ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 7, с. 1100–1107

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.658

МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

Ю. А. Черняев[1,*]

[1] 420111 Казань, ул. К. Маркса, 10, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

**e-mail: chernyuri@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.
Переработанный вариант 06.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Предлагается обобщение метода условного градиента на случай невыпуклых множеств ограничений, представляющих собой теоретико-множественное пересечение выпуклой гладкой поверхности и выпуклого компакта. Исследуются необходимые условия экстремума и вопросы сходимости метода. Библ. 13.

Ключевые слова: выпуклая гладкая поверхность, выпуклое компактное множество, минимизация гладкой функции, метод условного градиента.

DOI: 10.31857/S0044466923070049, **EDN:** ZXHUGJ

ВВЕДЕНИЕ

Один из подходов к решению задачи $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, где X выпукло и компактно и $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$, состоит в построении итерационного процесса по правилу

$$x_0 \in X, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k\left(z(x_k) - x_k\right), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $z(x_k)$ – одно из решений вспомогательной задачи

$$\varphi_k(x) = \left\langle \varphi'(x_k), x - x_k \right\rangle \to \min, \quad x \in X,$$

а числа $\alpha_k \in (0; 1]$, $k = 0, 1, \ldots$, могут выбираться различными способами. В силу компактности множества X, задача минимизации линейной функции на нем всегда имеет хотя бы одно решение. Если X имеет простую геометрическую структуру и представляет собой, например, шар или выпуклый многогранник, заданный координатами своих вершин или с помощью линейных неравенств, то нахождение этого решения осуществляется достаточно просто, и данный метод решения исходной задачи, называемый методом условного градиента, может оказаться вполне эффективным.

Описанный подход к решению задачи $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, впервые был предложен в [1] для поиска точки минимума выпуклой квадратичной функции $\varphi(x)$. Позднее было разработано обобщение метода условного градиента на случай, когда $\varphi(x)$ – произвольная гладкая функция (при изучении некоторых вариантов метода она предполагается выпуклой), градиент которой удовлетворяет условию Липшица, и получены различные его модификации. В [2–4] и в ряде других работ для некоторых способов выбора чисел α_k, $k = 0, 1, \ldots$, характеризующих величину итерационного шага, доказаны утверждения о сходимости $\{x_k\}$ ко множеству точек, удовлетворяющих необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X. Для случая, когда $\varphi(x)$ выпукла на X, доказаны также утверждения о скорости сходимости $\{x_k\}$ к точке глобального минимума $\varphi(x)$ на X, а для случая сильно выпуклой функции $\varphi(x)$ или сильно выпуклого множества X получены дополнительные оценки скорости сходимости, представляющие практический интерес. Кроме того, в [3] предложен вариант метода для задачи минимизации на выпуклом замкнутом множестве, не являющемся ограниченным.

Среди работ, посвященных модификациям метода условного градиента, можно отметить статью [5], где рассмотрен часто встречающийся на практике случай, когда целевая функция $\varphi(x)$ и допустимое множество X, представимое с помощью функциональных ограничений, задаются с погрешностями. Из работ, опубликованных в последние годы, отметим [6], где предложен вариант метода, который не требует для нахождения чисел $\alpha_k \in (0;1]$, $k = 0, 1, \ldots$, решения вспомогательных задач одномерной оптимизации, но при этом в процессе своей реализации учитывает результаты предыдущих вычислений и гарантирует монотонное убывание $\{\varphi(x_k)\}$. Предложенный в [6] алгоритм позволяет уменьшить объем вычислений на итерации и в то же время добиться более быстрой сходимости $\{x_k\}$, чем при априорном задании α_k из условий $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k = \infty$.

К настоящему времени разработаны различные обобщения метода условного градиента для решения более сложных задач оптимизации. Например, в [7] изучен случай, когда допустимое множество X в конечномерном евклидовом пространстве имеет непустую внутренность и представляет собой теоретико-множественную разность двух выпуклых множеств. Идея предлагаемого в [7] алгоритма состоит в том, что вспомогательная задача минимизации линейной функции $\varphi_k(x)$ на каждой итерации решается не на самом допустимом множестве X, а на некотором его выпуклом подмножестве, содержащем точку x_k. В [8] изучается применение метода для приближенного нахождения точек минимума функционалов, определенных на ограниченных замкнутых подмножествах рефлексивного пространства: устанавливаются достаточные условия сходимости метода и разрабатываются приложения полученных результатов к задачам оптимального управления. В [9] рассмотрен вопрос о сходимости метода для задачи оптимизации функционала, зависящего от решений нелинейного управляемого функционально-операторного управления в банаховом пространстве.

