

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

© 2023 г. Г. М. Абдуалимова^{1,*}, Н. А. Мамадалиев^{2,3,**}, М. Тухтасинов²

¹ 170100 Андижан, ул. Университетская, 129, Андижанский государственный университет, Узбекистан

² 100174 Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4,
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

³ 100174 Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 9, Институт математики им. В.И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан

* e-mail: abduolimova81@inbox.ru

** e-mail: m_numana59@mail.ru

Поступила в редакцию 30.07.2022 г.
Переработанный вариант 07.01.2023 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

В статье рассмотрена линейная дифференциальная игра преследования при условии, что на управление убегающего накладывается интегральное ограничение, а преследователь использует импульсное управление. Эти импульсные воздействия на объект осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующее управление представляется при помощи дельта-функции Дирака. Изучаются линейные конфликты, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, траектории которых имеют скачки в определенных моментах времени. Терминальное множество представляется в виде цилиндра в n -мерном евклидовом пространстве. Для решения поставленной задачи применяется метод разрешающей функции. Для доказательства достижения нижней грани используется теория опорных функций. Благодаря этому факту, вместо квазистратегии применяется почти стробоскопическая стратегия и указывается способ построения этой стратегии. Приведен пример нелинейной правой части. Библ. 20.

Ключевые слова: преследование, квазистратегия, почти стробоскопическая стратегия, преследователь, интегральное ограничение, терминальное множество, импульсное управление, опорная функция.

DOI: 10.31857/S0044466923070025, EDN: ZXGBVN

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории дифференциальных уравнений с аддитивно входящими обобщенными функциями, в частности, дельта-функцией Дирака, в значительной степени вызвано многочисленными приложениями в теории оптимального управления и дифференциальных игр [1–3]. К настоящему времени эта теория всесторонне разработана, а в монографии [4] доказаны важные теоремы теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

В работе [1] рассмотрены линейные дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и геометрическим ограничением на управление игроков и на их комбинации. Применяя метод разрешающих функций, доказаны теоремы завершения преследования за конечное время. В явном виде указаны условия нахождения гарантированного времени и построение управления преследующего игрока для завершения преследования. Полученные результаты проиллюстрированы на конкретных контрольных примерах.

В работе [5] изучены линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями на управление обоих игроков. Для решения поставленных задач использованы идеи метода разрешающих функций в обобщенном виде, а именно, в матричном. Это позволило, естественно, в отличие от других исследований, использовать возможности преследующего игрока и терминального множества более полно для достижения поставленной цели.

Разрешения конфликтов при интегральных ограничениях на управление игроков и управления импульсного характера представляет определенный интерес. Работа [6] продолжает изуче-

ние игры, рассмотренной в работе [1] при интегральном ограничении вместо геометрического. В вышеуказанной работе с помощью метода разрешающих функций доказаны теоремы с достаточными условиями для завершения преследования за конечное время. Полученные результаты иллюстрированы на конкретных примерах. Особенно следует отметить, что применение полученных результатов к игре, описываемой простыми уравнениями, дает альтернативу, т.е. все пространство разделяется на две части, из точек одной части гарантируется возможность окончания игры, а из точек другой — убегания.

Работа [7] посвящена изучению дифференциальных игр, описываемых квазилинейными дифференциальными уравнениями цилиндрическим терминальным множеством, с геометрическими ограничениями на управление игроков. Если в работах [1–3] для завершения преследования были использованы квазистратегии, то в этой, при тех же предположениях, применен более узкий класс стратегии, а именно стробоскопический. При этом следует отметить, что разрешающая функция не зависит от управления убегающего, что обуславливает не реагировать на воздействия убегающего игрока в ходе движения. В связи с чем представляется возможность убегающему игроку оттянуть время окончания игры.

Изучение процессов с импульсным управлением, движение которых описывается различными видами системы дифференциальных уравнений, представляет как теоретический, так и практический интерес. В работе [8] рассмотрена задача управления объектом, описываемая функционально-дифференциальной системой с последствием общего вида с целью доставления предписанного значения заданному векторному функционалу. При этом воздействие на объект осуществляется импульсно, в заранее заданных моментах времени, тем самым траектория терпит разрыв первого рода.

