilde{\mu}|} + \frac{1}{|\tilde{\mu}|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \pi\right] = \emptyset, \quad (59) \\ \|\eta + \tilde{\eta}\|_{C\left[\sigma, \left(\frac{\pi}{|\mu|} - \frac{1}{|\mu|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right), \pi - \tilde{\sigma}, \left(\frac{\pi}{|\tilde{\mu}|} + \frac{1}{|\tilde{\mu}|} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)\right]} \leq \max(v, \tilde{v}) = O(e^{-\lambda} \sqrt{\lambda} \ln \lambda)$$

для произвольных граничных условий третьего рода. В случае же граничных условий первого рода на всем отрезке $[0, \pi]$ справедлива оценка

$$\|\eta + \tilde{\eta}\|_{C[0, \pi]} \leq \max(v, \tilde{v}) = \max(|AT_\lambda(f, 0)|, |AT_\lambda(f, \pi)|) O(1). \quad (60)$$

Теперь утверждение предложения 9 следует из предложения 7.

3.1. Оценка коэффициентов Фурье $AT_\lambda(f, x)$ с помощью интегрирования по частям

В следующем предложении получена оценка погрешности равномерного приближения частичными суммами Фурье “подправленных” значений операторов $AT_n^\phi(f, \cdot)$ таким образом, чтобы выполнялись краевые условия.

Предложение 10. Пусть $\rho_{\lambda_n} \geq 0$, $\rho_{\lambda_n} = o(\sqrt{\lambda_n}/\ln \lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$, и $V_{\rho_{\lambda_n}}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_{λ_n} в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (8) требуем еще выполнения условия $h(\lambda_n) \neq 0$). Пусть также $0 < \epsilon < 1$, $j(n) := \left\lceil \lambda_n^{\frac{1+2\epsilon}{1-\epsilon}} \right\rceil + 1$, функция f является непрерывной на $x \in [0, \pi]$, и функция q имеет ограниченную вариацию. Тогда для погрешности равномерной аппроксимации значениями операторов (28) справедлива оценка

$$\left\| AT_n^\phi(f, \cdot) + \eta(\cdot) - \tilde{\eta}(\cdot) - \sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{AT}_{n,m}^\phi[f, \eta] \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, \cdot) \right\|_{C[0, \pi]} = \|f\|_{C[0, \pi]} \frac{n^{-2\epsilon \left(\frac{1+2\epsilon}{1-\epsilon} \right)}}{\epsilon} O(1). \tag{61}$$

Доказательство. Из асимптотических формул (35), (36) следует оценка

$$\|U_m\|_{L^2[0, \pi]} = O(1) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty. \tag{62}$$

Сначала рассмотрим случай, когда левые краевые условия задачи Штурма–Лиувилля такие же, как в задаче Коши (6). В силу (35) с точностью до нормировки имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) U_m(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) \left(\gamma(x, \lambda_m, h) \cos \sqrt{\lambda_m} x + \beta(x, \lambda_m, h) \frac{\sin \sqrt{\lambda_m} x}{\sqrt{\lambda_m}} \right) dx \right| + \\ &+ \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) \frac{\rho_{\lambda_m} (1 + \pi \rho_{\lambda_m})}{2\lambda_m} \left(1 + \frac{|h(\lambda_m)|}{\sqrt{\lambda_m}} \right) dx \right| = \\ &= \sqrt{\gamma^2(x, \lambda_m, h) + \frac{\beta^2(x, \lambda_m, h)}{\lambda_m}} \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) (\sin \phi_{\lambda_m} \cos \sqrt{\lambda_m} x + \cos \phi_{\lambda_m} \sin \sqrt{\lambda_m} x) dx \right| + \\ &+ \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right), \end{aligned}$$

где $\sin \phi_{\lambda_m} = \gamma(x, \lambda_m, h) / \sqrt{\gamma^2(x, \lambda_m, h) + \beta^2(x, \lambda_m, h) / \lambda_m}$. Продолжим оценку, интегрируя по частям интеграл Стильеса (см. [46], гл. VIII, § 6, п. 5):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) U_m(x) dx \right| &= \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) \sin(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x) dx \right| + \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right) = \\ &= \left| -AT_\lambda(f, x) \frac{\sin'(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x)}{\lambda_m} \Big|_0^\pi + AT_\lambda'(f, x) \frac{\sin(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x)}{\lambda_m} \Big|_0^\pi - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\lambda_m} \int_0^\pi AT_\lambda''(f, x) \sin(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x) dx \right| + \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right). \end{aligned}$$