Среди работ, опубликованных в последние годы, следует отметить статью [10], где изучается конечномерное евклидово пространство и предлагается обобщение метода условного градиента на случай, когда допустимое множество X невыпукло и представляет собой границу сильно выпуклого множества A, которая в общем случае не является гладким многообразием. При реализации алгоритма из [10] на каждой итерации осуществляется поиск решения вспомогательной задачи минимизации линейной функции $\varphi_k(x)$ на множестве A. Это решение единственно, совпадает с решением задачи минимизации $\varphi_k(x)$ на X и принимается в качестве следующего приближения x_{k+1}; при выполнении ряда дополнительных условий доказывается сходимость $\{x_k\}$ к точке строгого глобального минимума $\varphi(x)$ на X.

В настоящей статье предлагается обобщение метода условного градиента на случай множеств ограничений, представимых в виде пересечения выпуклой гладкой поверхности S и выпуклого компактного множества F. Эта задача представляет собой важный частный случай задачи, изученной в [11], где вместо выпуклой гладкой поверхности рассматривается гладкая поверхность S общего вида, а выпуклое замкнутое множество F не предполагается ограниченным. При использовании алгоритма метода проекции градиента из [11] на каждой итерации требуется решение двух вспомогательных задач проектирования: сначала ищется проекция точки на пересечение множества F с касательной гиперплоскостью к поверхности S, а затем – проекция на пересечение F с самой поверхностью S. Вторая из этих задач, вообще говоря, является сложной даже в случае, когда поверхность S является выпуклой: для ее решения приходится либо привлекать трудоемкие итерационные процедуры, о которых упоминается в [11], либо разрабатывать специфические алгоритмы, учитывающие особенности поверхности S и множества F, рассматриваемых в конкретной задаче.

Алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, вместо решения двух вспомогательных задач проектирования включает в себя решение вспомогательной задачи минимизации линейной функции на пересечении множества F с касательной гиперплоскостью к поверхности S и задачи нахождения точки пересечения отрезка, концы которого расположены по разные стороны от поверхности S, с этой поверхностью. Задача минимизации линейной функции на пересечении выпуклого компакта F с гиперплоскостью нередко оказывается проще задачи поиска проекции на это пересечение, а задача нахождения точки пересечения отрезка с поверхностью S – проще задачи поиска проекции на пересечение F и S. Данное обстоятельство позволяет снизить трудоемкость вычислений при рассмотрении некоторых классов компактных множеств и выпуклых гладких поверхностей, поэтому для соответствующих задач минимизации на $F \cap S$ предлагаемый алгоритм становится более эффективным по сравнению с изученным в [11].

Если, например, F представляет собой многогранник, заданный координатами своих вершин, то первая из двух вспомогательных задач сводится к нахождению точек пересечения его ребер с гиперплоскостью (когда F имеет небольшое число вершин, поиск таких точек осуществляется просто) и сравнению значений линейной функции в найденных точках. Если же F задано с помощью линейных неравенств, то соответствующая задача представляет собой задачу линейного программирования, решаемую с помощью конечношаговых алгоритмов симплекс-метода.

В силу выпуклости поверхности S, точка пересечения с ней любого отрезка, концы которого расположены по разные стороны от S, единственна, и задача ее нахождения сводится к поиску одного из корней некоторого уравнения с одним неизвестным. Если уравнение с n неизвестными, задающее поверхность S в пространстве E^n, имеет достаточно простой вид, то и вид уравнения для нахождения точки пересечения также становится простым и не зависит от структуры множества F. Наиболее легко эта вспомогательная задача решается в случае, когда S задана уравнением второго порядка. Например, если S в трехмерном пространстве представляет собой эллипсоид, эллиптический параболоид или одну из половин двуполостного гиперболоида, то задача нахождения точки пересечения отрезка с такой поверхностью сводится к поиску одного из корней квадратного уравнения, решаемого элементарно.