В работах [1, 5, 6] управление преследователя строилось в виде “контруправления”. Однако для определения τ_K — момента переключения с одного закона на другой, необходима была информация в момент t о всей предыстории управления убегающего. Поэтому, в целом, стратегию преследователя, реализующую окончание преследования, следует классифицировать как квазистратегию. В данной работе при тех же предположениях для завершения преследования использован более узкий класс, а именно, класс почти стробоскопических стратегий [7].

Работы [9, 10] посвящены изучению простых линейных дифференциальных игр преследования, в частности, контрольного примера Понтрягина для многих лиц при интегральных ограничениях на управления игроков. При этом существенно использован метод разрешающих функций А.А. Чикрия для обоснования правила параллельного сближения.

В работах [11–14] исследованы линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздывания. С помощью разрешающих функций установлены достаточные условия завершения игры за конечное время.

В статье [15] рассмотрены линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Преследователи стремятся перевести состояние системы в начало координат, у убегающего цель противоположна. Получены достаточные условия для окончания игры.

В данной работе рассмотрены конфликтно-игровые задачи с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом воздействии на объект управление игроков имеет характер импульсного или интегрального ограничения. Пользуясь идеями работ [1], доказываются теоремы с достаточными условиями для завершения преследования из заданной точки за конечное время. Одной из отличительных черт данной работы является то, что преследующий игрок применяет стратегии из более узкого класса, а именно, стробоскопического. В конце работы приведен пример с нелинейной правой частью для иллюстрации результата.

2. МИНИМИЗАЦИЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Прежде чем сформулировать результат по минимизации функционала приведем некоторые сведения и определения.

Определение 2.1 (см. [17, определение 11]). Функционал $J(v)$, заданный на некотором подмножестве V банахового пространства B , называется *слабополунепрерывным снизу* в точке $v \in V$, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к v при $n \rightarrow \infty$, имеет место соотношение

$$J(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n).$$

Функционал $J(v)$ слабополунепрерывен снизу на множестве V , если он слабополунепрерывен снизу в каждой точке $v \in V$.

Определение 2.2. Пусть V — подмножество банахового пространства B . Многозначное отображение $W : V \rightarrow \Omega(R^d)$ назовем *слабополунепрерывным снизу* в точке $v \in V$, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к v , имеет место неравенство

$$C(W(v), \psi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} C(W(v_n), \psi)$$

при каждом $\psi \in R^d$, где $\Omega(R^d)$ — пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства R^d .

Многозначное отображение $W(v)$ слабополунепрерывно снизу на множестве V , если оно слабополунепрерывно снизу в каждой точке $v \in V$.

Здесь $C(F, \cdot) : R^d \rightarrow R^1$ — опорная функция непустого компактного подмножества F пространства R^d [18, лекция 3].

Пример 2.1. Пусть $W(v) = S_{\|v\|}(0)$. Тогда имеем $C(W(v), \psi) = \|v\| \|\psi\|$. Известно, что функционал $J(v) = \|v\|$ слабополунепрерывен снизу на подмножестве V пространства B .

Теорема 2.1 (см. [17, теорема 1]). *Всякий слабополунепрерывный снизу функционал $J(v)$ на слабокомпактном множестве $V \subset B$ ограничен снизу и достигает на V своей нижней грани.*

Лемма 2.1. Пусть $M \in \Omega(R^d)$ — выпуклое множество, $W : V \rightarrow \Omega(R^d)$ — выпуклозначное слабополунепрерывное снизу многозначное отображение, кроме того $0 \in \text{int } W(v)$, $v \in V$, где V — слабокомпактное подмножество банахового пространства B . Тогда функционал $\alpha(v)$, $v \in V$, определяемый следующим образом:

$$\alpha(v) = \begin{cases} \max\{\alpha \geq 0 : \alpha M \cap W(v) \neq \emptyset\} & \text{при } 0 \notin M, \\ 1 & \text{при } 0 \in M, \end{cases} \quad (2.1)$$

слабополунепрерывен снизу на множестве V .

