

МЕТОД ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ 3D КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ¹⁾

© 2023 г. Р. В. Намм^{1,*}, Г. И. Цой^{1,**}

¹ 680063 Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65, ВЦ ДВО РАН, Россия

* e-mail: rnamm@yandex.ru

** e-mail: tsoy.dv@mail.ru

Поступила в редакцию 24.11.2022 г.
Переработанный вариант 24.11.2022 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

В статье исследуется трехмерная контактная задача с кулоновским трением для упругого тела, опирающегося на жесткую опору. Решение квазивариационной постановки задачи определяется как неподвижная точка некоторого отображения, ставящего в соответствие заданной силе нормальной реакции опоры величину нормального напряжения в зоне контакта. Для поиска неподвижной точки используется метод последовательных приближений, сходимость которого доказывается с помощью модифицированных функционалов Лагранжа. Приводятся результаты численного решения задачи с использованием конечно-элементного моделирования и метода проксимального градиента. Библ. 17. Фиг. 7. Табл. 1.

Ключевые слова: упругое тело, сила трения, нелинейные граничные условия, модифицированный функционал Лагранжа, неподвижная точка.

DOI: 10.31857/S0044466923070104, **EDN:** ZXTRJO

1. ВВЕДЕНИЕ

Контактные задачи с трением имеют приложения во многих областях механики сплошных сред и представляют большой интерес для специалистов, занимающихся математическим моделированием данных задач. Одновременный учет граничных условий непроникания типа Синьорини и кулоновского трения в математической модели контактных задач приводит к квазивариационным неравенствам. Неравенства такого типа не могут быть представлены в виде экстремальной задачи, и их решение сводится к поиску неподвижной точки некоторого отображения [1, 2]. Поиск неподвижной точки обычно осуществляется методом последовательных приближений, вычислительная эффективность которого зависит от реализации на каждом шаге вспомогательной контактной задачи с заданным трением.

Известно, что сила трения в зоне контакта упругого тела с жестким основанием пропорциональна модулю нормального напряжения с коэффициентом трения. Поэтому для решения вспомогательной контактной задачи с заданным трением эффективно использовать схемы двойственности на основе модифицированных функционалов Лагранжа, позволяющих находить нормальное напряжение как двойственную компоненту седловой точки. Использование модифицированных функционалов Лагранжа позволяет реализовать градиентный метод Удзавы, который является более эффективным по сравнению с классическим аналогом. Модифицированные функционалы Лагранжа ранее вводились и изучались в работах [3–8].

В данной работе исследуется сходимость метода последовательных приближений для нахождения неподвижной точки при решении квазивариационного неравенства в 3D случае. Численное решение задачи в 3D случае осложняется по сравнению с 2D наличием нескольких тангенциальных компонент вектора перемещения в зоне контакта. Для решения задачи минимизации недифференцируемого функционала в конечно-мерном случае был применен метод проксимального градиента. Чтобы показать эффективность предложенного метода, представлены численные результаты.

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 20-01-00450 А).

2. КРАЕВАЯ И ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, состоящей из трех непустых, попарно-непересекающихся частей $\Gamma_d, \Gamma_n, \Gamma_c$: $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_d \cup \bar{\Gamma}_n \cup \bar{\Gamma}_c$. Полагаем, что тело закреплено на Γ_d , на Γ_n задаются поверхностные силы $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in L^2(\Gamma_n) := (L^2(\Gamma_n))^3$ и на участке Γ_c упругое тело опирается на абсолютно жесткую опору $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \leq 0\}$. В зоне контакта происходит учет силы трения по закону Кулона и на тело действуют объемные силы $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega) := (L^2(\Omega))^3$. Необходимо найти перемещения $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ точек упругого тела Ω в состоянии равновесия.

Для этого определим тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{u})\}$ и тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$, связанные линейным законом Гука:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(\mathbf{u}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{km}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right), \quad k, m = 1, 2, 3.$$

Здесь $c_{ijkm} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j, k, m = 1, 2, 3$ – это элементы тензора модулей упругости, обладающего свойствами симметрии и положительной определенности: $c_{ijkm} = c_{jimk} = c_{kmij}$, $c_{ijkm}\xi_{ij}\xi_{km} \geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij}$, $\forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \in \mathbb{R}^1$, $c_0 = \text{const} > 0$. По повторяющимся индексам ведется суммирование.