Следует отметить, что подход, основанный на поиске точки пересечения поверхности с отрезком, концы которого заведомо лежат по разные стороны от нее, используется также при реализации одного из алгоритмов, рассмотренного в [10]. В указанной работе рассмотрена, в частности, задача минимизации $\varphi(x)$ на поверхности S, задаваемой равенством вида $g(x) = 0$, где $\varphi(x)$ и $g(x)$ являются гладкими, и их градиенты удовлетворяют условию Липшица. Для решения поставленной задачи предлагается использовать обобщенный метод проекции градиента, при реализации которого на каждой итерации приходится осуществлять поиск точки пересечения поверхности S с некоторым отрезком. Этот отрезок перпендикулярен касательной гиперплоскости к поверхности S, построенной в точке x_k, и лежит на прямой, проходящей через точку, полученную в результате перемещения из x_k в направлении антиградиента функции $\varphi(x)$. Соответствующий алгоритм из [10] для своей реализации требует, однако, знания ряда констант или их оценок (данное обстоятельство существенно ограничивает возможность его использования на практике) и, кроме того, он не предназначен для задач, где в качестве допустимого множества рассматривается не вся поверхность, а какая-либо ее часть. Достоинство метода, предлагаемого в настоящей работе, состоит в том, что при его использовании не требуется знание каких-либо констант или их оценок, а также в возможности его использования для допустимых множеств, представляющих собой пересечение поверхности $g(x) = 0$ (предполагается, что $g(x)$ является выпуклой и гладкой, и ее градиент удовлетворяет условию Липшица) с выпуклым компактом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ МЕТОДА

Рассмотрим задачу вида $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, в которой X представляет собой теоретико-множественное пересечение выпуклого компактного множества F, имеющего непустую внутренность, и множества $S = \left\{x \in E^n : g(x) = 0\right\}$, где $g(x)$ является выпуклой и гладкой на E^n и $g(x) < 0$ при некотором $x \in E^n$. Предполагается, что $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$. В силу наложенных на $g(x)$ условий, множество S представляет собой выпуклую гладкую поверхность.

Введем следующие обозначения: $n(x) = g'(x)\|g'(x)\|^{-1}$ – орт нормали касательной гиперплоскости к поверхности S в точке $x \in S$; $G = \left\{x \in E^n : g(x) \le 0\right\}$ – выпуклая оболочка поверхности S; $\Lambda(x) = \left\{y \in E^n : \langle n(x), y - x\rangle = 0\right\}$ – касательная гиперплоскость к S и G в точке $x \in S$. В силу гладкости $g(x)$, гиперплоскость $\Lambda(x)$ существует для любого $x \in S$ и вектор-функция $n(x)$ непрерывна на S.

В силу компактности F и замкнутости S, вытекающей из гладкости $g(x)$, множество $X = F \cap S$ компактно. Считая $x \in X$, обозначим через $z(x)$ произвольное из решений задачи $\langle \varphi'(x), y - x\rangle \to \min$, $y \in F \cap \Lambda(x)$. В силу замкнутости $\Lambda(x)$, компактности F и непрерывности линейной функции эта задача имеет хотя бы одно решение, при этом $\langle \varphi'(x), z(x) - x\rangle \le 0$, так как

$x \in F \cap \Lambda(x)$. Если $\langle \varphi'(x), z(x) - x \rangle = 0$, то обе точки x и $z(x)$ являются решением задачи $\langle \varphi'(x), y - x \rangle \to \min$, $y \in F \cap \Lambda(x)$.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать следующий алгоритм построения последовательных приближений.

Шаг 0. Задается точка $c \in F \cap \operatorname{int} G$ и полагается $k = 0$.

Шаг 1. Пусть $x_k \in X$ есть k-е приближение.

Шаг 2. Строятся гиперплоскость $\Lambda(x_k)$ и определяется точка $z(x_k)$ – решение задачи $\varphi_k(x) = \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle \to \min$, $x \in F \cap \Lambda(x_k)$.

Шаг 3. Если $\varphi_k(z(x_k)) = 0$, то вычисления заканчиваются, иначе осуществляется переход к шагу 4.

Шаг 4. Задается $\alpha_k \in (0;1]$.

Шаг 5. Пусть x_{k+1} – точка пересечения отрезка $[c,\ x_k + \alpha_k(z(x_k) - x_k)]$ с поверхностью S.

Шаг 6. Полагается $k := k + 1$ и осуществляется переход к шагу 1.

Множество G в силу выпуклости $g(x)$ является выпуклым, поэтому точка $x_k + \alpha(z(x_k) - x_k)$ при любом α не лежит в $\operatorname{int} G$, а значит, точка пересечения отрезка $[c, x_k + \alpha(z(x_k) - x_k)]$ с поверхностью S обязательно существует.

