

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

О ТОЧНОСТИ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН¹⁾

© 2023 г. В. А. Колотилов^{1,*}, А. А. Курганов^{2,3,**}, В. В. Остапенко^{1,***},
Н. А. Хандеева^{1,****}, Ш. Чу^{2,*****}

¹ 630090 Новосибирск, пр-т акад. Лаврентьева, 15, ИГиЛ СО РАН, Россия

² 518005 Шеньчжэнь, пр-т Сюэюань, 1088, р-н Наньшань, Математический факультет,
Южный научно-технологический университет, Китай

³ 518005 Шеньчжэнь, пр-т Сюэюань, 1088, р-н Наньшань, Международный математический центр SUSTech
и Ведущая лаборатория вычислительной техники и дизайна материалов провинции Гуандун,
Южный научно-технологический университет, Китай

*e-mail: kolotilov1992@gmail.com

**e-mail: alexander@sustech.edu.cn

***e-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

****e-mail: nzyuzina1992@gmail.com

*****e-mail: chuss2019@mail.sustech.edu.cn

Поступила в редакцию 09.12.2022 г.
Переработанный вариант 09.12.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Проведен сравнительный анализ точности численных схем CABARET (второго порядка), Русанова (третьего порядка) и A-WENO (пятого порядка по пространству и третьего порядка по времени) при сквозном расчете газодинамических ударных волн, возникающих при численном моделировании задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. Показано, что схемы CABARET и A-WENO, при построении которых используется нелинейная коррекция потоков, имеют приблизительно одинаковую точность в областях влияния ударных волн (возникающих в результате градиентных катастроф внутри расчетной области), в то время как немонотонная схема Русанова имеет в этих областях существенно более высокую точность, несмотря на заметные нефизические осцилляции на ударных волнах. При этом комбинированная схема, получаемая путем совместного применения схем Русанова и CABARET монотонно локализует фронты ударных волн и сохраняет повышенную точность в областях их влияния. Библ. 25. Фиг. 4.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ударные волны, схемы сквозного счета повышенной точности.

DOI: 10.31857/S0044466923070062, **EDN:** ZXRBGJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку в классической работе [1] было показано, что среди двухслойных по времени линейных численных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то развитие теории схем сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы численных схем [2–9], в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков. Укажем основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL [10], TVD [11], Central [12], WENO [13], DG (Discontinuous Galerkin) [2], [3], CABARET [14].

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, проект № 22-11-00060 (разд. 1–3), а также РФФИ и ГФЕН, проект № 21-51-53012 (РФФИ) и № 12111530004 (ГФЕН) (разд. 4–6). Разработка алгоритма схемы A-WENO была поддержана грантом ГФЕН № 12171226, а также фондом провинции Гуандун, лаборатория вычислительной техники и материаловедения (№ 2019B030301001).

На примере системы законов сохранения теории мелкой воды [15] было показано, что NFC-схемы имеют не более чем первый порядок как локальной сходимости в областях влияния ударных волн [16], так и интегральной сходимости на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны [17–19]. В то же время некоторые немонотонные схемы повышенной точности (в частности, схема Русанова [20] и компактная схема из [16]) сохраняют повышенный порядок интегральной сходимости в негативной норме при интегрировании по областям, содержащим сильные разрывы [17], [18]. В результате эти немонотонные схемы, в отличие от NFC-схем, имеют существенно более высокую точность в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах.

Для системы уравнений мелкой воды был разработан и применен метод построения комбинированных схем сквозного счета [17–19], которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и классических немонотонных схем, а именно, монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенный порядок точности в областях их влияния. В комбинированной разностной схеме применяется базисная немонотонная схема, которая имеет повышенную точность в областях влияния ударных волн. По базисной схеме разностное решение строится во всей расчетной области. В окрестностях больших градиентов, где это решение имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путем численного решения внутренних начально-краевых задач по одной из NFC-схем.