Кроме того, определим как $u_\nu = u_i\nu_i$, $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu\mathbf{v}$ нормальную и тангенциальную компоненты вектора перемещения \mathbf{u} на Γ_c , где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Аналогично определим $\sigma_\nu(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u})\nu_i\nu_j$, $\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u})\nu_j - \sigma_\nu(\mathbf{u})\mathbf{v}$ – нормальная и тангенциальная компоненты вектора напряжений $(\sigma_{1j}(\mathbf{u})\nu_j, \sigma_{2j}(\mathbf{u})\nu_j, \sigma_{3j}(\mathbf{u})\nu_j)$ на Γ_c . Наконец обозначим через \mathcal{F} коэффициент трения на Γ_c . Полагаем, что $\mathcal{F} > 0$ – это достаточно гладкая функция с компактным носителем на Γ_c .

Выберем два касательных вектора $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ на Γ_c , таких что вместе с \mathbf{v} они образуют локальный ортонормированный базис $\{\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{v}\}$ в \mathbb{R}^3 . Тогда вектор перемещения \mathbf{v} можно представить в локальной системе координат $\{\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{v}\}$ как $\mathbf{v} = (v_\nu, \mathbf{v}_\tau)$, где $v_\nu = v_i\nu_i$, $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{v}_\tau = (v_{\tau_1}, v_{\tau_2})$, $v_{\tau_j} = v_i\tau_{ij}$, $j = 1, 2$. То есть тангенциальную компоненту вектора перемещений можно представить в виде двумерного вектора. Этот факт усложняет исследование решаемой задачи в 3D по сравнению с плоским случаем. Для рассматриваемой геометрии области Ω и опоры S , соответствующие компоненты можно записать следующим образом: $u_\nu = -u_3$, $\mathbf{u}_\tau = (u_1, u_2, 0)$, $\sigma_\nu(\mathbf{u}) = -\sigma_{3j}(\mathbf{u})\nu_j$, $\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}) = (\sigma_{1j}(\mathbf{u})\nu_j, \sigma_{2j}(\mathbf{u})\nu_j, 0)$ на Γ_c . Далее полагаем, что $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора.

Рассмотрим следующую краевую постановку задачи в области Ω :

$$-\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma_d, \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{p} \quad \text{на } \Gamma_n, \quad (2.3)$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_\nu(\mathbf{u})u_\nu = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (2.4)$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u})\| \leq -\mathcal{F}\sigma_\nu(\mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u})\mathbf{u}_\tau - \mathcal{F}\sigma_\nu(\mathbf{u})\|\mathbf{u}_\tau\| = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \quad (2.5)$$

Краевая задача (2.1)–(2.5) принадлежит к классу задач со свободной границей. В частности, точки на Γ_c , в которых тело слипается с опорой ($u_\nu = 0$), заранее неизвестны и определяются одновременно с решением задачи. Условия (2.4) обеспечивают непроникание упругого тела в абсолютно жесткую опору. Условия (2.5) задают силу трения по закону Кулона на Γ_c [1, 2, 9].

Для слабой формулировки задачи определим функциональное пространство

$$\mathbb{V} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) := (H^1(\Omega))^3 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_d \right\}$$

и множество допустимых перемещений

$$\mathbb{K} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid v_\nu \leq 0 \text{ на } \Gamma_c \}.$$

Кроме того, обозначим через

$$H^{1/2}(\Gamma_c) = \{ \varphi \in L^2(\Gamma_c) \mid \exists v \in H^1(\Omega) : v = \varphi \text{ на } \Gamma_c, v = 0 \text{ на } \Gamma_d \}$$

пространство следов функции на Γ_c и через $H^{-1/2}(\Gamma_c) = (H^{1/2}(\Gamma_c))^*$ соответствующее двойственное пространство. Далее в работе $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Gamma_c}$ обозначает двойственность между пространствами $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ и $H^{1/2}(\Gamma_c)$.