Доказательство. Так как при $0 \in M$ утверждение леммы очевидно, то далее предположим, что $0 \notin M$.

Пусть $v_* \in V$ и $\{v_n\}$ — произвольная последовательность из множества V , слабоходящаяся к элементу v_* . Введем следующее обозначение $\alpha_n = \alpha(v_n)$. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена снизу, то нижний предел $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ существует и его обозначим через α_∞ . Выберем подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ последовательности $\{\alpha_n\}$, для которой верно равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \alpha_\infty$. Покажем, что $\alpha(v_*) \leq \alpha_\infty$.

Пусть для каждого k , $k = 1, 2, \dots$

$$\min_{\|\psi\|=1} \{\alpha_{n_k} C(M, \psi) + C(W(v_{n_k}), -\psi)\} = \alpha_{n_k} C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) \geq 0.$$

Покажем, что для всех $k = 1, 2, \dots$ имеют место следующие равенства:

$$\alpha_{n_k} C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) = 0. \quad (2.2)$$

Действительно, если для некоторого k имеет место неравенство

$$\alpha_{n_k} C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) > 0,$$

то ясно, что $\alpha_{n_k} C(M, \psi) + C(W(v_{n_k}), -\psi) > 0$ для любого ψ , $\|\psi\| = 1$. Следовательно, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(\alpha_{n_k} + \varepsilon) C(M, \psi) + C(W(v_{n_k}), -\psi) > 0$$

для любого ψ , $\|\psi\| = 1$, это означает, что

$$(\alpha_{n_k} + \varepsilon)M \cap W(v_{n_k}) \neq \emptyset,$$

которое противоречит определению числа α_{n_k} (см. (2.1)).

Отсюда в силу неравенства $C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) > 0$, $\alpha_{n_k} > 0$, следует, что

$$C(M, \psi_{n_k}) < 0. \quad (2.3)$$

Так как сфера $\psi: \|\psi\| = 1$ является компактным множеством, то у последовательности $\{\psi_{n_k}\}$ имеется подпоследовательность, сходящаяся к некоторому элементу ψ_* , $\|\psi_*\| = 1$, не умаляя общности, можно считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\{\psi_{n_k}\}$. Из равенства (2.2) и неравенства

$$\alpha(v_*)C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k}) \geq 0$$

получим

$$(\alpha(v_*) - \alpha_{n_k})C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k}) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha(v_*) - \alpha_{n_k})C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k}) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) \leq \\ &\leq (\alpha(v_*) - \alpha_{n_k})C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*) + C(W(v_*), -\psi_*) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}). \end{aligned}$$

Добавля и вычитая $C(W(v_{n_k}), -\psi_*)$ из последнего выражения, получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha(v_*) - \alpha_{n_k})C(M, \psi_{n_k}) + C(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*) + C(W(v_*), -\psi_*) - \\ &- C(W(v_{n_k}), -\psi_*) + C(W(v_{n_k}), -\psi_*) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь, учитывая следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |C(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*)| &\leq \|W(v_*)\| \|\psi_{n_k} - \psi_*\|, \\ C(W(v_*), -\psi_*) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} C(W(v_{n_k}), -\psi_*), \\ |C(W(v_{n_k}), -\psi_*) - C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k})| &\leq \|W(v_{n_k})\| \|\psi_* - \psi_{n_k}\| \end{aligned}$$

и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, из неравенства (2.4) имеем $0 \leq (\alpha(v_*) - \alpha_\infty)C(M, \psi_*)$.

