

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ И ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ. III. ЗАДАЧИ КОШИ¹⁾

© 2023 г. М. О. Корпусов^{1,*}, Е. А. Овсянников^{1,2,**}¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия² 115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ “МИФИ”, Россия

* e-mail: korpusov@gmail.com

** e-mail: evg.bud@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.
Переработанный вариант 03.03.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассматриваются три задачи Коши для уравнений соболевского типа из теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, объединенных общей линейной частью. Данные задачи сводятся к эквивалентным интегральным уравнениям. Для двух задач доказываются существование непродолжаемых решений, а для третьей – существование локального во времени решения. Для одной из задач модифицированным методом Х.А. Левина получены достаточные условия разрушения решения за конечное время и найдена оценка сверху на время разрушения решения. Для другой задачи методом нелинейной емкости С.И. Похожаева получен результат о разрушении решения за конечное время и два результата об отсутствии даже локальных решений, а также получена оценка сверху для времени разрушения решения. Библ. 5.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466923070074, EDN: VSVMLH

1. ЗАДАЧА КОШИ 1

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в работах [1] и [2], и является их логическим продолжением. В этом разделе мы рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.2)$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Определение 1. Функция $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]\right)$ при $\beta_1 \geq 0$, удовлетворяющая задаче (1.1), (1.2) поточечно, называется *классическим решением задачи Коши*.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и программы стратегического академического лидерства РУДН.

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\partial u^2(y, \tau)}{\partial \tau} dy d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} [\Delta_y u_0(y) - u_0(y)] dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) [\Delta_y u_1(y) - u_1(y)] dy. \quad (1.3)$$

Сделаем в этом интегральном уравнении замену

$$v(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t), \quad \beta_1 \geq 0. \quad (1.4)$$

Тогда интегральное уравнение (3) примет следующий вид:

$$v(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) v(y) dy, \quad (1.5)$$

$$G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{2\beta_1/2}} \mathcal{E}(x - y, t - \tau), \quad \beta_1 \geq 0,$$

$$G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0,$$

$$G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_3/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_3 \geq \beta_1 \geq 0,$$

$$\rho(x, t) = \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial t}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} [\Delta_x u_0(x) - u_0(x)],$$

$$v(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} [\Delta_x u_1(x) - u_1(x)].$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Если $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$, то $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_2(x, t) - \rho_1(x, t)|_\alpha \leq h(R) \|v_2 - v_1\|_{1, \alpha, T}, \quad (1.6)$$

$$\|w\|_{1, \alpha, T} := \sup_{t \in [0, T]} \left[|w(x, t)|_\alpha + \left| \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha \right],$$

$$h(R) = 4R, \quad R = \max \{ \|v_1\|_{1, \alpha, T}, \|v_2\|_{1, \alpha, T} \}, \quad (1.7)$$

$$\rho_j(x, t) = \frac{\partial v_j^2(x, t)}{\partial t}, \quad j = 1, 2.$$

Доказательство. Шаг 1. Сначала докажем, что при условиях леммы $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$. Действительно, для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\rho(x, t) = 2v(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$|\rho(x, t)|_\alpha \leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v(x, t)|_\alpha \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha < +\infty.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$:

$$\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1) = 2v(x, t_2) \left(\frac{\partial v(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial v(x, t_1)}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial v(x, t_1)}{\partial t} [v(x, t_2) - v(x, t_1)],$$

из которой вытекает неравенство

$$\begin{aligned} |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v(x, t)|_\alpha \left| \frac{\partial v(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial v(x, t_1)}{\partial t} \right|_\alpha + \\ &+ 2 \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha |v(x, t_2) - v(x, t_1)|_\alpha \rightarrow +0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$. Из (1.8) и (1.9) вытекает, что $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Докажем неравенство (1.6). Действительно, справедливо равенство

$$\rho_2(x, t) - \rho_1(x, t) = 2v_2(x, t) \left(\frac{\partial v_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} [v_2(x, t) - v_1(x, t)],$$

из которого вытекает оценка

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |\rho_2(x, t) - \rho_1(x, t)|_\alpha &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v_2(x, t)|_\alpha \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha + \\ &+ 2 \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right|_\alpha \sup_{t \in [0, T]} |v_2(x, t) - v_1(x, t)|_\alpha. \end{aligned} \quad (1.10)$$

С учетом определения нормы (1.7) из (1.10) вытекает оценка (1.6).

Справедлива следующая

Лемма 2. В классе функций $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ при условии, что $\mu(x), v(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$, правая часть интегрального уравнения (1.5) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$. Кроме того, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial H[v](x, t)}{\partial t} &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t^2} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t)}{\partial t} v(y) dy, \\ H[v](x, t) &:= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) v(y) dy. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Доказательство основано на теоремах 1 и 2 статьи [2], а также на лемме 1.