Слабым решением задачи (2.1)–(2.5) назовем $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющее квазивариационному неравенству [1, 2, 10]

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \langle \mathcal{F}\sigma_\nu(\mathbf{u}), \|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\| \rangle_{1/2, \Gamma_c} \geq b(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}, \tag{2.6}$$

где $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx$ – симметричная билинейная форма, определенная на $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ и $b(\mathbf{v}) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_n} p_i v_i ds$ – линейная форма на \mathbb{V} , представляющая работу приложенных внешних сил.

Используя обобщенную формулу Грина, можно показать, что решение \mathbf{u} квазивариационного неравенства (2.6) удовлетворяет краевой задаче (2.1)–(2.5) в обобщенном смысле. Если слабое решение достаточно гладкое, то оно также будет классическим решением краевой задачи. Если решение \mathbf{u} задачи (2.6) имеет дополнительную гладкость по сравнению с вариационной, а именно $\sigma_\nu(\mathbf{u}) \in L^2(\Gamma_c)$, то член $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Gamma_c}$ можно заменить скалярным произведением на $L^2(\Gamma_c)$, так как следы функций $\mathbf{v}_\tau, \mathbf{u}_\tau \in (H^{1/2}(\Gamma_c))^2$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \int_{\Gamma_c} \mathcal{F}\sigma_\nu(\mathbf{u}) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) ds \geq b(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}.$$

Зависимость силы трения $\mathcal{F}|\sigma_\nu(\mathbf{u})|$ от искомого решения \mathbf{u} является основной трудностью при исследовании и построении численных алгоритмов решения подобных задач, поэтому разработка методов их решения является важной и сложной задачей. Решение квазивариационного неравенства (2.6) также соответствует квазиэкстремальному представлению

$$\mathbf{u} \in \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{K}} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F}|\sigma_\nu(\mathbf{u})| \|\mathbf{v}_\tau\| ds \right\}.$$

3. РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Определим по решению \mathbf{u} задачи (2.6) $\sigma_\nu(\mathbf{u})$ при помощи формулы Грина

$$\langle \sigma_\nu(\mathbf{u}), v_\nu \rangle_{1/2, \Gamma_c} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v})$$

для $\mathbf{v} = 0$ на Γ_d и $\mathbf{v}_\tau = 0$ on Γ_c . Тогда $\sigma_\nu(\mathbf{u}) \in H^{-1/2}(\Gamma_c)$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу с заданным трением. Найти $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$ для $g \in L^2(\Gamma_c)$, $g \geq 0$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F}g (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) ds \geq b(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}. \tag{3.1}$$

Решение задачи (3.1) существует и единственно. Тогда если определить отображение $\Phi(g) = -\sigma_\nu(\mathbf{u}(g))$, где $\mathbf{u}(g)$ слабое решение задачи с заданным трением, то задача (2.6) сводится к отысканию неподвижной точки этого отображения.

В работе [1] показано с использованием слабой теоремы Шаудера, что отображение Φ имеет неподвижную точку в пространстве $L^2(\Gamma_c)$ при достаточно малых значениях коэффициента трения \mathcal{F} . Существование неподвижной точки означает, что $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$ является решением квазивариационного неравенства (6), когда $\Phi(-\sigma_\nu(\mathbf{u})) = -\sigma_\nu(\mathbf{u})$.

Для нахождения неподвижной точки обычно используется метод последовательных приближений [1, 2, 11]. В нашем случае метод выглядит следующим образом.

1. Задаем стартовое $g^0 \in L^2(\Gamma_c)$, $g^0 \geq 0$.
2. Находим \mathbf{u}' как решение вспомогательной задачи (3.1) для $g = g^t$.
3. Вычисляем следующее $g^{t+1} = |\sigma_\nu(\mathbf{u}')|$.

Решение задачи с заданным трением (3.1) обычно заменяют задачей поиска седловой точки классического функционала Лагранжа. Это позволяет сгладить соответствующий недифференцируемый функционал и перейти к задаче безусловной оптимизации по прямой переменной. Однако применение алгоритма Удзавы для поиска седловой точки не гарантирует сходимость по двойственной переменной, несмотря на существование самой седловой точки классического функционала Лагранжа. Шаг сдвига по двойственной переменной также должен быть ограничен, для сходимости по прямой переменной, что замедляет работу алгоритма [12, 13]. Для преодоления данного затруднения авторами рассматривается схема двойственности, основанная на модифицированных функционалах Лагранжа с нелинейной зависимостью от двойственных переменных [4–7]. Вопрос о сходимости метода последовательных приближений будет тесно связан с последовательностью седловых точек, генерируемых в модифицированном методе Удзавы при поиске седловых точек. Для плоского случая аналогичное исследование авторами было проведено в работе [14].