В силу компактности F существует $d_0 = \max\limits_{x,\, y \in F} \|x - y\| < \infty$, а поскольку x, $z(x) \in F$, то при любом $x \in X$ имеем $\|x - z(x)\| \le d_0$. Пусть $D(x) = \{ y \in E^n : \|x - y\| \le d_0 \}$ – шар радиуса d_0 с центром в точке x, а Y – такое выпуклое компактное множество, что $c \in Y$ и для любого $x \in X$ справедливо включение $D(x) \subset Y$. В силу наложенных на $g(x)$ условий имеем $\|g'(x)\| \ne 0$ при любом $x \in S$. В силу компактности Y и замкнутости, пересечение этих множеств является компактным, поэтому существует $K = \min\limits_{x \in S \cap Y} \|g'(x)\| > 0$. Кроме этого, в силу выпуклости Y при $\alpha \in (0;1]$ точка пересечения отрезка $[c, x + \alpha(z(x) - x)]$ с поверхностью S лежит в Y, так как x, $z(x)$, $c \in Y$.

Будем полагать, что $g(x) \in C^{1,1}(Y)$, т.е. существует такая положительная константа M, что для всех $x, y \in Y$ справедливо неравенство $\|g'(x) - g'(y)\| \le M \|x - y\|$. Тогда из показанного в [12] следует, что при $N = M/K$ для всех $x, y \in S \cap Y$ имеет место $\|n(x) - n(y)\| \le N \|x - y\|$.

Из непрерывности $n(x)$ вытекает непрерывность $\psi(x) = \langle n(x), c - x \rangle$ на S, поэтому, в силу замкнутости S и компактности Y, существует $\varepsilon = \min\limits_{x \in S \cap Y} |\psi(x)|$ при этом $\varepsilon > 0$, так как G выпукло и $c \in \operatorname{int} G$.

Обозначив через c_x проекцию точки c на гиперплоскость $\Lambda(x)$, $x \in S$, получим $\langle n(x), c - x \rangle = \langle n(x), c - c_x \rangle + \langle n(x), c_x - x \rangle$, где второе слагаемое равно нулю, так как x, $c_x \in \Lambda(x)$ и $n(x)$ ортогонален $\Lambda(x)$, а первое слагаемое с точностью до знака равно расстоянию от c_x до $\Lambda(x)$, так как векторы $n(x)$ и $c - c_x$ коллинеарны и $\|n(x)\| = 1$. Это означает, что расстояние от точки $c \in E^n$ до гиперплоскости $\Lambda(x)$, $x \in S$, равно $|\psi(x)|$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В силу компактности Y существует $d = \max\limits_{x \in Y} \|x - c\| < \infty$. Считая $x \in X$, введем обозначения: $y_s(x) = x + 2^{-s}(z(x) - x)$, $s = 0, 1, \ldots$; $u_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на выпуклое замкнутое множество G; $p_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на множество X. Поскольку x, $z(x) \in F \cap \Lambda(x)$, при этом F и $\Lambda(x)$ выпуклы, то $y_s(x)$, $s = 1, 2, \ldots$, тоже лежат в $F \cap \Lambda(x)$.

Пусть x_* – произвольная точка множества X, для которой $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle < 0$. Введем обозначения: $L_s(x_*)$ – прямая, проходящая через точку $y_s(x_*)$ перпендикулярно $\Lambda(u_s(x_*))$ (в силу показанного в [12] она проходит и через точку $u_s(x_*)$); $\tilde{L}_s(x_*)$ – луч, начинающийся в точке $y_s(x_*)$ и проходящий через точку c. С целью сокращения записи в дальнейших рассуждениях вместо $y_s(x_*)$, $u_s(x_*)$, $L_s(x_*)$, $\tilde{L}_s(x_*)$ при фиксированном s будем записывать y, u, L, $\tilde{L}$ соответственно.

Отметим, что введенные здесь и ранее обозначения, кроме c, d, d_0, ε и $\tilde{L}_s(x_*)$, совпадают с теми, что были введены в [11]. Различие в некоторых обозначениях связано с тем, что при исследовании задачи, поставленной в настоящей работе, существенно учитываются выпуклость поверхности S и ограниченность множества F. Кроме этого, в настоящей статье вместо множества $M(x_0) = \{x \in X : \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}$, введенного в [11] и предполагаемого там ограниченным, всюду рассматривается ограниченное множество X.