При построении комбинированных схем в [17] в качестве базисной использовалась неявная компактная схема [16] третьего порядка слабой аппроксимации, а в [18] — явная схема Русанова [20] третьего порядка классической аппроксимации. В качестве внутренней NFC-схемы в [17], [18] применялся монотоннизированный вариант схемы CABARET [14] второго порядка точности на гладких решениях. В [19] в качестве базисной схемы, входящей в комбинированную схему, использовался немонотонный вариант DG-метода третьего порядка, а в качестве внутренней схемы — монотонный вариант данного метода, в котором применялась нелинейная коррекция численных потоков [2].

В настоящей работе изучается точность схем сквозного счета при численном моделировании разрывных решений системы законов сохранения неизоэнтропической газовой динамики [21], которая, в отличие от системы уравнений теории мелкой воды, не является строго нелинейной [22] (поскольку имеет вырожденное характеристическое поле, приводящее к формированию контактных разрывов) и в общем случае не допускает записи в форме инвариантов. Проведен сравнительный анализ точности схемы Русанова [19] и двух различных современных NFC схем (монотонной модификации схемы CABARET [23] и схемы A-WENO [24]) при сквозном расчете газодинамических ударных волн, возникающих при численном моделировании задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. При решении этой задачи внутри расчетной области в результате градиентных катастроф формируется последовательность изолированных ударных волн, распространяющихся с постоянной скоростью. Между этими ударными волнами образуются их области влияния, которые с течением времени заполняют всю расчетную область.

Численные расчеты показали, что в гладких частях точного решения вне областей влияния ударных волн (в соответствии с формальными порядками аппроксимации) схема Русанова имеет существенно более высокую точность, чем схема CABARET, а схема A-WENO — существенно более высокую точность, чем схема Русанова. В то же время внутри областей влияния ударных волн точность NFC схем CABARET и A-WENO становится сравнимой и существенно более низкой, чем точность немонотонной схемы Русанова, имеющей заметные нефизические осцилляции за фронтами ударных волн. В работе предлагается теоретическое обоснование этих численных результатов.

По аналогии с [18], для системы уравнений газовой динамики построена комбинированная схема, в которой схема Русанова является базисной схемой, а схема CABARET — внутренней схемой. При этом области больших градиентов, где применяется внутренняя схема, выделяются на основе метода, предложенного в [25]. Полученная таким образом комбинированная схема, монотонно (без заметных нефизических осцилляций) локализует фронты ударных волн и сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

2. МЕТОД ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА

Рассмотрим квазилинейную строго гиперболическую систему законов сохранения [21], [22]

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ — искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — заданная гладкие вектор-функции, содержащие m компонент. Строгая гиперболичность системы (2.1) означает, что все собственные значения $\lambda_i(\mathbf{u})$ матрицы Якоби $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$ действительны и различны. Поставим для системы (2.1) задачу Коши с периодическими начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) = \mathbf{u}_0(x + X), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{u}_0(x)$ — заданная гладкая вектор-функция, X — длина периода. Предположим, что задача (2.1), (2.2) имеет единственное слабое решение $\mathbf{u}(x, t)$, которое является ограниченным и в котором в результате градиентных катастроф при $t > 0$ возникают ударные волны.

Явные численные схемы, аппроксимирующие задачу (2.1), (2.2) будем строить на равномерной прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \quad (2.3)$$

где $h = X/M$ — шаг сетки по пространству, M — заданное целое положительное число,

$$\tau = zh / \max_{k,j,n} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n))| \quad (2.4)$$

есть шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором $z \in (0, 1)$ — коэффициент запаса, $\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$ — численное решение в полужелом пространственном узле $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$. В случае проведения прикладных расчетов для экономии компьютерного времени более естественно использовать неравномерные по времени численные сетки

$$\bar{S} = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_{n+1} = t_n + \tau_n, t_0 = 0\},$$

в которых шаг по времени τ_n определяется по формуле

$$\tau_n = zh / \max_{k,j} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n))|.$$

Однако в настоящей работе, целью которой является экспериментальное изучение точности различных численных схем, более удобно применение равномерной численной сетки (2.3) с постоянным шагом по времени (2.4).