Наконец, справедлива

Теорема 1. Если $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$, то для любых $\mu(x), v(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(\mu, v) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (1.5) в классе $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|v\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Прежде всего заметим, что интегральное уравнение (1.5) можно переписать в виде

$$v(x, t) = H[v](x, t),$$

где оператор $H[v](x, t)$ определен равенством (1.11) и в силу результата леммы 2 действует следующим образом:

$$H[v](x, t) : \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)). \quad (1.12)$$

Шаг 2. Заметим, что в силу оценки (1.4) теоремы 1 статьи [2] и оценки (1.6) леммы 1 справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|H[v_1](x, t) - H[v_2](x, t)\|_{1, \alpha, T} &\leq Td_0(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)|_\alpha \leq Td_0(T)h(R)\|v_1 - v_2\|_{1, \alpha, T}, \\ h(R) &= 4R, \quad R = \max\{\|v_1\|_{1, \alpha, T}, \|v_2\|_{1, \alpha, T}\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Шаг 3. Рассмотрим следующий шар:

$$B_R := \{w(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{1, \alpha, T} \leq R\}.$$

Пусть $\mu(x), v(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$ — произвольные фиксированные. Тогда найдется настолько большое $R > 0$, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f_0(x, t)\|_{1, \alpha, T} &\leq \frac{R}{2}, \\ f_0(x, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) v(y) dy. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Положим в оценке (1.13) $v_1(x, t) = v(x, t) \in B_R$ и $v_2(x, t) = 0$. Тогда получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|H[v](x, t)\|_{1, \alpha, T} &\leq Td_0(T)4\|v(x, t)\|_{1, \alpha, T}^2 \leq Td_0(T)4R^2 \leq \frac{R}{2}, \\ H[v](x, t) &:= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, (q+1)\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau \end{aligned} \quad (1.15)$$

при достаточно малом $T > 0$ таком, что выполнено неравенство

$$Td_0(T)4R \leq \frac{1}{2}. \quad (1.16)$$

Из (1.14) и (1.15) при выполнении условия (1.16) с учетом (1.12) вытекает, что

$$H[v](x, t) : B_R \rightarrow B_R.$$

Наконец, из оценки (1.13) при выполнении условия (1.16) получаем неравенство

$$\|H[v_1](x, t) - H[v_2](x, t)\|_{1, \alpha, T} \leq \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{1, \alpha, T}$$

для любых $v_1(x, t), v_2(x, t) \in B_R$, т.е. оператор $H[v](x, t)$ является сжимающим на шаре B_R . Отсюда вытекает существование единственного решения $v(x, t)$ интегрального уравнения (1.5) в шаре $B_R \subset \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при достаточно большом $R > 0$ и для достаточно малого $T > 0$.

Шаг 4. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (1.5) в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ (см., например, [3]), приходим к утверждению теоремы.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Если $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$, то для любых $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3\right)$ и $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3\right)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (1.3) в классе

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}\left([0, T]; \mathbb{C}^\alpha\left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3\right)\right),$$

причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \left\| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t) \right\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

Наконец, справедлива следующая

Теорема 3. Если $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$, то для любых $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ и $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1 в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)} \left((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T] \right) \cap \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \left\| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t) \right\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что, с одной стороны, всякое классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) в силу третьей формулы Грина (9.1) из [1] удовлетворяет интегральному уравнению (1.3). С другой стороны, решение интегрального уравнения единственно при указанных условиях на начальные функции в классе, сформулированном в условиях теоремы 2. Рассмотрим следующую функцию:

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t},$$

где $u(x, t)$ — решение интегрального уравнения (1.3). Поэтому в силу (1.4) справедливо равенство

$$\rho_0(x, t) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\beta_1}} \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\beta_1}} \rho(x, t),$$

причем для функции $\rho(x, t)$ справедливо утверждение леммы 1. Очевидно, что справедливо неравенство

$$2\beta_1 \geq \beta_1 \geq 0.$$

С учетом обозначений (1.90), (1.91) статьи [1] интегральное уравнение (1.3) можно представить в виде

$$u(x, t) = L(x, t),$$

где функция $L(x, t)$ определена равенством (1.106) из [1]. Но тогда в силу теоремы 5 статьи [2] приходим к выводу о том, что $u(x, t)$ является классическим решением задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1. Из той же теоремы 5 из [2] найденное единственное классическое решение задачи Коши принадлежит к указанному в формулировке теоремы классу гладкости.

Теперь изучим вопрос о достаточных условиях, при которых в теореме 3 $T_0 < +\infty$, т.е. классическое решение рассматриваемой задачи Коши разрушается за конечное время. Справедлива следующая вспомогательная

Лемма 3. Если $\alpha \in (0, 1)$ и

$$f(x) \in \mathbb{C}^\alpha \left((1 + |x|^2)^{\beta_4/2}; \mathbb{R}^3 \right), \quad u_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha \left((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right)$$

при условиях

$$2\beta_2 \geq \beta_4 \geq \beta_3 \geq 0, \tag{1.17}$$

существует единственное решение линейного уравнения

$$\Delta u_1(x) - u_1(x) = -u_0^2(x) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.18}$$

в классе $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left((1+|x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$|u_0^2(x_1) - u_0^2(x_2)| \leq 2 \max\{|u_0(x_1)|, |u_0(x_2)|\} |u_0(x_1) - u_0(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3,$$

из которого и того, что $u_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$, получаем

$$u_0^2(x), \quad f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

Поэтому в рассматриваемом классе дифференциальное уравнение (1.18) эквивалентно интегральному уравнению

$$u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} [u_0^2(y) - f(y)] dy. \quad (1.19)$$