Опять воспользуемся асимптотическими формулами предложения 3 и вернемся к собственным функциям в первых двух слагаемых с подстановками:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x) U_m(x) dx \right| &= \left| -AT_\lambda(f, x) \frac{U_m'(x)}{\lambda_m} \Big|_0^\pi + AT_\lambda'(f, x) \frac{U_m(x)}{\lambda_m} \Big|_0^\pi \right| + \\ &+ \left| -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^\pi AT_\lambda''(f, x) \sin(\phi_{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_m} x) dx \right| + \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right). \end{aligned}$$

В силу (40)

$$\left| \int_0^\pi AT_\lambda(f, x)U_m(x)dx \right| = \frac{17\pi\lambda \ln \lambda}{\lambda_m} \|f\|_{C[0,\pi]} + \|AT_\lambda(f, \cdot)\|_{C[0,\pi]} O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right) = \|f\|_{C[0,\pi]} \frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda_m} O(1).$$

Функция $\eta(x, \lambda) + \tilde{\eta}(x, \lambda)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, \pi]$. Учитывая (59), (60) и оценку $\text{mes}(\text{supp}(\eta + \tilde{\eta})) = O(e^{-\lambda})$, аналогичными рассуждениями устанавливаем оценку

$$|\widehat{AT}_{\lambda,m}[f, \eta]| = \|f\|_{C[0,\pi]} \frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda_m} O(1). \tag{63}$$

Теперь перейдем к оценке погрешности частичных сумм рядов Фурье для $AT_\lambda(f, \cdot)$. Хорошо известна асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля (19)–(21) (см., например, [41], гл. 1, § 2, (2.12)). Поэтому, если мы будем для каждого $\lambda > 0$ брать номер собственного значения, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda_m} \equiv \frac{\lambda \ln \lambda}{m^2} \leq m^{-1-\epsilon}$$

при некотором $0 < \epsilon < 1$, то погрешность аппроксимации каждой функции $AT_\lambda(f, \cdot)$ будет равномерно мажорироваться с помощью остатка сходящегося числового ряда $\sum_{m=1}^\infty m^{-1-\epsilon}$. Далее, продолжаем оценку для достаточно больших λ и $0 < \epsilon < 1$.

Возьмем

$$j(\lambda) := \lceil \lambda^{1+\epsilon} \rceil + 1,$$

где $\epsilon := \frac{2\epsilon}{1-\epsilon} > 0$. В этом случае в силу (63), (62) найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $\lambda > \lambda_0$ справедлива оценка (61). Аналогично рассматривается случай левых краевых условий, как в задаче Коши (8). Предложение 10 доказано.

3.2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Выберем и зафиксируем некоторое $\epsilon > 0$. Определим $j(n)$ как в (30). В силу предложений 9 и 10 представим для любых $t \in [0, T]$ следующие функции с помощью оператора (28):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{A}\mathbb{T}_{n,j(n)}^\phi(f(\cdot, t), x) = \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{AT}_{n,m}^\phi[f(\cdot, t), \eta] \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, x) = f(x, t), \tag{64}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{A}\mathbb{T}_{n,j(n)}^\phi(\varphi, x) = \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{AT}_{n,m}^\phi[\varphi, \eta] \hat{U}_m(q, \alpha, \beta, x) = \varphi(x). \tag{65}$$

Рассмотрим семейство смешанных задач, зависящих от параметра λ_n , вида

$$u_{\lambda_n t} - u_{\lambda_n x x} + q(x)u_{\lambda_n} = \mathbb{A}\mathbb{T}_{n,j(n)}^\phi(f(\cdot, t), x), \tag{66}$$

$$u_{\lambda_n}(0, t) \cos \alpha + u_{\lambda_n x}(0, t) \sin \alpha = 0, \tag{67}$$

$$u_{\lambda_n}(\pi, t) \cos \beta + u_{\lambda_n x}(\pi, t) \sin \beta = 0, \tag{68}$$

$$u_{\lambda_n}(x, 0) = \mathbb{A}\mathbb{T}_{n,j(n)}^\phi(\varphi, x). \tag{69}$$