Покажем, что при $k \rightarrow \infty$ строгое неравенство $C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}) > 0$ остается. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} 0 &< C(W(v_*), -\psi_*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} C(W(v_{n_k}), -\psi_*) \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} [C(W(v_{n_k}), \psi_{n_k} - \psi_*) + C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k})] = \lim_{k \rightarrow \infty} C(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (2.2) следует, что $\alpha_\infty \geq \alpha(v_*)$, т.е. слабополунепрерывность снизу функционала $\alpha(v)$ на элементе v_* . Этим лемма доказана.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz + u - \lim_{k \rightarrow \infty}, \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

где z — фазовый вектор, u, v — параметры управления преследующего и убегающего игроков соответственно, C — постоянная матрица порядка $d \times d$, U — непустое компактное подмножество в $\mathbb{R}^d$, терминальное множество представляется бесконечным цилиндром вида $M = M^0 + M^1$, где M^0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^d$, M^1 — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^d$ на L , а через e^{tC} — фундаментальную матрицу однородной части системы (3.1). Тогда, понятно, что $z \in M$ тогда и только тогда, когда $\pi z \in M^1$. В дальнейшем, этим фактом полностью воспользуемся. Пусть $\{\tau_i\}_{i=0}^\infty$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без конечных точек сгущения, т.е. любой отрезок вида $[a, b]$ содержит конечное число элементов этой последовательности, положим $\tau_0 = 0$. Тогда, например, импульсное воздействие преследователя в моментах τ_i времени представляется с помощью функции Дирака $\delta(t - \tau_i)$, т.е. его управление представляется в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad t \geq 0,$$

где $u_i \in U$.

Через $B(i, \sigma)$ обозначим совокупность всех измеримых функций $v(\cdot) : [0, \tau_{i+1} - \tau_i] \rightarrow R^d$, удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \|v(t)\|^2 dt \leq \sigma^2.$$

После подстановки в правую часть уравнения (3.1) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно [4, п. 1] эта система имеет решение при любом начальном условии

$$z(0) = z^0,$$

причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах (τ_i, τ_{i+1}) , где $i \in N$, $\tau_0 = 0$. А решения в моментах времени τ_i могут иметь разрывы первого рода.

Определение 3.1 (см. [19]). *Стратегией преследователя* назовем отображение $\mathbb{P}$, состоящее из совокупности отображений:

$$\mathbb{P}_i(\cdot, \cdot) : R^d \times B(i, \sigma) \rightarrow U.$$

Определение 3.2. *Стратегией убегающего* назовем отображение $\mathbb{E}$, состоящее из совокупности отображений:

$$\mathbb{E}_i(\cdot) : R^d \rightarrow B(i, \sigma).$$

Заданные начальная точка z^0 и пара стратегий $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ порождают единственную траекторию

$$z(t) = z(t; z^0, \mathbb{P}, \mathbb{E}), \quad t \geq 0.$$

Траектория $z(t)$ на полуинтервале $[0, \tau_1)$ определяется как решение задачи

$$\dot{z} = Cz - u_0 \delta(t) + v_0(t), \quad z(0) = z^0,$$

где $v_0(\cdot) = \mathbb{E}_0(z^0)$, $u_0 = \mathbb{P}_0(z^0, v_0(\cdot))$.

Далее, траектория $z(t)$ из отрезка $[0, \tau_k]$ на полуинтервал $[\tau_k, \tau_{k+1})$ продолжается как решение следующей задачи:

$$\dot{z} = Cz - u_k \delta(t - \tau_k) + v_k(t), \quad z(\tau_k) = z(\tau_k - 0),$$

где $v_k(t) = \bar{v}(t - \tau_k)$, $\bar{v}(\cdot) = \mathbb{E}_k(z(\tau_k))$ и

$$u_k(t) = P_k(z(\tau_k), \bar{v}(\cdot))(t - \tau_k), \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Определение 3.3. Игра (3.1), начинающаяся из начальной точки z^0 , завершается к моменту τ_K , если существует стратегия $\mathbb{P}$ преследующего игрока так, что $z(\tau_K; z^0, \mathbb{P}, \mathbb{E}) \in M$ для любой стратегии $\mathbb{E}$ убегающего игрока.

Постановка задачи. Определить условия, при выполнении которых для данной начальной точки $z^0 \notin M$ можно завершить преследования.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается игра (3.1) при условии, что преследующий игрок применяет импульсное управление, убегающий имеет право применять измеримое управление $v(t)$, $t \geq 0$, с условием:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|v(t)\|^2 dt \leq \sigma^2,$$

где σ — неотрицательное фиксированное число.