Интегральное уравнение (1.19) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} (1+|x|^2)^{\beta_3/2} u_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|) (1+|x|^2)^{\beta_3/2}}{4\pi|x-y| (1+|y|^2)^{\beta_4/2}} \left[(1+|y|^2)^{\beta_4/2} u_0^2(y) - (1+|y|^2)^{\beta_4/2} f(y) \right] dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|) (1+|x|^2)^{\beta_3/2}}{4\pi|x-y| (1+|y|^2)^{\beta_4/2}} \left[v_0^2(y) - (1+|y|^2)^{\beta_4/2} f(y) \right] dy, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$v_0(x) = (1+|x|^2)^{\beta_4/4} u_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3),$$

поскольку

$$\beta_2 \geq \frac{\beta_4}{2}.$$

Поэтому

$$v_0^2(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

Кроме того,

$$(1+|x|^2)^{\beta_4/2} f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

В силу результата теоремы 9 статьи [2] из равенства (1.20) приходим к выводу о том, что при условиях (1.17) выполнено соотношение

$$(1+|x|^2)^{\beta_3/2} u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1),$$

т.е. справедливо утверждение леммы.

Теперь сделаем важное предположение для дальнейших рассуждений. Пусть выполнены неравенства

$$\beta_2 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}, \quad 2\beta_2 \geq \beta_4 \geq \beta_3 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}. \quad (1.21)$$

Нетрудно заметить, что такие $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ существуют. Действительно, можно взять, например, следующий набор этих чисел:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 > \frac{3}{2} \Rightarrow 2\beta_2 > \beta_4 = \beta_3 = \beta_1.$$

Пусть выполнены все условия теоремы 3 при условиях (1.21). Тогда, в частности, существует классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1 в классе

$$u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T] \right), \quad T \in (0, T_0), \quad \beta_1 > \frac{3}{2}. \quad (1.22)$$

Тогда в этом классе можно проинтегрировать уравнение (1.1) по времени и с учетом того, что начальное условие $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ определяется по начальному условию $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ и произвольной функции $f(x) \in \mathbb{C}^\alpha \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\beta_4/2}; \mathbb{R}^3 \right)$ как единственное решение уравнения (1.18), в результате получим следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_j^2} d\tau + u^2(x, t) = f(x). \quad (1.23)$$

В классе (1.22) определены функционалы

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \|D_x u(x, t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u(x, t)\|_2^2, \quad J(t) = \|D_x u'(x, t)\|_2^2 + \|u'(x, t)\|_2^2, \quad (1.24)$$

где

$$\|w(x, t)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |w(x, t)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Справедлива следующая (см., например, [4])

Лемма 4. Если функция $u(x, t)$ принадлежит классу (1.22), то для функционалов (1.24) справедливо обыкновенное дифференциальное неравенство

$$(\Phi'(t))^2 \leq 2\Phi(t)J(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \quad (1.25)$$

В классе (1.22) функций $u(x, t)$ умножим уравнение (1.23) на $u(x, t)$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^3$. После интегрирования по частям получим равенство

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x, \tau) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx. \quad (1.26)$$

Теперь в том же классе функций $u(x, t)$ умножим уравнение (1.23) на функцию $u'(x, t)$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^3$. После интегрирования по частям получим равенство

$$J(t) + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u(x, t) dx + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x, \tau) u'_{x_j}(x, \tau) dx d\tau = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx. \quad (1.27)$$

Подставим выражение для

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx$$

из (1.26) в равенство (1.27) и в результате получим равенство

$$J(t) = \frac{1}{3} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \|D_{x_j} u\|_2^2 - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u'_{x_j}(x, \tau) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau - \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u'(x, t) dx. \quad (1.28)$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \|D_{x_j} u\|_2^2 \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \Phi(t), \quad \omega_0^2 = \sum_{j=1}^3 \omega_j^2, \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u'_{x_j}(x, t) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \int_0^t \|D_x u\|_2(\tau) \|D_x u'\|_2(t) d\tau \leq \\
& \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \left(\int_0^t \|D_x u\|_2^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|D_x u'\|_2^2(t) d\tau \right)^{1/2} \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} t^{1/2} J^{1/2}(t) \left(2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \delta J(t) + \frac{1}{4\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 2T \int_0^t \Phi(\tau) d\tau = \delta J(t) + T \frac{1}{2\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau, \\
& -\frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u'(x, t) dx \leq \frac{2}{3} \|u'\|_2 \|f\|_2 \leq \delta J(t) + \frac{1}{4\delta} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \|f\|_2^2.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Таким образом, из равенства (1.28) с учетом оценок (1.29), (1.30) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
(1 - 2\delta)J(t) & \leq \frac{1}{3} \Phi''(t) + \omega_0^2 \frac{2}{3} \Phi(t) + \\
& + T \frac{1}{2\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + \frac{1}{4\delta} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \|f\|_2^2 \quad \text{при } \delta \in (0, 1/2).
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Из неравенств (1.25) и (1.31) при $\delta \in (0, 1/2)$ вытекает неравенство

$$\frac{3}{2} (1 - 2\delta) (\Phi'(t))^2 \leq \Phi(t) \Phi''(t) + 2\omega_0^2 \Phi^2(t) + T \frac{1}{\delta} \omega_0^4 \frac{2}{3} \Phi(t) \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + \frac{1}{\delta 3} \|f\|^2 \Phi(t). \tag{1.32}$$