Определим модифицированный функционал Лагранжа на пространстве [6]

$$M(\mathbf{v}, l) = J(\mathbf{v}) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_c} \left((l + r v_\nu)^+ \right)^2 - l^2 ds \quad \forall (\mathbf{v}, l) \in \mathbb{V} \times L^2(\Gamma_c),$$

где $(l + r v_\nu)^+ = \max\{0, l + r v_\nu\}$, $r > 0$ произвольная константа. Здесь

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} g \|\mathbf{v}_\tau\| ds$$

функционал потенциальной энергии и $g \geq 0$.

Определение 1 (Седловая точка). Пара $(\mathbf{v}^*, l^*) \in \mathbb{V} \times L_2(\Gamma_c)$ называется седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(\mathbf{v}, l)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$M(\mathbf{v}^*, l) \leq M(\mathbf{v}^*, l^*) \leq M(\mathbf{v}, l^*) \quad \forall (\mathbf{v}, l) \in \mathbb{V} \times L_2(\Gamma_c). \quad (3.2)$$

Определение седловой точки для модифицированного функционала $M(\mathbf{v}, l)$ отличается от соответствующего определения для классического функционала, тем что область определения двойственной переменной l совпадает со всем пространством $L_2(\Gamma_c)$ и не должна быть неотрицательной. Можно показать, что множество седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают [3, 8].

Введем модифицированный двойственный функционал на пространстве $L^2(\Gamma_c)$

$$\underline{M}(l) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} M(\mathbf{v}, l) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} \left\{ J(\mathbf{v}) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_c} \left((l + r v_\nu)^+ \right)^2 - l^2 ds \right\}$$

и определим соответствующую двойственную задачу

$$\underline{M}(l) \rightarrow \sup, \quad l \in L^2(\Gamma_c). \quad (3.3)$$

Функционал $\underline{M}(l)$ имеет другое представление с помощью функционала чувствительности $\chi(m)$ для произвольного $m \in L^2(\Gamma_c)$ и $\mathbb{K}_m := \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid v_v \leq m \text{ на } \Gamma_c\}$:

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{K}_m} J(\mathbf{v}), & \text{если } \mathbb{K}_m \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функционал $\chi(m)$ является собственным выпуклым функционалом и слабополунепрерывным снизу на $L^2(\Gamma_c)$ [4, 6, 8]. Имеет место представление для $\underline{M}(l)$ [8]:

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L^2(\Gamma_c)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_c} l m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_c} m^2 ds \right\}.$$

Легко видеть, что для любых $l \in L^2(\Gamma_c)$ справедлива оценка

$$\underline{M}(l) \leq \chi(0) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{K}} J(\mathbf{v}). \tag{3.4}$$

Благодаря свойству слабой полунепрерывности снизу функционала чувствительности можно доказать, что двойственный функционал $\underline{M}(l)$ является непрерывным и дифференцируемым по Гато в $L^2(\Gamma_c)$, и его производная $\nabla \underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{r}$ [3, 4, 8], т.е. справедливо

$$\|\nabla \underline{M}(l_1) - \nabla \underline{M}(l_2)\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \frac{1}{r} \|l_1 - l_2\|_{L^2(\Gamma_c)} \quad \forall l_1, l_2 \in L^2(\Gamma_c)$$

и субдифференциал $\underline{M}(l)$ состоит из единственного элемента $\partial \underline{M}(l) = m(l)$

$$m(l) = \max \left\{ u_v, -\frac{l}{r} \right\} \quad \forall l \in L^2(\Gamma_c).$$

Это позволяет для поиска седловой точки модифицированного функционала Лагранжа применить градиентный метод Удзавы следующего вида:

- (i) Полагаем $k = 0$. Задаем произвольную функцию $l^0 \in L^2(\Gamma_c)$.
- (ii) Находим \mathbf{u}^{k+1} как решение задачи минимизации при фиксированном l^k

$$\mathbf{u}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} \left\{ J^t(\mathbf{v}) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_c} \left((l^k + r v_v)^+ \right)^2 - (l^k)^2 ds \right\}.$$

- (iii) Вычисляем $l^{k+1} = (l^k + r u_v^{k+1})^+$ и задаем $k = k + 1$.