Пусть $v(\cdot) \in B(i, \sigma)$ — допустимое управление убегающего игрока. Рассмотрим множества

$$W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)C} U - \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau,$$

$$W_i(n) = \bigcap_{v(\cdot) \in B(i, \sigma)} W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)C} U \overset{*}{=} G(n, \tau_i, \tau_{i+1}). \quad (4.1)$$

Здесь

$$G(n, \tau_i, \tau_{i+1}) = \left\{ x \in L : x = \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau, v(\cdot) \in B(i, \sigma) \right\},$$

где $n \in N$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. А через

$$A \overset{*}{=} B = \{x : x + B \subset A\} = \bigcap_{b \in B} (A - b)$$

будем обозначать геометрическую разность (разность Минковского) множеств A и B .

Лемма 4.1. Множества $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ являются выпуклыми компактными подмножествами подпространства L .

Доказательство. Вначале покажем выпуклость множеств $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$. Пусть $x_1, x_2 \in G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ и $\lambda \in [0, 1]$. Тогда по определению множеств $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ существуют функции $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in B(i, \sigma)$ такие, что:

$$x_k = \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \|\lambda v_1(\tau) + (1 - \lambda)v_2(\tau)\|^2 d\tau &= \lambda^2 \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \|v_1(\tau)\|^2 d\tau + 2\lambda(1 - \lambda) \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} v_1(\tau)v_2(\tau) d\tau + \\ &+ (1 - \lambda)^2 \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \|v_2(\tau)\|^2 d\tau \leq \lambda^2 \sigma^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\sigma^2 + (1 - \lambda)^2 \sigma^2 = \sigma^2, \end{aligned}$$

и

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} (\lambda v_1(\tau) + (1 - \lambda)v_2(\tau)) d\tau,$$

то

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in G(n, \tau_i, \tau_{i+1}).$$

В силу теоремы [20, теорема 6.4.3], замкнутый шар S радиусом σ с центром в нуле пространства $L_2[\tau_i, \tau_{i+1}]$ слабокомпактен. Отсюда легко получить компактность множеств $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$. Лемма 4.1 доказана.

Предположение 4.1. Множества $W_i(n)$ непусты при всех $n, i, n \in N, i = 0, 1, \dots, n$.

В силу предположения 1 каждое из множеств $W_i(n)$ имеет внутренний элемент для всех $n, i, n \in N, i = 0, 1, \dots, n$, которые обозначим через $w_i(n)$. Пусть $w = w(n) = \{w_i(n)\}_{i=1}^n$, и положим

$$\xi(n, z, w) = \pi e^{(\tau_n - \tau_0)C} z + \sum_{i=0}^n w_i(n).$$

Зафиксируем его. Определим следующую функцию:

$$\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \sup \left\{ \alpha \geq 0 : \alpha \left[M^1 - \xi(n, z, w) \right] \cap \left[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n) \right] \neq \emptyset \right\}. \quad (4.2)$$

Применяя результаты леммы 4.1 к функционалу $\alpha_i(n, z, v(\cdot), w), v(\cdot) \in B(i, \sigma)$, получим, что существует функция $v_i^*(\cdot) \in B(i, \sigma)$, удовлетворяющая равенству:

$$\inf_{v(\cdot) \in B(i, \sigma)} \alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w).$$

Предположение 4.2. Пусть выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w) \geq 1$$

при всех $n, i, n \in N, i = 0, 1, \dots, n$.

Введем следующее обозначение:

$$K = K(z, w) = \min \left\{ j \in \{0, \dots, n\} : \sum_{i=0}^j \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w) \geq 1 \right\}. \quad (4.3)$$

Если $\xi(n, z, w) \in M^1$, то $\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = +\infty$ для $i, v \in B(i, \sigma)$, и в этом случае значение интеграла в соотношении (4.3) соответственно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство будет выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в фигурных скобках в (4.3) не выполняется ни при одном $j, j \in \{0, \dots, n\}$, то положим $k = n + 1$.