Функция (69) и правая часть уравнения (66) имеют абсолютно непрерывную производную по x . Каждая задача (66)–(69) имеет единственное классическое решение, допускающее после удовлетворения начальным условиям согласно методу разделения переменных разложение в равно-

мерно сходящийся на прямоугольнике $[0, \pi] \times [0, T]$ ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (19)–(21), который в случае $j(n) < \infty$ превращается в конечную сумму:

$$u_{\lambda_n}(x, t) = \sum_{m=0}^{j(n)} \left(\widehat{AT}_{n,m}^\phi[\varphi, \eta] e^{-\hat{\lambda}_m t} + \int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n,m}^\phi[f(\cdot, \tau), \eta] d\tau \right) U_m(q, \alpha, \beta, x). \tag{70}$$

В силу (29), (58)–(60) мера носителя ограниченной функции $\eta + \tilde{\eta}$ убывает, как $O(e^{-\lambda_n})$. Значит, каждое слагаемое $\int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n,m}^\phi[f(\cdot, \tau), \eta] d\tau$ в коэффициенте функции $U_m(q, \alpha, \beta, x)$ обладает свойством

$$\int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n,m}^\phi[f(\cdot, \tau)] d\tau - \int_0^t e^{-\hat{\lambda}_m(t-\tau)} \widehat{AT}_{n,m}^\phi[f(\cdot, \tau), \eta] d\tau = O(e^{-\lambda_n}).$$

И в силу критерия Коши равномерной сходимости ряда влияние “исправления” (29) краевых условий $\eta(x, \lambda_n) + \tilde{\eta}(x, \lambda_n)$ для правой части уравнения (1) в третьем слагаемом (70) можно оценить как $O\left(e^{-\frac{\lambda_n}{2}}\right)$. Поэтому в силу (24), (25), (58)–(60), предложений 9, 10 и [13, § 34] получаем

равномерную на прямоугольнике $[\sigma_1 \tilde{\varepsilon}, \pi - \delta_1 \tilde{\varepsilon}] \times [0, T]$ сходимость решений задач (66)–(69) к решению смешанной краевой задачи (1)–(4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\lambda_n}(x, t) = u(x, t).$$

Другими словами, любая подпоследовательность $u_{\lambda_{n_j}}(x, t)$ при $j \rightarrow \infty$ принадлежит классу эквивалентных последовательностей, представляющему собой согласно определению 2 обобщенную функцию, являющуюся обобщенным решением смешанной краевой задачи (1)–(4). Теорема 1 доказана.

Доказательство предложения 1. В окрестности любого из нулей $x_{k,n}$ имеем оценку

$$l'_{k,n}(x - \phi_n) = o(1).$$

Возьмем нормированную собственную функцию U_m задачи Штурма–Лиувилля (19)–(21), умножим ее на тождество (37), а тождество (19) на функцию $l_{k,n}(x - \phi_n)$:

$$l_{k,n}(x - \phi_n)''(x)U_m(x) + \frac{2}{(x - x_{k,n})} l'_{k,n}(x - \phi_n)(x)U_m(x) + (\lambda_n - q(x))l_{k,n}(x - \phi_n)U_m(x) \equiv 0, \tag{71}$$

$$l_{k,n}(x - \phi_n)U_m''(x) + (\hat{\lambda}_m - q(x))l_{k,n}(x - \phi_n)U_m(x) \equiv 0.$$

Вычтем из первого тождества второе:

$$(l'_{k,n}(x - \phi_n)(x)U_m(x) - l_{k,n}(x - \phi_n)U'_m(x))' + \frac{2}{(x - x_{k,n})} l_{k,n}(x - \phi_n)'(x)U_m(x) + (\lambda_n - \hat{\lambda}_m)l_{k,n}(x - \phi_n)U_m(x) \equiv 0.$$

Понимая все несобственные интегралы в смысле главного значения по Коши, проинтегрируем полученное тождество по x в пределах от 0 до π . Отсюда получаем (32). Предложение 1 доказано.