Перепишем интегродифференциальное неравенство (1.32) в следующем общем виде:

$$\Phi(t) \Phi''(t) - \alpha (\Phi'(t))^2 + \beta \Phi^2(t) + \gamma_1 \Phi(t) + \gamma_2 T \Phi(t) \int_0^t \Phi(s) ds \geq 0, \quad t \in [0, T], \tag{1.33}$$

где

$$\alpha = \frac{3}{2} (1 - 2\delta), \quad \beta = 2\omega_0^2, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\delta 3} \|f\|^2, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\delta} \omega_0^4 \frac{2}{3}.$$

Потребуем выполнения неравенства

$$\alpha > 1 \Rightarrow \delta \in \left(0, \frac{1}{6}\right).$$

В коэффициенты интегродифференциального неравенства (1.33) входит параметр δ , который нам нужно выбрать оптимальным. Выберем его таким образом, чтобы коэффициент

$$\frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1}$$

принял минимальное значение. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1} = \frac{2}{9} \|f\|_2^2 \frac{1}{\delta(1 - 2\delta)}.$$

Отметим, что минимальное значение функции

$$g(x) = \frac{1}{x(1 - 2x)}$$

достигается в точке $x = 1/4$. Итак, выберем $\delta > 0$ следующим образом:

$$\delta = \frac{1}{6} - \delta_1,$$

где $\delta_1 \in (0, 1/6)$ — сколь угодно мало. Потребуем выполнения неравенств

$$\Phi_0 := \Phi(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [u_0^2(x) + |D_x u_0(x)|^2] dx > 0, \quad (1.34)$$

$$\Phi_1 := \Phi'(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x)u_1(x) + (D_x u_0(x), D_x u_1(x))] dx > 0. \quad (1.35)$$

Неравенство (1.34) выполнено для нетривиальной функции

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right). \quad (1.36)$$

Более детально рассмотрим неравенство (1.35). В классе начальных функций (1.36) и

$$u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\lambda} \left((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right), \quad \lambda \in (0, \alpha),$$

при выполнении неравенств (1.21) и уравнения (1.17) справедливы равенства

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) [-\Delta u_1(x) + u_1(x)] dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) [u_0^2(x) - f(x)] dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [u_0^3(x) - f(x)u_0(x)] dx > 0$$

при достаточно “большой” нетривиальной функции $u_0(x)$. Заметим, что в [4] доказана

Теорема 4. Пусть $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0]$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству (1.33) и

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0, \quad \alpha > 1,$$

причем начальные условия $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ таковы, что существует T_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\alpha-1)^2} (\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha-1} (\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1} \Phi(0). \quad (1.37)$$

Тогда $\Phi(t)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}t]^{1/(\alpha-1)}},$$

для всех $t \in [0, T_0]$ и $T_0 \leq T_1 < +\infty$, где

$$A := (\alpha-1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha-1} (\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1} \Phi(0) \right] > 0.$$

Чтобы воспользоваться результатом теоремы 4, необходимо убедиться, что уравнение (1.37) имеет единственное положительное решение $x = T_1^2$. С учетом обозначения $x = T_1^2$ уравнение (1.37) из теоремы 4 можно переписать в виде

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1.38)$$

$$a = \frac{\gamma_2}{\alpha-1} \Phi_0^2, \quad b = \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1} \Phi_0 + \frac{\beta}{\alpha-1} \Phi_0^2 - \Phi_1^2, \quad c = \frac{1}{(\alpha-1)^2} \Phi_0^2.$$

Нужно доказать, что квадратное уравнение (1.38) имеет положительное решение. Действительно, с этой целью возьмем вместо нетривиальной функции $u_0(x)$ функцию $Ru_0(x)$ при $R > 0$. Тогда при достаточно большом $R > 0$ имеем

$$\Phi_1 \sim R^3, \quad \Phi_0 \sim R^2.$$

Поэтому

$$\mathcal{D} = b^2 - 4ac > 0 \quad \text{и} \quad b < 0$$

при достаточно большом $R > 0$. Итак, квадратное уравнение (1.38) имеет положительное решение. Значит, выполнены все условия теоремы 4. Таким образом, доказана

Теорема 5. Если $\alpha \in (0, 1)$, $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3 \right) \right)$, а функция $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3 \right) \right)$ является единственным решением уравнения (1.18) для произвольной функции $f(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha} \left(\left((1 + |x|^2)^{\beta_4/2}; \mathbb{R}^3 \right) \right)$ при выполнении условий

$$\beta_2 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}, \quad 2\beta_2 \geq \beta_4 \geq \beta_3 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}$$

и при достаточно большой начальной функции $u_0(x)$, в частности, при такой, что

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [u_0^2(x) + |D_x u_0(x)|^2] dx > 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [u_0^3(x) - f(x)u_0(x)] dx > 0,$$

решение $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)} \left(\left((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T] \right) \right) \cap \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1 не существует глобально во времени, и поэтому время $T_0 = T_0(u_0, f) > 0$ из теоремы 3 конечно, и справедливо предельное равенство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \left\| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t) \right\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

2. ЗАДАЧА КОШИ 2

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial |D_x u(x, t)|^2}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

Дадим

Определение 2. Классическим решением задачи Коши (2.1), (2.2) называется функция $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, которая удовлетворяет равенствам (2.1), (2.2) поточечно.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} v(y) dy,$$