Определим разрешающие функции [6]

$$\Lambda_i(n, z, w) = \begin{cases} \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w), & i = 0, 1, \dots, K-1, \\ 1 - \sum_{j=0}^{K-1} \alpha_j(n, z, v_j^*(\cdot), w), & i = K, \\ 0, & i = K+1, K+2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.4)$$

Справедлива следующая

Лемма 4.2. Пусть выполнены предположения 4.1 и 4.2, множества M^1 и U выпуклы. Тогда

$$\Lambda_i(n, z, w) \left[M^1 - \xi(n, z, w) \right] \cap \left[W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n) \right] \neq \emptyset$$

для $i, i = 0, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $i = 0, 1, \dots, K-1$, тогда из (4.4) получим $\Lambda_i(n, z, w) = \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w)$ и поэтому согласно (4.2) следует верность (4.5). При $i = K+1, \dots, n$ имеем $\Lambda_i(n, z, w) = 0$, значит, условие (4.5) будет выполнено, поскольку множества $W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ содержат нулевой элемент в качестве внутреннего.

Теперь рассмотрим случай $i = K$. Покажем, что множество

$$\Gamma = \left\{ \alpha \geq 0 : \alpha \left[M^1 - \xi(n, z, w) \right] \cap \left[W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n) \right] \right\} \neq \emptyset$$

выпукло. По условию леммы множества $M^1 - \xi(n, z, w)$ и $W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ выпуклы. Допустим $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} x_1 &\in \alpha_1 [M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)], \\ x_2 &\in \alpha_2 [M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)]. \end{aligned}$$

Так как $M^1 - \xi(n, z, w)$ и $W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ выпуклы, то для любого $\lambda \in [0, 1]$ имеет место

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in (\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2) [M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)],$$

из которого следует, что $\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2 \in \Gamma$, значит, Γ выпукло. Отсюда очевидно, что

$$\alpha [M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)] \neq \emptyset$$

для всех $\alpha: 0 \leq \alpha \leq \alpha_K$. Но по (4.3), (4.4) $\Lambda_K(n, z, w) \leq \alpha_K(n, z, v_i^*(\cdot), w)$, т.е. утверждение леммы справедливо и при $i = K$. Лемма 4.2 доказана.

Теорема 4.1. Если для системы (3.1) выполнены предположения 4.1 и 4.2, множества M^1, U выпуклы и $K = K(z, w) < \infty$ для начального положения $z = z^0$ и вышеуказанного набора w , то траекторию $z(t)$ системы (3.1) можно вывести на терминальное множество M к моменту времени $t = \tau_K$.

Доказательство. Для доказательства теоремы надо построить соответствующую стратегию преследователя $\mathbb{P}$, состоящую из совокупности отображений: $\mathbb{P}_i(\cdot, \cdot): R^d \times B(i, \sigma) \rightarrow U$. Рассмотрим вначале случай, когда $\xi(K, z^0, w) \notin M$.

При $i = 0, 1, \dots, K$ отображение $\mathbb{P}_i(\cdot, \cdot)$ определим следующим образом: $\mathbb{P}_i(z^0, v(\cdot)) = u_i$, где u_i удовлетворяет следующему включению:

$$\pi e^{(\tau_K - \tau_i)C} u_i - \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_K - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau - w_i(K) \in \Lambda_i(K, z^0, w) (M^1 - \xi(K, z^0, w)). \quad (4.6)$$

Заметим, что в силу соотношений (4.1), (4.2), предположения 4.1 и леммы 4.2 включение (4.6) выполняется при некотором $u_i \in U$.

Для $i = K + 1, \dots, n$ в качестве u_i выбираем решения уравнения

$$\pi e^{(\tau_K - \tau_i)C} u_i - \int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} \pi e^{(\tau_K - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau = w_i(K). \quad (4.7)$$

Это уравнение в силу предположения имеет решение $u_i \in U$.