Доказательство предложения 2. Определим функцию

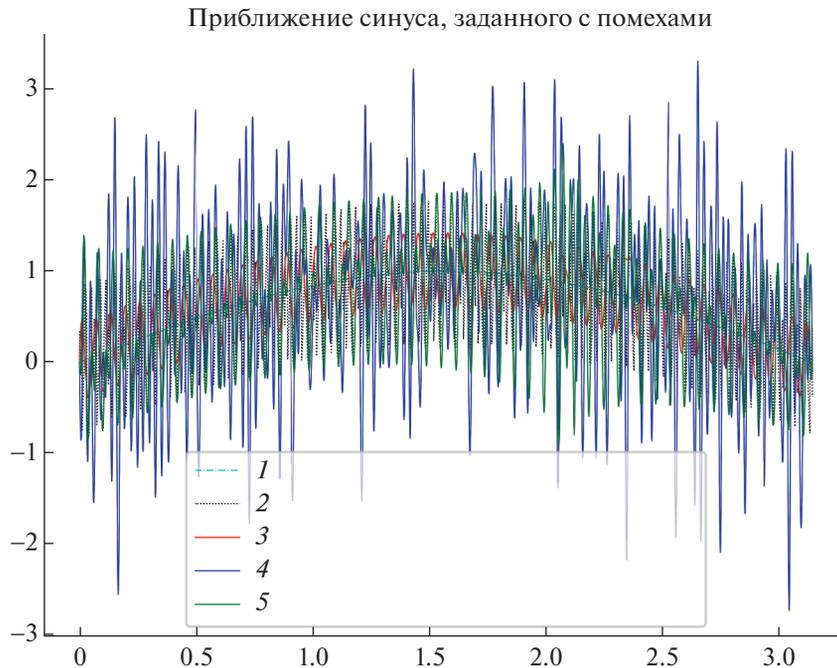
$$\Phi_{k,n,m}(x) := \int_{x_{k,n}}^x l_{k,n}(\xi - \phi_n)U_m(\xi) d\xi. \tag{72}$$

В окрестности любого из нулей $x_{k,n}$, определенных соотношениями (9), в формуле Тейлора используем остаточный член в форме Лагранжа и получаем оценку

$$s'_{k,\lambda_n}(x) = O(x - x_{k,n}).$$

Учитывая этот факт и предложение 6, подстановкой убеждаемся, что функция (72) удовлетворяет условиям задачи Коши (33). Отсюда получаем представление (34).

Предложение 2 доказано.



Фиг. 1. Сравнение поведения классического метода Фурье и нового метода для негладких начальных условий: 1 – точное решение для начальных условий без шума, 2 – для начальных условий с шумом, 3 – с помощью $A_n(f, x)$ для сигналов с шумом, 4 – метод Фурье сигналов с шумом, 5 – с помощью $L_n(f, x)$ для сигналов с шумом.

4. РЕЗУЛЬТАТ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Известно (см., например, [47–49]), что ряды Фурье непрерывных функций могут расходиться на довольно представительном множестве. В случае, когда непрерывные начальные условия или неоднородность уравнения смешанной краевой задачи не допускают представления своими рядами Фурье, применение методов разделения переменных невозможно в принципе.

Для реализации численного эксперимента используем классический пример расходящегося в точке ряда Фурье, построенный методом скользящего горба в виде лакунарного ряда. Такой ряд обладает свойством, что каждое его слагаемое имеет гармонику ряда Фурье, принимающую значение в точке расходимости растущее вместе с номером гармоники. В то время как остальные гармоники с меньшими и большими номерами остаются ограниченными. На фиг. 1 продемонстрирована возможность предлагаемого метода справляться с отсутствием гладкости в начальных условиях, исключающих возможность применения классического метода Фурье в принципе. Начальные условия при $t = 0$ в примере численного эксперимента (их график на фиг. 1 изображен пунктиром) подобраны в виде описанной ранее гармоники метода скользящего горба. На фиг. 1 видно, что соответствующие частичные суммы решений ведут себя по-разному. График приближения при $n = 200$, $m = 300$ решения при $t = 1$ с помощью классических сумм Фурье изображен синим цветом, а график частичной суммы того же порядка решения (31), полученного с помощью значений операторов (28), – красным. Поэтому при реализации метода скользящего горба в пределе получим неограниченно разошедшийся ряд классического решения и точное обобщенное решение (31) для негладких начальных условий в виде фрактала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krivoshein A., Skopina M.* Multivariate sampling-type approximation // *Anal. Appl.* 2017. Т. 15. № 4. С. 521–542.
2. *Richardson M., Trefethen L.* A sinc function analogue of Chebfun // *SIAM J. Sci. Comput.* 2011. V. 33. № 5. P. 2519–2535.
3. *Шмуцер А.И., Шульман Т.А.* О некоторых свойствах рядов Котельникова // *Изв. вузов. Матем.* 1974. Вып. 3. С. 93–103.