Лемма 1. *Пусть $x_* \in X$, $s \in \{0, 1, \ldots\}$, v — произвольная точка множества Y, а δ и $\overline{\delta}$ — расстояния от точки v соответственно до гиперплоскости $\Lambda(u_s(x_*))$ и до прямой $L_s(x_*)$. Тогда, если v лежит на поверхности S, то при $0 < \delta < 2K/M$ имеет место $\overline{\delta} \ge \sqrt{\delta(2K/M - \delta)}$.*

Доказательство данного утверждения приводится в [11], где изучен случай гладкой поверхности S без предположения об ее выпуклости.

Замечание. Если y и v лежат по одну сторону от $\Lambda(u)$, то в силу выпуклости G значения $g(y)$ и $g(v)$ имеют один знак. Если же y и v лежат по разные стороны от $\Lambda(u)$, то из показанного в [11] следует, что при $0 < \delta < \dfrac{2K}{M}$ и $\overline{\delta} < \sqrt{\delta(2K/M - \delta)}$ значения $g(y)$ и $g(v)$ имеют разные знаки.

Лемма 2. *Если $x_* \in X$ и $\varepsilon \ge K/M$, то при всех целых $s \ge \overline{s}_1$, где $\overline{s}_1$ — некоторый номер из множества $\{0, 1, \ldots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S, то на отрезке $[y_s(x_*); c]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \ge K/M$, $x_* \in X$ и $s \in \{0, 1, \ldots\}$. В силу выпуклости множества G, векторы $y_s(x_*) - u_s(x_*)$ и $n(u_s(x_*))$ одинаково направлены. Обозначим через $\overline{c}$ проекцию точки c на прямую L. Прямая L перпендикулярна гиперплоскости $\Lambda(u)$, а поскольку $\overline{c}$ — проекция c на L, то расстояния от точек c и $\overline{c}$ до $\Lambda(u)$ совпадают и по величине не меньше ε. Заметим, что $\|c - \overline{c}\| \le \|c - y\| \le d$, так как $y \in F \cap Y$ и $\overline{c}$ — проекция точки c на прямую L, содержащую y. Из определения множества Y следует, что $[y; c] \subset Y$.

Пусть $\overline{s}_1$ — наименьший из номеров $s = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющий неравенству $s \ge \log_2 \dfrac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon}$. Тогда, учитывая справедливость утверждения леммы 1 и повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [11], получим, что при целых $s \ge \overline{s}_1$ на отрезке $[y_s(x_*); c]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$. В силу произвольности числа $\varepsilon \ge K/M$ и точки $x_* \in M(x_0)$, утверждение леммы доказано.

Лемма 3. *Если $x_* \in X$ и $\varepsilon < K/M$, то при всех целых $s \ge \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\}$, где $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ — некоторые номера из множества $\{0, 1, \ldots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S, то на отрезке $[y_s(x_*); c]$ существует точка, в которой значение $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon < K/M$, $x_* \in X$ и $s \in \{0, 1, \ldots\}$. В силу выпуклости множества G, векторы $y_s(x_*) - u_s(x_*)$ и $n(u_s(x_*))$ одинаково направлены. Пусть $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ — наименьшие из номеров $s = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющие соответственно неравенствам

$$s \ge \log_2 \frac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad s \ge \log_2 2d_0\sqrt{\frac{N(K - M\varepsilon)}{K\varepsilon}}.$$

Тогда, повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [11], получим, что при целых $s \ge \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\}$ на отрезке $[y_s(x_*); c]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$. В силу произвольности числа $\varepsilon < K/M$ и точки $x_* \in X$, утверждение леммы доказано.

Обозначим через $v_s(x_*)$ (или сокращенно v) точку пересечения отрезка $[y_s(x_*); c]$ с поверхностью S. При всех $s \in \{0, 1, \ldots\}$ точка $v_s(x_*)$ лежит в X, так как $v_s(x_*) \in S$ и $v_s(x_*) \in [y_s(x_*); c]$, где $y_s(x_*)$, $c \in F$ и F выпукло.

Лемма 4. *Если* $x_* \in X$ *и* $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle < 0$, *то существует такая положительная константа* M_0, *что при всех целых* $s \geq \overline{s}$, *где* $\overline{s}$ *— некоторый номер из множества* $\{0, 1, \ldots\}$, *имеет место* $\left\| y_s(x_*) - v_s(x_*) \right\| \leq M_0 \left\| y_s(x_*) - u_s(x_*) \right\|$.