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial |D_x u(x, t)|^2}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\mu(x) = \Delta u_1(x) - u_1(x), \quad v(x) = \Delta u_0(x) - u_0(x).$$

Справедлива следующая

Лемма 5. Если $\alpha \in (0, 1)$ и $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, то $\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_{02}(x, t) - \rho_{01}(x, t)|_\alpha \leq 12 \max \{ \|u_1\|_{1, 1+\alpha, T}, \|u_2\|_{1, 1+\alpha, T} \} \|u_2 - u_1\|_{1, 1+\alpha, T},$$

$$\|w\|_{1, 1+\alpha, T} := \sup_{t \in [0, T]} [|w(x, t)|_{1+\alpha} + |w_t(x, t)|_{1+\alpha}], \quad (2.4)$$

$$\rho_{0k}(x, t) = \frac{\partial |D_x u_k(x, t)|^2}{\partial t}, \quad u_k(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Доказательство. Шаг 1. Заметим, что при условиях леммы справедливо равенство

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial |z(x, t)|^2}{\partial t} = 2(z_t(x, t), z(x, t)), \quad z(x, t) = D_x u(x, t). \quad (2.5)$$

Пусть $t \in [0, T]$ – произвольное. Тогда верно равенство

$$\rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t) = 2(z_t(x_2, t), z(x_2, t) - z(x_1, t)) + 2(z(x_1, t), z_t(x_2, t) - z_t(x_1, t)),$$

из которого вытекает неравенство

$$|\rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t)| \leq 2|z_t(x_2, t)| |z(x_2, t) - z(x_1, t)| + 2|z(x_1, t)| |z_t(x_2, t) - z_t(x_1, t)|. \quad (2.6)$$

Из (2.6) вытекает оценка

$$\begin{aligned} [\rho(x, t)]_\alpha &= \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|\rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t)|}{|x_2 - x_1|^\alpha} \leq 2|z_t(x, t)|_0 |z(x, t)|_\alpha + \\ &+ 2|z(x, t)|_0 |z_t(x, t)|_\alpha = 2|D_x u_t(x, t)|_0 |D_x u(x, t)|_\alpha + 2|D_x u(x, t)|_0 |D_x u_t(x, t)|_\alpha < +\infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.5) получаем оценку

$$|\rho_0(x, t)|_0 \leq 2|D_x u_t(x, t)|_0 |D_x u(x, t)|_0 < +\infty. \quad (2.8)$$

Таким образом, из (2.7) и (2.8) приходим к выводу о том, что

$$|\rho_0(x, t)|_\alpha < +\infty \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

Из равенства (2.5) вытекает следующая цепочка равенств для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$:

$$\begin{aligned} &[\rho_0(x_2, t_2) - \rho_0(x_1, t_2)] - [\rho_0(x_2, t_1) - \rho_0(x_1, t_1)] = \\ &= 2(z_t(x_2, t_2), z(x_2, t_2) - z(x_1, t_2)) + 2(z(x_1, t_2), z_t(x_2, t_2) - z_t(x_1, t_2)) - \\ &- 2(z_t(x_2, t_1), z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)) - 2(z(x_1, t_1), z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)) = \\ &= 2(z_t(x_2, t_2), [z(x_2, t_2) - z(x_1, t_2)] - [z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)]) + \\ &\quad + 2(z_t(x_2, t_2) - z_t(x_2, t_1), z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)) + \\ &\quad + 2(z(x_1, t_2), [z_t(x_2, t_2) - z_t(x_1, t_2)] - [z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)]) + \\ &\quad + 2(z(x_1, t_2) - z(x_1, t_1), z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)), \end{aligned}$$

из которой вытекает оценка

$$\begin{aligned} |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha &\leq 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_{jt}(x, t)|_\alpha |z_j(x, t_2) - z_j(x, t_1)|_\alpha + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_j(x, t)|_\alpha |z_{jt}(x, t_2) - z_{jt}(x, t_1)|_\alpha + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_j(x, t)|_\alpha |z_{jt}(x, t_2) - z_{jt}(x, t_1)|_\alpha + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_{jt}(x, t)|_\alpha |z_j(x, t_2) - z_j(x, t_1)|_\alpha = 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t(x, t)|_\alpha |D_{x_j} u(x, t_2) - D_{x_j} u(x, t_1)|_\alpha + \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u(x, t)|_\alpha |D_{x_j} u_t(x, t_2) - D_{x_j} u_t(x, t_1)|_\alpha + \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u(x, t)|_\alpha |D_{x_j} u_t(x, t_2) - D_{x_j} u_t(x, t_1)|_\alpha + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t(x, t)|_\alpha |D_{x_j} u(x, t_2) - D_{x_j} u(x, t_1)|_\alpha \leq \\ &\leq 24 \|u\|_{1, 1+\alpha, T} [|u(x, t_2) - u(x, t_1)|_{1+\alpha} + |u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)|_{1+\alpha}]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