4. *Butzer P.L., Ferreira P.J.S.G., Higgins J.R., Saitoh S., Schmeisser G., Stens R.L.* Interpolation and Sampling: E.T. Whittaker, K. Ogura and Their Followers // *J. Fourier Anal. Appl.* 2010. P. 1–35.
<https://doi.org/10.1007/s00041-010-9131-8>
5. *Zayed A.* A generalized sampling theorem with the inverse of an arbitrary square summable sequence as sampling points // *J. Fourier Anal. Appl.* 1996. V. 2. № 3. P. 303–314.
6. *Schmeisser G., Stenger F.* Sinc Approximation with a Gaussian Multiplier // *Sampl. Theor. Signal Proces.* 2007. V. 6. P. 199–221.
7. *Трынин А.Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // *Изв. вузов. Матем.* 2008. № 6. P. 66–78.
8. *Новиков И.Я., Стечкин С.Б.* Основы теории всплесков // *Успехи матем. наук.* 1998. V. 53. № 6. P. 53–128.
9. *Дьяченко М.И.* Асимптотика сумм косинус-рядов с коэффициентами дробной монотонности // *Матем. заметки.* 2021. Т. 110. № 6. С. 865–874 [*M.I. Dyachenko, Math. Notes.* 2021. V. 110. № 6. P. 894–902].
<http://mi.mathnet.ru/mz13180>;
<https://doi.org/10.1134/S0001434621110250>
10. *Голубов Б.И.* Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье–Хаара функций ограниченной p -вариации // *Изв. вузов. Матем.* 2012. Т. 56. № 6. С. 3–13 [*B.I. Golubov, Russian Math.* 2012. V. 56. № 6. P. 1–10].
<https://doi.org/10.3103/S1066369X12060011>
11. *Новиков И.Я., Скопина М.А.* Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые? // *Матем. заметки.* 2012. Т. 91. № 6. С. 950–953 [*I.Ya. Novikov, M.A. Skorina, Math. Notes.* 2012. V. 91. № 6. P. 895–898].
<https://doi.org/10.4213/mzm9392>
12. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1954.
13. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
14. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
15. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Физматлит, Наука, 1965.
16. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
17. *Макаова Р.Х.* Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области // *Вестн. Самарского. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. Науки.* 2017. Т. 21. № 4. 651–664.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1574>
18. *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // *Дифференц. уравнения.* 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179 [*A.I. Kozhanov, L.S. Pulkina, Differ. Equ.* 2006. V. 42. № 9. P. 1233–1246].
<https://doi.org/10.1134/S0012266106090023>
19. *Абдуллаев О.Х.* Краевая задача для нагруженного уравнения эллиптического-гиперболического типа в двувязной области // *Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2014. Т. 1. № 8. С. 33–48.
<https://doi.org/10.18454/2079-6641-2014-8-1-33-48>
20. *Пулькина Л.С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // *Изв. вузов. Матем.* 2012. Т. 56. № 4. С. 74–83 [*O.Kh. Abdullaev, Russian Math.* 2012. V. 56. № 4. P. 62–69].
<https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081>
21. *Тарасенко А.В.* Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // *Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2010. Т. 5. № 21. С. 263–267.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu825>
22. *Балкизов Ж.А.* Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Владикавк. матем. журн.* 2016. Т. 18. № 2. С. 19–30.
23. *Водахова В.А., Балкизова А.Х.* Краевая задача для модельного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2019. Т. 28. № 3. С. 6–15.
<https://doi.org/10.26117/2079-6641-2019-28-3-6-15>
24. *Макаова Р.Х.* Краевая задача со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка с производной в граничных условиях // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 37. № 4. С. 38–44.
<https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-37-4-38-44>
25. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением // *Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2000. Т. 9. С. 32–36.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu28>
26. *Жура Н.А., Солдатов А.П.* Краевая задача для гиперболической системы первого порядка в двумерной области // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2017. Т. 81. № 3. С. 83–108 [*N.A. Zhura, A.P. Soldatov, Izv. Math.* 2017. V. 81. № 3. P. 542–567].
<https://doi.org/10.4213/im8442>