Поскольку в рассматриваемой далее тестовой задаче Коши (2.1), (2.2) точное решение $\mathbf{u}(x, t)$ заранее неизвестно, то для приближенного вычисления ошибки численного решения $\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$ на базисной сетке (2.3) мы зададим нечетное целое число $N \gg M$ и воспользуемся квазиточным численным решением $\mathbf{v}_{h_*}(x_{j+1/2}^*, t_n^*)$, получаемым по одной из схем повышенной точности на существенно более мелкой равномерной сетке

$$S_* = \{(x_j^*, t_n^*) : x_j^* = jh_*, t_n^* = n\tau^*, n \geq 0\}, \quad (2.5)$$

где $x_{j+1/2}^* = (j + 1/2)h_*$, $h_* = h/N$ и $\tau_* = \tau/N$. В результате ошибка численного решения $\mathbf{v}_h$ в узле $(x_{j+1/2}, t_n)$ базисной сетки (2.3) приближенно определяется по формуле

$$\delta \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n) = \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n) - \mathbf{v}_{h_*}(x_{j+1/2}^*, t_n^*). \quad (2.6)$$

Далее на графиках мы будем показывать относительные дисбалансы (ошибки) вычисления векторного решения $\mathbf{u}$, определяемые по формуле

$$\Delta \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n) = \lg \frac{|\delta \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)|}{|\mathbf{v}_{h_*}(x_{j+1/2}^*, t_n^*)|}. \quad (2.7)$$

Если гиперболическая система (2.1) моделирует некоторый физический процесс, для корректности формулы (2.7) с точки зрения теории размерности, система (2.1) должна быть записана в безразмерных переменных. Если эта система записана в размерных переменных, то для корректности формулы (2.7) компоненты векторов $\mathbf{v}_h$ и $\mathbf{v}_{h_*}$, входящих в формулы (2.6) и (2.7), должны быть заменены на свои безразмерные аналоги.

3. ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА

В качестве конкретной гиперболической системы (2.1) выберем безразмерную форму записи системы законов сохранения неизэнтропической газовой динамики [4, 21], для которой

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где ρ , u , p и $e = \varepsilon + u^2/2$ — плотность, скорость, давление и удельная полная энергия, ε — удельная внутренняя энергия. Давление и внутренняя энергия удовлетворяют уравнению состояния идеального политропного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (3.2)$$

в котором $\gamma = 1.4$ — показатель адиабаты двухатомного газа. При $\rho > 0$ и $p > 0$ система (2.1), (3.1), с учетом (3.2), является строго гиперболической, поскольку соответствующая ей матрица Якоби имеет действительные и различные собственные значения

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c,$$

где $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — адиабатическая скорость звука.

Рассмотрим для системы (2.1), (3.1) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.3)$$

$$\rho(x, 0) = \left(\frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}}(u(x, 0) + 10)\right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p(x, 0) = (\rho(x, 0))^\gamma, \quad (3.4)$$

где $X = 10$ — длина периода. Из формул (3.3) и (3.4) следует, что энтропия газа

$$s = \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{p}{\rho^\gamma},$$

представляющая собой инвариант w_2 системы (2.1), (3.1), и изоэнтропические квазиинварианты [7] этой системы