Доказательство. Пусть $x_* \in X$ и $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle < 0$, т.е. вектор $h_* = z(x_*) - x_*$ является направлением убывания $\varphi(x)$ в точке x_*. Если при некотором s точка y лежит на поверхности S, то точки u и v, очевидно, совпадают с y, и тогда обе части требуемого нестрогого неравенства равны нулю, т.е. оно справедливо при любом M_0. Пусть теперь y не лежит на S. Положим $\overline{s} = \overline{s}_1$, если $\varepsilon \geq K/M$, и $\overline{s} = \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\}$, если $\varepsilon < K/M$. В силу утверждений лемм 2 и 3, при $s \geq \overline{s}$ на отрезке $[y;c]$ существует точка v_0, в которой $g(v_0) < 0$. Поскольку в силу наложенных на $g(x)$ условий и определения точки y имеет место $g(y) > 0$, то точка v лежит на отрезке $[y, v_0]$. В силу выпуклости $g(x)$, точки v и y лежат по разные стороны от гиперплоскости $\Lambda(u)$ или (в частном случае) v лежит в $\Lambda(u)$.

Повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [11], получим, что при всех целых $s \geq \overline{s}$ справедливо неравенство $\|y - v\| \leq M_0 \|y - u\|$, где $M_0 = \frac{3}{\varepsilon}\sqrt{\frac{K(\varepsilon^2 + d^2)}{M}}$. В силу произвольности рассмотренной точки $x_* \in X$, для которой $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle < 0$, утверждение леммы доказано.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

В этом разделе будут получены необходимые условия локального минимума гладкой функции $\varphi(x)$ на множестве X рассматриваемого вида и доказано утверждение о сходимости алгоритма.

Лемма 5. *Если* $x_* \in X$ *— точка локального минимума функции* $\varphi(x)$ *на множестве* X, *то* $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle = 0$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой точки $x_* \in X$, доставляющей локальный минимум $\varphi(x)$ на X, имеет место $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle < 0$, т.е. вектор $h_* = z(x_*) - x_*$ является направлением убывания $\varphi(x)$ в точке x_*. Тогда, проведя рассуждения, аналогичные доказательству соответствующей леммы из [11] с заменой $p_s(x_*)$ на $v_s(x_*)$ и с учетом справедливости утверждения леммы 4 и того, что $v_s(x_*)$ при всех $s \in \{0, 1, \ldots\}$ лежит в X, получим, что выдвинутое предположение неверно, откуда вытекает справедливость данной леммы.

Следует отметить, что равенство $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle = 0$ выражает лишь необходимое условие локального минимума, т.е. его выполнение для произвольной точки $x_* \in X$ в общем случае не означает, что x_* доставляет локальный (а тем более, глобальный) минимум $\varphi(x)$ на X.

Из утверждения леммы 5 следует, что при выполнении равенства $\left\langle \varphi'(x_k), z(x_k) - x_k \right\rangle = 0$ при некотором k точка $x_k \in X$ удовлетворяет необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X. Это равенство может не выполняться ни при каком k, тогда алгоритм становится итерационным.

Заметим, что множество F может быть задано с помощью функциональных ограничений в форме $F = \left\{x \in R^n : f_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, l\right\}$, где и $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, являются выпуклыми и гладкими на E^n.

Лемма 6. *Если* $x_* \in X$, *при этом* $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle = 0$ *или* $\operatorname{int} F \cap \Lambda(x_*)$ *пусто, то* x_* *стационарна в смысле Лагранжа.*

Доказательство. Из определения точки $z(x_*)$ и выпуклости $F \cap \Lambda(x_*)$ следует, что для всех $F \cap \Lambda(x_*)$ имеет место $\left\langle \varphi'(x_*), x - x_* \right\rangle \geq 0$. Учитывая этот факт и повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [13], где в качестве поверхности S рассматривается сфера, получим справедливость утверждения данной леммы.

Будем считать, что $\varphi(x) \in C^{1,1}(Y)$, тогда существует константа $L = \max_{x\in Y}\|\varphi'(x)\| < \infty$. Отсюда следует, что для любых $x, y \in Y$ при некотором $\theta \in [0;1]$ имеет место $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \|\varphi'(x + \theta(y - x))\|\|x - y\| \le L\|x - y\|$, т.е. $\varphi(x)$ является липшицевой на Y.