Здесь $J^t(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} g^t \|\mathbf{v}_t\| ds$, где $t = 0, 1, \dots$ соответствуют номеру шага метода последовательных приближений. Шаг (iii) метода Удзавы соответствует градиентному методу решения двойственной задачи. Для последовательности $\{l^k\}$, построенной по данному методу, имеет место предельное равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(l^k)\|_{L^2(\Gamma_c)} = 0$. Учитывая оценку (3.4), можно доказать, что справедливо условие сильной двойственности [6]

$$\sup_{l \in L^2(\Gamma_c)} \underline{M}(l) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{K}} J^t(\mathbf{v}).$$

Пара функций (\mathbf{u}^t, l^t) , для которых будет выполняться равенство двойственности $\underline{M}(l^t) = J^t(\mathbf{u}^t)$ и будет являться седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа. При условии разрешимости двойственной задачи (3.3) для заданного g^t можно доказать слабую сходимость последовательности $\{l^k\}$ к решению двойственной задачи l^t и сходимость последова-

тельности $\{\mathbf{u}^k\}$ к решению \mathbf{u}^t задачи (3.1) по функционалу, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} J^t(\mathbf{u}^k) = J^t(\mathbf{u}^t)$ [4]. Если решение \mathbf{u}^t вспомогательной задачи имеет дополнительную гладкость: $\sigma_\nu(\mathbf{u}^t) \in L^2(\Gamma_c)$, $\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}^t) \in L^2(\Omega)$, тогда пара $(\mathbf{u}^t, -\sigma_\nu(\mathbf{u}^t))$ будет являться седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа.

Если последовательность $\{\mathbf{u}^k\}$ принадлежит $\mathbf{H}^2(\Omega)$ и ограничена, тогда последовательность $\{(\mathbf{u}^k, l^k)\}$ сходится к седловой точке (\mathbf{u}^t, l^t) в $\mathbb{V} \times L^2(\Gamma_c)$. Более того, справедливо равенство $l^t = -\sigma_\nu(\mathbf{u}^t)$. Таким образом, l^t будет соответствовать значению g^{t+1} на $(t + 1)$ -м шаге метода последовательных приближений, т.е. $l^t = g^{t+1}$.

Пусть $\{g^t\}$ – последовательность нормальных сил, генерируемых методом последовательных приближений. Предположим, что последовательность $\{g^t\} \subset H^{1/2}(\Gamma_c)$ и ограничена в этом пространстве. Так как $H^{1/2}(\Gamma_c)$ компактно вкладывается в $L^2(\Gamma_c)$, то $\{g^t\}$ является компактной последовательностью в $L^2(\Gamma_c)$. Таким образом, $\{g^t\}$ имеет предельные точки. Без ограничения общности можно считать, что $\{g^t\}$ имеет одну предельную точку, т.е. является сходящейся последовательностью. Пусть $\bar{g} \in L^2(\Gamma_c)$ – предел $\{g^t\}$ в $L^2(\Gamma_c)$, поэтому $\bar{g} = \lim_{t \rightarrow \infty} g^t$.

Теорема 1. *Элемент $\bar{g} \in L^2(\Gamma_c)$ является неподвижной точкой отображения Φ , т.е. выполняется $-\sigma_\nu(\mathbf{u}(\bar{g})) = \bar{g}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный t и рассмотрим элемент g^t . Обозначим $m(g^t) = \nabla M(g^t)$, где

$$M(g^t) = \inf_{m \in L^2(\Gamma_c)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_c} g^t m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_c} m^2 ds \right\}$$

и $\chi(m)$ – это функционал чувствительности [8]. По методу Удзавы имеем $m(g^t) = 0$.