С другой стороны, несложно доказать неравенство

$$\begin{aligned} |\rho_0(x, t_2) - \rho_0(x, t_1)|_0 &\leq 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t(x, t)|_0 |D_{x_j} u(x, t_2) - D_{x_j} u(x, t_1)|_0 + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u(x, t)|_0 |D_{x_j} u_t(x, t_2) - D_{x_j} u_t(x, t_1)|_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.10) и из (2.11) вытекает, что

$$\begin{aligned} |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha &\leq c_0 \|u\|_{1, 1+\alpha, T} [|u(x, t_2) - u(x, t_1)|_{1+\alpha} + \\ &+ |u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)|_{1+\alpha}] \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_2 - t_1| \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, из (2.9) и (2.12) приходим к выводу о том, что $\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Пусть

$$\rho_{0k}(x, t) = \frac{\partial |D_{x_k} u_k(x, t)|^2}{\partial t}, \quad u_k(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

при $k = 1, 2$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \rho_{02}(x, t) - \rho_{01}(x, t) &= 2 \sum_{j=1}^3 D_{x_j} u_{2t}(x, t) [D_{x_j} u_2(x, t) - D_{x_j} u_1(x, t)] + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 D_{x_j} u_1(x, t) [D_{x_j} u_{2t}(x, t) - D_{x_j} u_{1t}(x, t)], \end{aligned}$$

из которого вытекает оценка

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |\rho_{02}(x, t) - \rho_{01}(x, t)|_\alpha &\leq 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_{2t}(x, t)|_\alpha \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_2(x, t) - D_{x_j} u_1(x, t)|_\alpha + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_1(x, t)|_\alpha \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_{2t}(x, t) - D_{x_j} u_{1t}(x, t)|_\alpha \leq 12 \max \{ \|u_1\|_{1, 1+\alpha, T}, \|u_2\|_{1, 1+\alpha, T} \} \|u_2 - u_1\|_{1, 1+\alpha, T}. \end{aligned}$$

Наконец, справедлива

Теорема 6. Если $\alpha \in (0, 1)$, то для любых $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (2.3) в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|u\|_{1, 1+\alpha, T} = +\infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Прежде всего заметим, что интегральное уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$u(x, t) = H[u](x, t),$$

где оператор $H[u](x, t)$ определен равенством

$$H[u](x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} v(y) dy$$

и в силу результата теоремы 5 статьи [2] действует следующим образом:

$$H[u](x, t) : \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 2. Заметим, что в силу оценки (1.4) теоремы 1 статьи [2] и оценки (2.4) леммы 5 справедлива следующая оценка:

$$\|H[u_1](x, t) - H[u_2](x, t)\|_{1,1+\alpha,T} \leq Td_0(T) \sup_{t \in [0,T]} |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)|_\alpha \leq Td_0(T)h(R)\|u_1 - u_2\|_{1,1+\alpha,T},$$

$$h(R) = 12R, \quad R = \max\{\|u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \|u_2\|_{1,1+\alpha,T}\}.$$
(2.13)

Шаг 3. Рассмотрим следующий шар:

$$B_R := \{w(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{1,1+\alpha,T} \leq R\}.$$

Пусть $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ — произвольные фиксированные. Тогда найдется настолько большое $R > 0$, что справедливо неравенство

$$\|f_1(x, t)\|_{1,1+\alpha,T} \leq \frac{R}{2},$$

$$f_1(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \nu(y) dy.$$

Положим в оценке (2.13) $u_1(x, t) = u(x, t) \in B_R$ и $u_2(x, t) = 0$. Тогда получим цепочку неравенств

$$\|H_1[u](x, t)\|_{1,1+\alpha,T} \leq 12\|u(x, t)\|_{1,1+\alpha,T}^2 \leq Td_0(T)12R^2 \leq \frac{R}{2},$$

$$H_1[u](x, t) := - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau$$
(2.14)

при достаточно малом $T > 0$ таком, что выполнено неравенство

$$12Td_0(T)R \leq \frac{1}{2}.$$
(2.15)

Из (2.13) и (2.14) вытекает, что

$$H[u](x, t) : B_R \rightarrow B_R.$$

Наконец, из оценки (2.13) при выполнении условия (2.15) получаем неравенство

$$\|H[u_1](x, t) - H[u_2](x, t)\|_{1,1+\alpha,T} \leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{1,1+\alpha,T}$$

для любых $u_1(x, t), u_2(x, t) \in B_R$, т.е. оператор $H[u](x, t)$ является сжимающим на шаре B_R . Отсюда вытекает существование единственного решения $u(x, t)$ интегрального уравнения (2.3) в шаре $B_R \subset \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ при достаточно большом $R > 0$ и для достаточно малого $T > 0$.

Шаг 4. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (2.3) в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ (см., например, [3]), приходим к утверждению теоремы.

Справедлива следующая

Теорема 7. Если $\alpha \in (0, 1)$, то для любых $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) в смысле определения 2 в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|u\|_{1,1+\alpha,T} = +\infty.$$

Из третьей формулы Грина (9.1) из [1] вытекает, что всякое классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет интегральному уравнению (2.3), а всякое решение этого интегрального уравнения в силу теоремы 6 единственно в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ для любого

$T \in (0, T_0)$. С учетом результата леммы 5 осталось воспользоваться теоремой 5 статьи [2] при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

3. ЗАДАЧА КОШИ 3

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x). \quad (3.2)$$

Дадим

Определение 3. Классическим решением задачи Коши (3.1), (3.2) называется функция $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, удовлетворяющая равенствам (3.1), (3.2) поточечно.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} v(y) dy, \quad (3.3)$$