Введем обозначения: $z_k = z(x_k)$, $\varphi_k(x) = \langle \varphi'(x_k),\, x - x_k\rangle$, $y_{k,s} = y_s(x_k)$, $v_{k,s} = v_s(x_k)$. Будем считать, что величина α_k при каждом k полагается равной 2^{-s_k}, где s_k – первый из номеров $s = 0, 1, \ldots$, при котором справедливо неравенство $\varphi(x_k) - \varphi(v_{k,s}) \ge 0.25\times 2^{-s}|\varphi_k(z_k)|$. Повторяя рассуждения, проведенные при изучении выбора α_k в задаче из [11], с заменой $p_s(x)$ на $v_s(x)$, получим, что выполнения данного неравенства удается добиться при конечном s, при этом $s_k \le \max\left\{\bar{s},\, \log_2 \dfrac{32M_0LNd_0^2}{|\varphi_k(z_k)|}\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\bar{s} < 1 + \log_2 \dfrac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon} = \log_2 \dfrac{4\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon}$ при $\varepsilon \ge K/M$ и

$$\bar{s} < 1 + \log_2 \max\left\{\frac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon};\, \frac{2d_0\sqrt{N(K - M\varepsilon)}}{\sqrt{K\varepsilon}}\right\} = \log_2 \max\left\{\frac{4\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon};\, \frac{4d_0\sqrt{N(K - M\varepsilon)}}{\sqrt{K\varepsilon}}\right\}$$

при $\varepsilon < K/M$. Это означает, что при каждом k имеет место

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \ge 0.25\times\min\left\{\frac{\varepsilon|\varphi_k(z_k)|}{4\sqrt{3}Ndd_0};\, \frac{|\varphi_k(z_k)|^2}{32M_0LNd_0^2}\right\},$$

если $\varepsilon \ge K/M$, и

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \ge 0.25\times\min\left\{\frac{\varepsilon|\varphi_k(z_k)|}{4\sqrt{3}Ndd_0};\, \frac{\sqrt{K\varepsilon}|\varphi_k(z_k)|}{4d_0\sqrt{N(K - M\varepsilon)}};\, \frac{|\varphi_k(z_k)|^2}{32M_0LNd_0^2}\right\},$$

если $\varepsilon < K/M$. Поскольку все константы в правых частях полученных неравенств положительны, то при отличных от нуля значениях $\varphi_k(z_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, последовательность $\{\varphi(x_k)\}$ монотонно убывает.

Лемма 7. *При выборе чисел* α_k, $k = 0, 1, \ldots$, *согласно указанному способу имеет место* $\varphi_k(z_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [11] с заменой $p_s(x)$ на $v_s(x)$.

Из утверждения леммы 7 и приведенных выше неравенств вытекает

Теорема 1. *Если последовательность* $\{x_k\}$ *построена по изложенному алгоритму при выборе* α_k, $k = 0, 1, \ldots$, *согласно указанному способу, то при всех целых* $k \ge \bar{k}$, *где* $\bar{k}$ *– некоторый номер из множества* $\{0, 1, \ldots\}$, *имеет место неравенство*

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \ge \frac{|\varphi_k(z_k)|^2}{128M_0LNd_0^2}.$$

Справедливо следующее утверждение о сходимости алгоритма.

Теорема 2. *Если последовательность* $\{x_k\}$ *построена по изложенному алгоритму при выборе* α_k, $k = 0, 1, \ldots$, *согласно указанному способу, то любая ее предельная точка* x_*, *для которой* $\operatorname{int} F \cap \Lambda(x_*)$ *непусто, удовлетворяет условию* $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_*\rangle = 0$.

Доказательство. Поскольку $\{x_k\} \subset X$ и X ограничено, то $\{x_k\}$ имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть x_* – произвольная предельная точка $\{x_k\}$, для которой $\operatorname{int} F \cap \Lambda(x_*)$ непусто, а $\{x_{k_m}\}$ – соответствующая ей подпоследовательность.