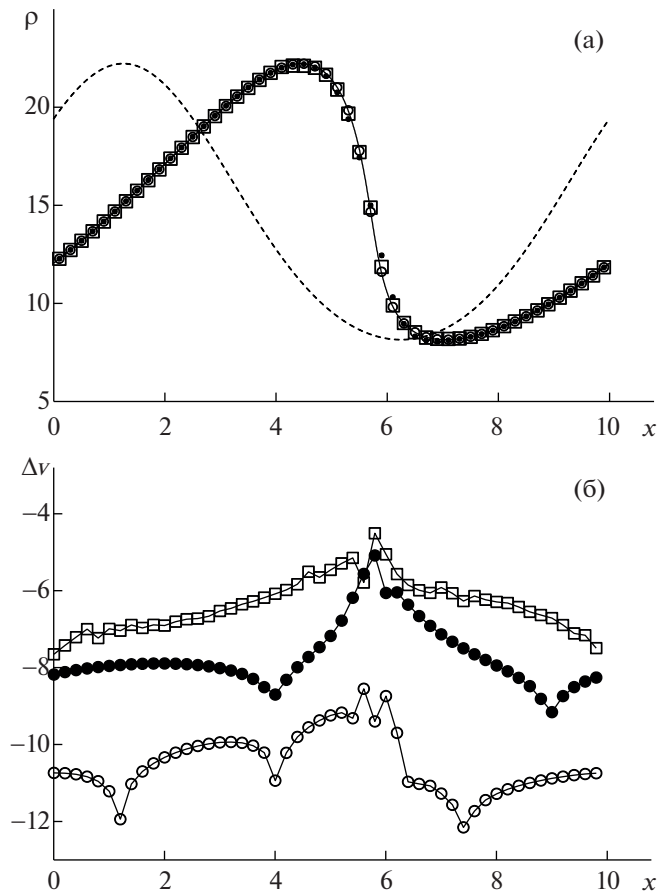
$$w_1 = u - \frac{2c}{\gamma-1}, \quad w_3 = u + \frac{2c}{\gamma-1}$$

имеют следующие начальные значения:

$$w_1(x, 0) = -10, \quad s(x, 0) = 0, \quad w_3(x, 0) = 2\sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + 10. \quad (3.5)$$

Поскольку в начальный момент времени энтропия газа постоянна, то во всех гладких частях точного решения, не входящих в области влияния ударных волн, течение газа является изоэнтропическим. Отметим, что с учетом формул (3.5) задача (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) аналогична задаче Коши для системы уравнений теории мелкой воды, которая изучалась в [17–19].

В точном решении задачи (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) в момент времени $t_* \approx 1.35$ в результате градиентных катастроф формируется последовательность изолированных ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями в положительном направлении оси x , в силу чего расстояние между соседними ударными волнами остается постоянным и равным длине периода X . На фиг. 1а штриховой линией показана начальная плотность жидкости, задаваемая второй формулой (3.5), а на фиг. 1а, 2а, 3а и 4а в моменты времени $t = 1$, $t = 2.5$, $t = 3.5$ и $t = 5$ сплошными линиями изображены квазиточные профили плотности, получаемые в результате численного расчета по схеме A-WENO [24] на мелкой сетке (2.5), в которой $h_* = 0.005$ и $\tau_* = 0.0005$. К моменту времени $t = 1$ в точном решении начинают формироваться области больших градиентов, но решение еще остается гладким (фиг. 1а). Ударные волны, которые в момент времени t_* возникают как сильные разрывы первоначально бесконечно малой амплитуды, в момент времени $t = 2.5$ имеют конечную амплитуду (фиг. 2а), но области их влияния,



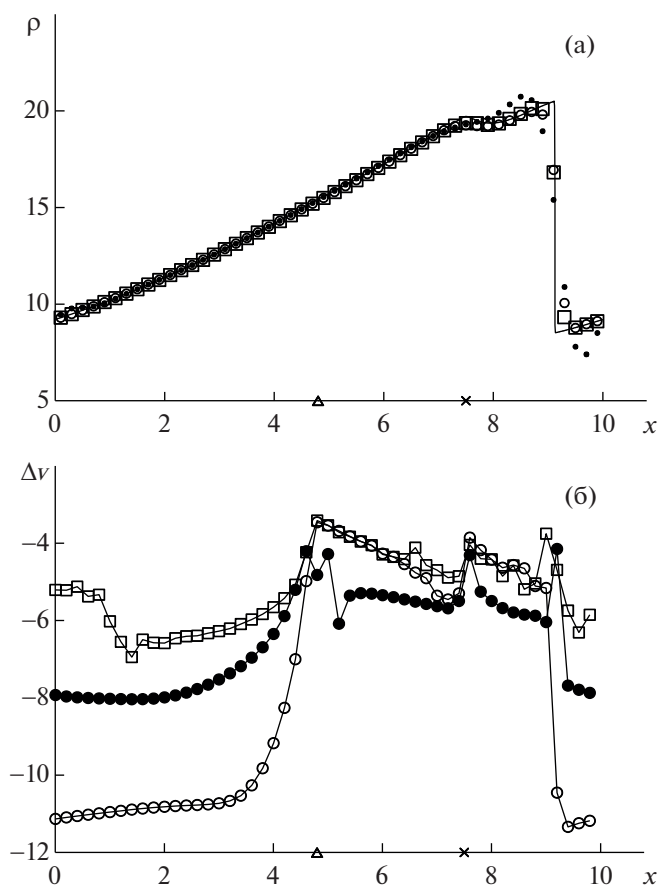
Фиг. 1. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 1$ при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки). На графике (а) сплошной линией показано квазиточное, а пунктирной линией — начальные значения плотности.