27. *Ашуров Р.Р., Мухиддинова А.Т.* Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 30. № 1. С. 8–19.
<https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-8-19>
28. *Сабитов К.Б.* Начально-граничная задача для парабола-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Изв. вузов. Матем. 2015. Т. 59. № 6. С. 31–42 [*K.B. Sabitov*, Russian Math. 2015. V. 59. № 6. P. 23–33].
<https://doi.org/10.3103/S1066369X15060055>
29. *Кожанов А.И., Дюжева А.В.* Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 3. С. 423–434.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1859>
30. *Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н.* Балансно-характеристические разностные схемы для уравнений параболического типа // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 94–105.
<https://doi.org/10.20948/mm-2020-04-07>
31. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
32. *Сушков А.С.* О сходимости разностной схемы, аппроксимирующей одну краевую задачу гиперболического типа // Челяб. физ.-матем. журн. 2019. Т. 4. № 3. С. 333–344.
<https://doi.org/10.24411/2500-0101-2019-14306>
33. *Холодов А.С., Холодов Я.А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 9. С. 1638–1667 [*A.S. Kholodov, Ya.A. Kholodov*, Comput. Math. Math. Phys. 2006. V. 46. № 9. P. 1560–1588].
<https://doi.org/10.1134/S0965542506090089>
34. *Комурджшвили О.П.* Разностные схемы для решения многомерных уравнений и систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 6. С. 980–987 [*O.P. Komurdzhishvili*, Comput. Math. Math. Phys. 2007. V. 47. № 6. P. 936–942].
<https://doi.org/10.1134/S096554250706005X>
35. *Холодов А.С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 6. С. 1476–1492 [*A.S. Kholodov*, Comput. Math. Math. Phys. 1978. V. 18. № 6. P. 116–132].
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(55\)90141-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(55)90141-6)
36. *Холодов Я.А., Холодов А.С., Цыбулин И.В.* Построение монотонных разностных схем для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 30–49 [*Ya.A. Kholodov, A.S. Kholodov, I.V. Tsybulin*, Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. № 8. P. 1226–1246].
<https://doi.org/10.1134/S0965542518080110>
37. *Трынин А.Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 10. С. 141–158.
38. *Трынин А.Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 4. С. 232–256.
39. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: ЛГУ, 1950.
40. *Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R.* Theory of Distributions. The sequential approach. Amsterdam: Elsevier Sci., 1973.
41. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, Физматлит, 1988.
42. *Трынин А.Ю.* Об асимптотике решений и узловых точек дифференциальных выражений Штурма–Лиувилля // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 3. С. 662–675.
43. *Трынин А.Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 11. С. 61–108.
44. *Трынин А.Ю.* Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 4. С. 133–143.
45. *Трынин А.Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5. № 4. С. 116–129 [*A. Yu. Trynin*, Ufa Math. J. 2013. V. 5. № 4. P. 112–124].
<https://doi.org/10.13108/2013-5-4-112>
46. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
47. *Олевский А.М.* Расходящиеся ряды Фурье непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. № 1. С. 28–31.
48. *Буздалин В.В.* Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящиеся на заданном множестве // Матем. сб. 1974. Т. 95. № 1. С. 84–107 [*V.V. Buzdalín*, Sb. Math. 1974. V. 24. № 1. P. 79–102].
<https://doi.org/10.1070/SM1974v024n01ABEH001906>
49. *Казарян К.С.* Расходящиеся ортогональные ряды Фурье // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 985–1008 [*K.S. Kazarian*, Sb. Math. 1992. V. 73. № 2. P. 355–377].
<https://doi.org/10.1070/SM1992v073n02ABEH002550>