Из формулы Коши с начальным условием $z(0) = z^0$ и свойств дельта-функции следует представление решения системы (3.1)

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_K) &= \pi e^{(\tau_K - \tau_0)C} z^0 + \int_{\tau_0}^{\tau_K} \pi e^{(\tau_K - \tau)C} (u(\tau) - v(\tau)) d\tau = \\ &= \pi e^{(\tau_K - \tau_0)C} z^0 + \sum_{i=1}^K \pi e^{(\tau_K - \tau_i)C} u_i - \int_{\tau_0}^{\tau_K} \pi e^{(\tau_K - \tau)C} v(\tau) d\tau = \\ &= \pi e^{(\tau_K - \tau_0)C} z^0 + \sum_{i=1}^K \left[\pi e^{(\tau_K - \tau_i)C} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_K - \tau)C} v(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Прибавим и вычтем из правой части равенства (4.8) величину $\sum_{i=1}^K w_i(K)$. Учитывая выпуклость множества M^1 и выбор управления $u(t)$, $t \geq 0$ (4.6), (4.7) получим

$$\pi z(\tau_K) \in \xi(K, z^0, w) \left[1 - \sum_{i=1}^K \Lambda_i(K, z^0, v(\cdot), w) \right] + \sum_{i=1}^K \Lambda_i(K, z^0, v(\cdot), w) M^1 = M^1.$$

А это означает $z(\tau_K) \in M$, т.е. игра преследования завершена.

Пусть теперь $\xi(K, z^0, w) \in M$. Тогда в качестве векторов скачков u_i для всех $i = 1, 2, \dots, K$ выберем решения уравнения (4.7). В этом случае из представления (4.8) следует включение $\pi z(\tau_K) \in M^1$.

5. ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим следующую конфликтно-управляемую задачу

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (|v|^2 + 1) z_2 + v, \\ \dot{z}_2 &= u, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $z_1, z_2, v, u \in R^d$.

Предположим, что преследователь может воздействовать на систему (5.1) только в моменты $\{\tau_i\}$, $i = 0, 1, \dots$, $\tau_0 = 0$ и его воздействие в эти моменты имеет импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad (5.2)$$

где вектор скачков u_i выбирается из единичного шара $S_1(0)$ с центром в нуле пространства R^d .

Управлением убегающего игрока являются d — мерные измеримые вектор функции $v(\cdot)$, которые при каждом $i, i = 0, 1, \dots$, удовлетворяют интегральному ограничению

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq \sigma^2. \quad (5.3)$$

Задача преследователя состоит в том, чтобы, определенным образом выбирая управления $u_i \in U$, за конечное время вывести траекторию системы (5.1) на цилиндрическое терминальное множество M , которое имеет вид

$$M = M^0 + M^1,$$

где $M^0 = \{(0, z_2) : z_2 \in R^d\}$, M^1 — подмножество подпространства $M^{0\perp}$.

Утверждение 5.1. Если $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n \rightarrow \infty$ (без конечных точек сгущения) и M^1 — выпуклое компактное множество, то в игре (5.1) возможно завершение преследования из любой начальной точки $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in R^{2d}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим начальные точки вида $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, где $z_2^0 = 0$. Через π обозначим оператор ортогонального проектирования и по определению, положим $\pi(z_1, z_2) \doteq z_1$. Легко показать, что

$$W_i(v(\cdot)) = S_{\|v(\cdot)\|^2 + \tau_{i+1} - \tau_i} \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} v(\theta) d\theta \right).$$

Так как

$$\left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} v(\theta) d\theta \right| \leq \|v(\cdot)\| \sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}$$

отсюда

$$\|v(\cdot)\| \sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i} < \|v(\cdot)\|^2 + \tau_{i+1} - \tau_i,$$

то $0 \in \text{int } W_i(v(\cdot))$.

Кроме того, многозначное отображение $W_i(v(\cdot))$ является слабополунепрерывно снизу на слабокомпактном множестве (5.3).