Предположим, что $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_*\rangle = -2\eta < 0$. Тогда существуют такие окрестности $U_\delta(x_*)$ и $U_\varepsilon(z(x_*))$, что для любых $x \in U_\delta(x_*)$ и $y \in U_\varepsilon(z(x_*))$ имеет место $\langle \varphi'(x), y - x\rangle < -\eta < 0$. Пусть $\bar{x}$ –

произвольная точка из $\operatorname{int} F \cap \Lambda(x_*)$, тогда $[\bar{x}, z(x_*)) \subset \operatorname{int} F \cap \Lambda(x_*)$, так как множества F и $\Lambda(x_*)$ выпуклы и по построению $z(x_*) \in F \cap \Lambda(x_*)$. Возьмем произвольную точку $h \in [\bar{x}, z(x_*)) \cap U_\varepsilon(z(x_*))$, тогда $h \in \operatorname{int} F \cap \Lambda(x_*)$ и $\langle \varphi'(x), h - x \rangle < -\eta < 0$ для любого $x \in U_\delta(x_*)$. Обозначив через h_k проекцию точки h на гиперплоскость $\Lambda(x_k)$, получим

$$\langle n(x_{k_m}), h - x_{k_m} \rangle = \langle n(x_{k_m}), h - h_{k_m} \rangle + \langle n(x_{k_m}), h_{k_m} - x_{k_m} \rangle,$$

где второе слагаемое справа равно нулю, так как $h_{k_m} \in \Lambda(x_{k_m})$, а модуль первого слагаемого есть расстояние от точки h до гиперплоскости $\Lambda(x_{k_m})$, так как векторы $n(x_{k_m})$ и $h - x_{k_m}$ имеют одинаковое или противоположное направления и $\|n(x_{k_m})\| = 1$. Поскольку $\langle n(x_*), h - x_* \rangle = 0$, так как $h \in \Lambda(x_*)$, и $\{x_{k_m}\} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_*$, а $n(x)$ является непрерывной вектор-функцией на S, то отсюда следует, что $\|h - h_{k_m}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Кроме того, существует окрестность $U_\gamma(h)$, целиком лежащая в $U_\varepsilon(z(x_*)) \cap F$, так как $h \in \operatorname{int} U_\varepsilon(z(x_*))$ и $h \in \operatorname{int} F$. Это означает, что найдется такое $m_1 \in N$, что при всех $m \ge m_1$ имеет место $h_{k_m} \in U_\gamma(h) \subset F$. Поскольку $\{x_{k_m}\} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_*$, то найдется такое $m_2 \in N$, что при всех $m \ge m_2$ имеет место $x_{k_m} \in U_\delta(x_*)$. Следовательно, при $m \ge \max\{m_1, m_2\}$ точки $h_{k_m} \in F \cap \Lambda(x_{k_m})$ удовлетворяют условию $\langle \varphi'(x_{k_m}), h_{k_m} - x_{k_m} \rangle < -\eta < 0$. Но из леммы 7 имеем $\varphi_k(z_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, где z_k – решение задачи $\langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle \to \min$, $x \in F \cap \Lambda(x_k)$. Из полученного противоречия следует, что $\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = 0$. В силу произвольности рассмотренной предельной точки x_*, утверждение теоремы доказано.

Из теоремы 2 и леммы 6 следует, что если X задано с помощью функциональных ограничений, то любая предельная точка x_* последовательности $\{x_k\}$, построенной по изложенному алгоритму при указанных способах выбора α_k, $k = 0, 1, \ldots$, стационарна в смысле Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frank M., Wolfe P.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. T. 3. Вып. 1–2. С. 95–110.
2. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
3. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
4. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.
5. *Васильев Ф.П., Ячимович М.* Об итеративной регуляризации метода условного градиента и метода Ньютона при неточно заданных исходных данных // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 2. С. 265–269.
6. *Коннов И.В.* Метод условного градиента без линейного поиска // Известия вузов. Математика. 2018. № 1. С. 93–96.
7. *Черняев Ю.А.* Метод условного градиента для экстремальных задач с предвыпуклыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1910–1913.
8. *Климов В.С.* О сходимости метода условного градиента // Известия вузов. Математика. 2005. № 12. С. 27–34.
9. *Чернов А.В.* О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.
10. *Balashov M.V., Polyak B.T., Tremba A.A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2020. V. 41. P. 822–849.
11. *Черняев Ю.А.* Метод проекции градиента для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения гладкой поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 37–49.
12. *Черняев Ю.А.* Обобщение метода проекции градиента и метода Ньютона на экстремальные задачи с ограничением в виде гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 9. С. 1493–1502.
13. *Черняев Ю.А.* Сходимость метода проекции градиента и метода Ньютона для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения сферической поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1733–1749.