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2},$$

$$\mu(x) = \Delta u_1(x) - u_1(x), \quad v(x) = \Delta u_0(x) - u_0(x).$$

Справедлива следующая

Лемма 6. Если $\alpha \in (0, 1)$ и $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$, то $\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_{01}(x, t) - \rho_{02}(x, t)|_\alpha \leq c_0 \max \{ \|u_1\|_{2, \alpha, T}, \|u_2\|_{2, \alpha, T} \} \|u_1 - u_2\|_{2, \alpha, T},$$

$$\rho_{0k}(x, t) = \frac{\partial^2 u_k^2(x, t)}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2, \quad (3.4)$$

$$\|w\|_{2, \alpha, T} = \sup_{t \in [0, T]} [|w(x, t)|_\alpha + |w_t(x, t)|_\alpha + |w_{tt}(x, t)|_\alpha].$$

Доказательство. Несложное доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Справедлива следующая

Теорема 8. Если $\alpha \in (0, 1)$, то для любого $T > 0$ найдутся такие малые $R > 0$, $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$, что для любых $u_0(x) \in B_R \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in B_{R_2} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ существует единственное решение $u(x, t) \in B_R \subset \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ интегрального уравнения (3.3), где

$$B_{R_k} = \{w(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) : |w(x)|_{2+\alpha} \leq R_k\}, \quad k = 1, 2,$$

$$B_R = \{w(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{2, \alpha, T} \leq R\}.$$

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений и оценок (1.4) из [2] и (3.4).

Справедлива следующая

Теорема 9. Если $\alpha \in (0, 1)$, то для любого $T > 0$ найдутся такие малые $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$, что для любых $u_0(x) \in B_{R_1} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in B_{R_2} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (3.1), (3.2) $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ в смысле определения 3.

Доказательство основано на третьей формуле Грина (9.1) из [1], теореме 5 статьи [2] при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ и теореме 8.

Теперь мы рассмотрим вопрос об отсутствии локального во времени и глобального во времени классических решений задачи Коши (3.1), (3.2).

С этой целью перепишем уравнение (3.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \left(u(x, t) + \frac{1}{2} \right) - \left(u(x, t) + \frac{1}{2} \right)^2 \right) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 (u(x, t) + 1/2)}{\partial x_j^2} = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ и проинтегрируем в рамках классических решений $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ по частям, тогда получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u(x, t) + 1/2) \Delta_x \phi''(x, t) + (u(x, t) + 1/2) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [(u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi'(x, 0) - u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0)] dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [2(u_0(x) + 1/2) u_1(x) \phi(x, 0) - (u_0(x) + 1/2)^2 \phi'(x, 0)] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 \phi''(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Дадим

Определение 4. Будем говорить, что функция $u_1(x)$ принадлежит классу B , если найдется такая ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей, что $u_1(x) \in H^2(\Omega)$ и $\Delta_x u_1(x) \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ и

$$\Delta_x u_1(x) \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Справедлива следующая

Теорема 10. Если $\alpha \in (0, 1)$ и $u_1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ и $u_0(x) + 1/2 \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, то при выполнении условия

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) u_1(x) dx < 0$$

время существования классического решения задачи Коши (3.1), (3.2) конечно, и имеет место следующая оценка сверху:

$$T \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2)^2 dx}{-\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) u_1(x) dx}.$$

Если же $u_0(x) = -1/2$ и $u_1(x) \in B$, то классическое решение задачи Коши (3.1), (3.2) отсутствует даже локально во времени.

Доказательство этой теоремы основано на методе нелинейной емкости С.И. Похожаева из [5]. Нужно с помощью неравенства Гёльдера оценить слагаемые в равенстве (3.5). Возьмем в качестве функции $\phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ следующую:

$$\phi(x, t) = \phi_R(x) \phi_T(t),$$

$$\phi_R(x) = \phi_0 \left(\frac{|x|^2}{R^2} \right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } s \geq 1, \end{cases}$$

$$\phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, +\infty), \quad \phi_T(t) = \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2.$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \Delta_x \phi''(x, t) dx dt \right| = \left| \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \Delta_x \phi_R(x) dx dt \right| \leq \\
 & \leq \frac{2T^{1/2}}{T^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_R(x)|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \quad I_R := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 \phi_R(x) dx dt, \\
 & \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) dx dt \right| \leq \\
 & \leq \left(\int_0^T \phi_R^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{R x_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2} = \left(\frac{T}{5} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{R x_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \quad (3.6) \\
 & \left| \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi'(x, 0) dx \right| \leq \frac{2}{T} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi_R(x) dx \right| \leq \\
 & \leq \frac{2}{T} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x) + 1/2|^2 dx \right)^{1/2}, \\
 & \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \phi_R(x) dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_1^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $u_0(x) + 1/2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, то согласно теореме Лебега справедливо следующее предельное свойство:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \left[2(u_0(x) + 1/2) u_1(x) \phi(x, 0) - (u_0(x) + 1/2)^2 \phi'(x, 0) \right] dx = \\
 & = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2) u_1(x) + \frac{1}{T} (u_0(x) + 1/2)^2 \right] \phi_R(x) dx \rightarrow \\
 & \rightarrow 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2) u_1(x) + \frac{1}{T} (u_0(x) + 1/2)^2 \right] dx
 \end{aligned}$$