расположенные внутри интервалов $(10i + 5, 10i + 9) \subset [10i, 10i + 10]$, $i \in \mathbb{Z}$, еще не заполняют всю расчетную область. К моменту времени $t = 3.5$ ударные волны проходят расстояние, большее длины периода $X = 10$, и вся расчетная область становится их областью влияния. С учетом этого сильные разрывы, расположенные на линиях, приведенных на фиг. 3а и 4а, соответствуют ударной волне, которая сформировалась в момент времени t_* внутри интервала $[-X, 0]$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На фиг. 1–4 приведены результаты численных расчетов задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки) на равномерной сетке (2.3), где шаг по времени выбирается из условия устойчивости (2.4), в котором коэффициент запаса $z \cong 0.35$. На рисунках (а) показаны значения плотности газа, получаемые при численном расчете на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.2$. Из этих рисунков видно, что, в отличие от NFC-схем CABARET и A-WENO, схема Русанова имеет заметные нефизические осцилляции в окрестностях ударных волн.

На рисунках (б) приведены относительные локальные дисбалансы (2.7), получаемые при численном расчете на базисной сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.005$. В формуле (2.7) использовалось квазиточное решение, получаемое по схеме Русанова [20] на мелкой сетке (2.5), в которой $h_* = 2.4 \times 10^{-4}$ и $\tau_* = 2.4 \times 10^{-5}$. Результаты этих расчетов показаны для каждого 40-го пространственного узла $j = 40i$ базисной сетки (2.3). Из фиг. 1б и 2б следует, что вне областей влияния ударных волн схема A-WENO имеет на два, три порядка более высокую точность, чем

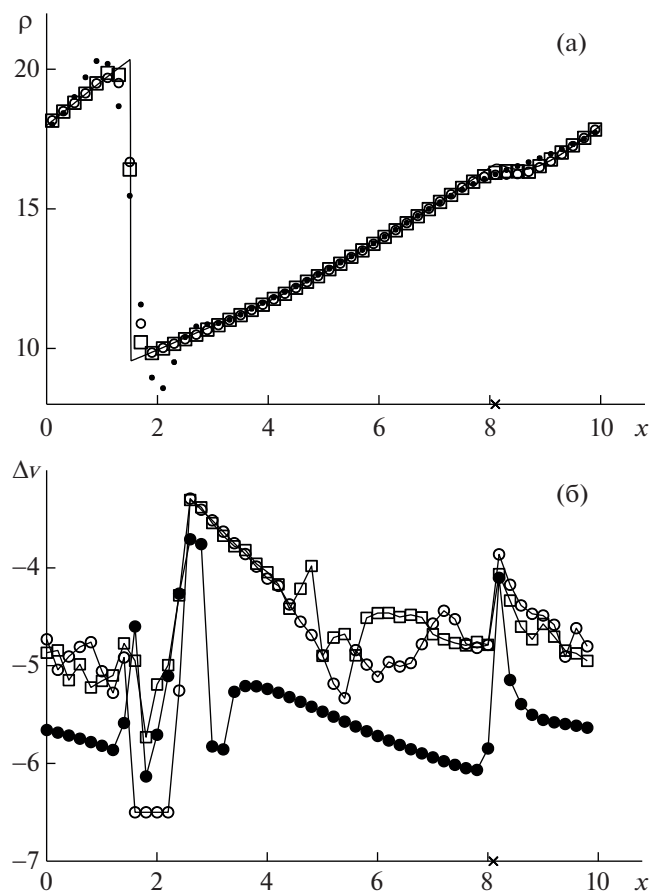


Фиг. 2. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 2.5$ при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки). Крестиком изображена координата слабого контактного разрыва, а треугольником — левая граница области влияния ударной волны. На графике (а) сплошной линией показано квазиточное значение плотности.