Пусть $\|h_0\| = \min_{h \in M - z_i^0} \|h\|$. Очевидно, минимум функционала $\alpha_i(v(\cdot))$ достигается при

$$v(\vartheta) = -x \frac{\overline{h_0}}{\|h_0\|}, \quad 0 \leq x \leq \sigma,$$

где x пока неопределенное число. Тогда имеем

$$\alpha_i(v(\cdot)) = \frac{x^2 + \tau_{i+1} - \tau_i - x\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}}{\|h_0\|},$$

$$\min_{0 \leq x \leq \sigma} \alpha_i(v(\cdot)) = \min_{0 \leq x \leq \sigma} \frac{x^2 + \tau_{i+1} - \tau_i - x\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}}{\|h_0\|}.$$

Легко показать, что

$$\min \alpha_i(v(\cdot)) = \begin{cases} \frac{3(\tau_{i+1} - \tau_i)}{4\|h_0\|} & \text{при } \tau_{i+1} - \tau_i \leq 2\sigma, \\ \frac{\sigma^2 + \tau_{i+1} - \tau_i - \sigma\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}}{\|h_0\|} & \text{при } \tau_{i+1} - \tau_i > 2\sigma. \end{cases}$$

В силу $\tau_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$ и

$$\sigma^2 + \tau_{i+1} - \tau_i - \sigma\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i} = (\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i} - \sigma)^2 + \sigma\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i} > \sqrt{2}\sigma\sigma$$

следует, что существует натуральное число K :

$$\sum_{i=1}^{K-1} \min \alpha_i(v(\cdot)) < 1, \quad \sum_{i=1}^K \min \alpha_i(v(\cdot)) \geq 1.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены. Значит, в рассматриваемом случае утверждение доказано.

Теперь рассмотрим случай $z_2^0 \neq 0$. Пусть $[a]$ означает целую часть, а $\{a\}$ — дробную часть действительного числа a . Введем обозначения:

$$m = \left\lceil \left[\frac{z_2^0}{z_2^0} \right] \right\rceil, \quad u_i^0 = -\frac{z_2^0}{\left\lceil \frac{z_2^0}{z_2^0} \right\rceil}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad u_m^0 = -\left\lceil \left[\frac{z_2^0}{z_2^0} \right] \right\rceil \frac{z_2^0}{\left\lceil \frac{z_2^0}{z_2^0} \right\rceil}.$$

Стратегии преследователя $\mathbb{P}$ построим следующим образом:

$$u_i = \mathbb{P}_i(z^0, v(\cdot))(t - \tau_i), \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m.$$

Тогда получается $z_2(\tau_{m+1} - 0) = 0$. Теперь исходя из полученного начального положения $z^0 = (z_1(\tau_{m+1} - 0), 0)$ построим далее $\mathbb{P}_i(\cdot, \cdot)$, $i = m+1, \dots$ и, из предыдущих рассуждений следует, что существует натуральное число K , что: $z(\tau_K) \in M$. Этим утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 212–224.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
4. Филиппов А.В. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
5. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 290–301.
6. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2016. Т. 22. № 3. С. 273–282.
7. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. О достаточных условиях разрешимости игровых задач сближения в классе стробоскопических стратегий // Теория оптимальных решений. 2005. № 4. С. 49–55.
8. Максимов В.П. Управление функционально-дифференциальной системой в условиях импульсных возмущений // Изв. вузов. Матем. 2013. № 9. С. 70–74.
9. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. I // Cybernetics and Systems Analysis. 2013. V. 49. № 5. P. 756–767.
10. Samatov B.T. The Resolving Functions Method for the Pursuit Problem with Integral Constraints on Controls // J. of Automation and Information Sciences. USA: Begell House Inc. 2013. V. 45. № 8. P. 41–58.
11. Мамадалиев Н.А. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков // Изв. вузов. Матем. 2020. № 3. С. 12–28.
12. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.
13. Мамадалиев Н. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний // Матем. заметки. 2012. Т. 5. С. 750–760.
14. Мамадалиев Н. О задаче преследования для линейных дифференциальных игр с различными ограничениями на управления игроков // Дифференц. ур-ния 2012. Т. 48. № 6. С. 860–873.
15. Ibragimov G.I. On a Multiperson pursuit problem with integral constraints on the controls of the players // Math. N. 2001. V. 70. № 2. P. 181–191.
16. Чикрий А.А., Чикрий Г.П. Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 324–333.
17. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во Московского университета. 1974.
18. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высш. школа, 2001.
19. Азамов А. Двойственность линейных дифференциальных игр преследования // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 4. С. 777–779.
20. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.