при $R \rightarrow +\infty$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_R(x)|^2}{\phi_R(x)} dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \\
 & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{R x_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{0 \xi_j \xi_j}(|\xi|^2) \right|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \quad (3.7) \\
 & \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi.
 \end{aligned}$$

Из равенства (3.5) и оценок (3.6), (3.7) вытекает неравенство

$$\frac{2T^{1/2}}{T^2} c_1 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \left(\frac{T}{5}\right)^{1/2} c_2 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \frac{2}{T} a_1 R^{-1/2} + a_2 R^{-1/2} + J_R \geq \frac{2}{T^2} I_R, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &:= \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \Phi_0(|\xi|^2)|^2}{\Phi_0(|\xi|^2)} d\xi \right)^{1/2}, \\ c_2 &:= \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \Phi_{0\xi_j \xi_j}(|\xi|^2) \right|^2}{\Phi_0(|\xi|^2)} d\xi \right)^{1/2}, \\ a_1 &:= \|u_0(x) + 1/2\|_2 \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \Phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \\ a_2 &:= \|u_1(x)\|_2 \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \Phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \\ J_R &:= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2) u_1(x) + \frac{1}{T} (u_0(x) + 1/2)^2 \right] \Phi_R(x) dx. \end{aligned}$$

Далее, из (3.8) с помощью теоремы Беппо Леви приходим в пределе при $R = N \in \mathbb{N} \rightarrow +\infty$ к следующей априорной оценке:

$$T^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2) u_1(x) + \frac{1}{T} (u_0(x) + 1/2)^2 \right] dx \geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 dx dt,$$

из которой уже стандартным образом выводим утверждения теоремы. В частности, при $u_0(x) = -1/2$ имеем

$$u(x, t) = -1/2 \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T].$$

После подстановки этих равенств в равенство (3.5) приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \Phi(x, 0) dx = 0$$

для любых пробных функций $\Phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Возьмем

$$\Phi(x, t) = \Phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \Phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega),$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям определения 4 класса B начальных функций $u_1(x)$. Тогда получим равенство

$$\int_{\Omega} u_1(x) \Delta_x \Phi_1(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \Delta_x u_1(x) \Phi_1(x) dx = 0 \Rightarrow \Delta_x u_1(x) = 0$$

для всех $x \in \Omega$, что противоречит определению класса B .

Теперь умножим уравнение (3.1) на функцию $\phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, проинтегрируем по частям и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x) [\Delta_x \phi(x, 0) - \phi'(x, 0)] - u_1(x) [\Delta_x \phi(x, 0) - \phi(x, 0)]] dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [2u_0(x)u_1(x)\phi(x, 0) - u_0^2(x)\phi'(x, 0)] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x, t) \phi''(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Положим

$$\phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^3), \quad \phi_1(x) \geq 0.$$

Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right] dx dt \right| \leq c_1^{1/2} J^{1/2} \leq \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} c_1, \quad (3.9)$$

$$c_1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right|^2}{\phi''(x, t)} dx dt, \quad (3.10)$$

$$J = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi''(x, t) u^2(x, t) dx dt.$$

Заметим, что в [5] доказано существование такой нетривиальной функции $\phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, что конечна емкость c_1 . При этом справедливо выражение

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x) [\Delta_x \phi(x, 0) - \phi'(x, 0)] - u_1(x) [\Delta_x \phi(x, 0) - \phi(x, 0)]] dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} [2u_0(x)u_1(x)\phi(x, 0) - u_0^2(x)\phi'(x, 0)] dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x) \right] dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)u_1(x)\phi_1(x) dx < 0. \quad (3.12)$$

Тогда при этом условии найдется такое достаточно большое $T > 0$, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x) \right] dx < 0. \quad (3.13)$$

Фиксируем такое $T > 0$. Теперь сделаем следующую замену в равенстве (3.11):

$$u_0(x) \mapsto Ru_0(x), \quad u_1(x) \mapsto Ru_1(x) \quad \text{при} \quad R > 0,$$

и в результате получим равенство

$$I = -R \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + 2R^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x) \right] dx. \quad (3.14)$$

Поскольку при выбранном и фиксированном $T > 0$ справедливо неравенство (3.13), то при достаточно большом $R > 0$ получаем из (3.14) неравенство

$$\frac{1}{2}c_1 + I < 0. \quad (3.15)$$

Теперь фиксируем такое $R > 0$. С учетом неравенства (3.9) и выражения (3.14) получим неравенство

$$\frac{1}{2}c_1 - R \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + 2R^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x) u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x) \right] dx \geq \frac{1}{2} J \geq 0. \quad (3.16)$$

Неравенства (3.15) и (3.16) противоречат друг другу. Следовательно, нами доказана

Теорема 11. Если нетривиальная функция $\phi_1(x) \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ такова, что конечна нелинейная емкость (3.10), в которой

$$\phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2,$$

то при выполнении неравенства (3.12) и при начальных функциях $Ru_0(x)$ и $Ru_1(x)$ при достаточно большом $R > 0$ классическое решение задачи Коши (3.1), (3.2) не существует глобально во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гельдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 10. С. 1639–1661.
2. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гельдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. II. Теория потенциала // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 96–130.
3. Панин А.А. О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 884–903.
4. Корпусов М.О. Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 5. С. 119–150.
5. Похожаев С.И., Митидиери Э. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.