схема Русанова и на три, четыре порядка более высокую точность, чем схема CABARET. Внутри областей влияния ударных волн точность схемы A-WENO резко падает (фиг. 2б, 3б и 4б), становится сравнимой с точностью схемы CABARET и существенно более низкой, чем точность схемы Русанова. При этом с течением времени различие в точности схем Русанова и A-WENO заметно возрастает, достигая к моменту времени $t = 5$ (фиг. 4б) приблизительно полтора порядка в основной части области гладкости точного решения. Необходимо также отметить, что точность всех схем резко падает не только в окрестности фронта ударной волны, но и в окрестности слабого контактного разрыва, положение которого отмечено крестиками на оси x .

5. КОМБИНИРОВАННАЯ СХЕМА

На основе методики, предложенной в [17], по аналогии с [18], для системы газодинамических уравнений (2.1), (3.1) построена комбинированная схема CRC (Combined Rusanov–CABARET), в которой схема Русанова является базисной схемой, а схема CABARET — внутренней схемой. Области больших градиентов, где применяется внутренняя схема, выделяются на основе метода, предложенного в [25]. Результаты расчета по CRC схеме плотности газа на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.2$ визуально близки результатам расчета по схеме CABARET, а результаты расчета по CRC схеме относительных локальных дисбалансов (2.7) на базисной сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.005$ визуально близки результатам расчета по схеме Русанова. Таким образом, CRC схема монотонно (без заметных нефизических осцилляций) локализует фронты ударных волн и сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

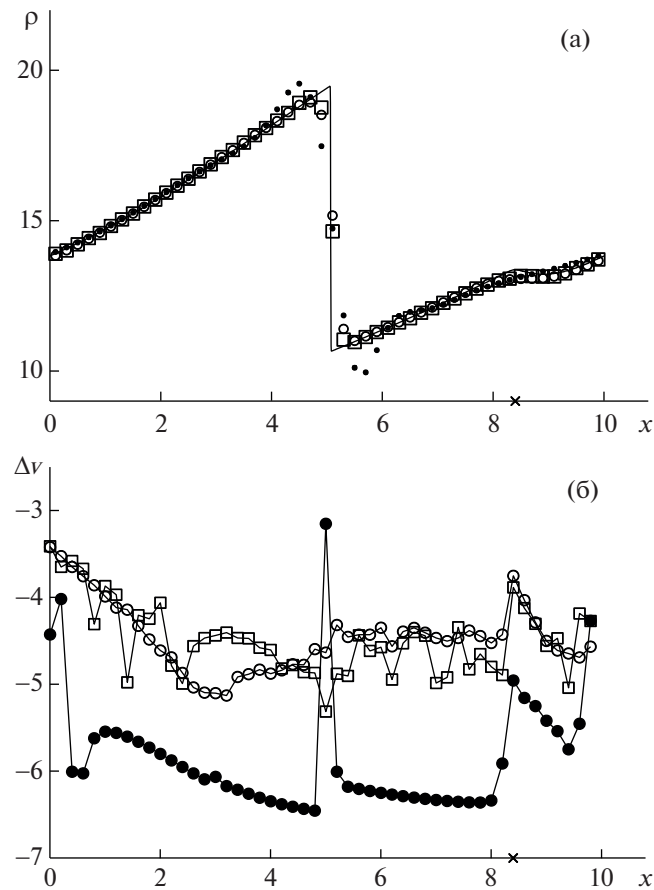


Фиг. 3. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 3.5$ при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки). Крестиком изображена координата слабого контактного разрыва. На графике (а) сплошной линией показано квазиточное значение плотности.

6. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты тестовых расчетов, приведенные на фиг. 1–4, показывают, что в областях влияния ударных волн (также как при численном моделировании разрывных решений системы уравнений мелкой воды [17–19]) точность различных NFC-схем становится сравнимой, независимо от их порядка аппроксимации на гладких решениях, и существенно более низкой, чем точность схемы Русанова. Данный недостаток NFC-схем непосредственно связан с их главным преимуществом — монотонной локализацией фронтов ударных волн, поскольку каждая конечная сумма фурье-разложения разрывной функции не является монотонной функцией. С учетом этого, осцилляции, возникающие на фронтах ударных волн в немонотонной схеме Русанова, несут информацию о волновой структуре фурье-разложения разрывной функции в окрестности сильного разрыва, что позволяет этой схеме с повышенной точностью передавать условия Гюгоньо и, как следствие, сохранять повышенную точность в областях влияния ударных волн. NFC-схемы в результате искусственного сглаживания численных ударных волн эту информацию теряют, что приводит к снижению их точности при аппроксимации условий Гюгоньо.

В то же время численные расчеты газодинамического теста (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) показали, что схема Русанова (также как NFC-схемы CABARET и A-WENO) имеет лишь первый порядок интегральной сходимости в негативной норме на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны. В этом заключается принципиальное отличие от случая численного расчета аналогичного гидродинамического теста [18], в котором на таких интервалах схема Русанова (в отличие от NFC-схем) сохраняет второй порядок интегральной сходимости, что обеспечивает ей на три порядка более высокую точность в областях влияния ударных волн по сравнению с NFC-схемами. В результате при расчете задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) преиму-



Фиг. 4. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени $t = 5$ при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) по схемам CABARET (квадратики), Русанова (точки) и A-WENO (кружки). Крестиком изображена координата слабого контактного разрыва. На графике (а) сплошной линией показано квазиточное значение плотности.

щество схемы Русанова по точности в областях влияния ударных волн (относительно схем CABARET и A-WENO) снижается приблизительно до порядка 1.5. Однако это преимущество является достаточно существенным для того, чтобы предложенную в предыдущем разделе комбинированную схему CRC, в которой базисной является схема Русанова, можно было рекомендовать для численного моделирования более сложных газодинамических течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection – dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 150–268.
<https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
3. Cockburn B., Shu C.-W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. Sci. Comput. 2001. V. 16. № 3. P. 173–261.
<http://doi.org/10.1023/A:1012873910884>
4. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
5. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
<https://doi.org/10.1007/b79761>
6. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
<https://doi.org/10.1007/b79761>

7. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов // М.: Изд. МГУ, 2013.
8. Hesthaven J.S. Numerical methods for conservation laws in V. 18 of Computational Science and Engineering. Philadelphia: SIAM, 2018.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611975109>
9. Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes // Acta Numer. 2020. V. 29. P. 701–762.
<https://doi.org/10.1017/S0962492920000057>
10. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
11. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
12. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. № 2. P. 408–463.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(90\)90260-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90260-8)
13. Liu X.-D., Osher T., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. V. 115. № 1. P. 200–212.
<https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
14. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037>
15. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
16. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
17. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522.
<https://doi.org/10.1134/S1064562418010246>
18. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643.
<https://doi.org/10.1134/S1064562418060315>
19. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124.
<https://doi.org/10.1134/S106456241906005X>
20. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
21. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
22. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. Appl. Math. 1972. 48 p.
23. Остапенко В.В., Колотилов В.А. Применение схемы CABARET для расчета разрывных решений гиперболической системы законов сохранения // Докл. АН. Матем., информ., проц. управл. 2021. Т. 501. С. 62–66.
<https://doi.org/10.1134/S1064562421060120>
24. Wang B.-S., Don W.S., Kurganov A., Liu Y. Fifth-order A-WENO schemes based on the adaptive diffusion central-upwind Rankine-Hugoniot fluxes // Commun. Appl. Math. Comput. 2021.
<https://doi.org/10.1007/s42967-021-00161-2>
25. Karni S., Kurganov A., Petrova G. A smoothness indicator for adaptive algorithms for hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 2002. V. 178. P. 323–341.
<https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7024>