Следовательно,

$$\chi(m(g^t)) = \chi(0) = \inf_{\mathbf{v} \in K} J^t(\mathbf{v}).$$

Обозначим $\mathbf{v}(g^t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v} \in K} J^t(\mathbf{v})$. В силу сильной выпуклости функционала J^t имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(\mathbf{v}(g^t), \mathbf{v}(g^t)) - b(\mathbf{v}(g^t)) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} g^t \|\mathbf{v}_\tau(g^t)\| ds + \frac{1}{2} a(\mathbf{v} - \mathbf{v}(g^t), \mathbf{v} - \mathbf{v}(g^t)) &\leq \\ \leq \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} g^t \|\mathbf{v}_\tau\| ds \quad \forall \mathbf{v} \in K. & \end{aligned} \tag{3.5}$$

Выберем два произвольных неотрицательных элемента \dot{g}, \ddot{g} из $L^2(\Gamma_c)$. Полагаем, что $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\dot{g})$, $\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\ddot{g})$, тогда последнее неравенство (3.5) можно записать для $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{v}}$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}) - b(\ddot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\ddot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) &\leq \frac{1}{2} a(\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}) - b(\dot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds, \\ \frac{1}{2} a(\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}) - b(\dot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) &\leq \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}) - b(\ddot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\ddot{\mathbf{v}}_\tau\| ds. \end{aligned}$$

Складывая два неравенства, получаем

$$\int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \frac{1}{2} a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) \leq \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| ds,$$

$$a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) \leq \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \dot{g} (\|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\|) ds + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \ddot{g} (\|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\|) ds,$$

$$a(\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}) \leq \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} (\dot{g} - \ddot{g}) (\|\dot{\mathbf{v}}_\tau\| - \|\dot{\mathbf{v}}_\tau\|) ds.$$

Так как $\text{meas}(\Gamma_d) > 0$, то квадратичная форма $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ является положительно-определенной на $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$. Следовательно, используя неравенства Корна и Коши–Шварца, можно показать, что существует константа $c > 0$:

$$\|\ddot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}\|_{\mathbb{V}} \leq c \|\ddot{g} - \dot{g}\|_{L^2(\Gamma_c)}. \tag{3.6}$$

Пусть $\dot{g} = \bar{g}$, $\ddot{g} = g^t$. Тогда

$$\|\mathbf{v}(g^t) - \mathbf{v}(\bar{g})\|_{\mathbb{V}} \leq c \|g^t - \bar{g}\|_{L^2(\Gamma_c)}.$$

Переходя в (3.5) к пределу при $t \rightarrow \infty$, учитывая (3.6), получаем следующее неравенство

$$\frac{1}{2} a(\mathbf{v}(\bar{g}), \mathbf{v}(\bar{g})) - b(\mathbf{v}(\bar{g})) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \bar{g} \|\mathbf{v}_\tau(\bar{g})\| ds \leq \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \bar{g} \|\mathbf{v}_\tau\| ds \quad \forall \mathbf{v} \in K.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательства выше проводились в предположении, что последовательность $\{g^t\}$ принадлежит пространству $H^{1/2}(\Gamma_c)$. Можно показать, что это условие выполняется, если элемент $\mathbf{u}^t = \arg \min_{\mathbf{v} \in K} J^t(\mathbf{v})$ принадлежит $\mathbf{H}^2(\Omega)$ для всех t .

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Численный анализ вариационных неравенств в механике обычно проводится на основе метода конечных элементов [2]. Пусть Ω – ограниченный многогранник. Конечно-элементная аппроксимация задачи проводилась с использованием трилинейных кубических конечных элементов. После дискретизации на (ii) шаге метода Удзавы мы получаем задачу минимизации недифференцируемой кусочно-квадратичной функции $\theta(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})$ по переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3|\mathcal{N}|}$, где

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x}_j - \sum_{j \in \mathcal{M}} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}_j + \frac{1}{2r} \sum_{j \in \mathcal{P}} \left((l_j + r(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j))^+ \right)^2 - (l_j)^2 w_j,$$

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{P}} \mathcal{F}_j g_j \|\mathbf{x}_j - (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_j\| w_j.$$

Здесь \mathcal{N} – это множество индексов всех узлов сетки, \mathcal{M} и \mathcal{P} – множества индексов узлов сетки на Γ_n и Γ_c соответственно, $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 3|\mathcal{N}|$ – матрица жесткости ($|\mathcal{N}|$ – мощность множества \mathcal{N}), $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3})$, $\mathbf{f}_j = (f_{j1}, f_{j2}, f_{j3})$, $\mathbf{p}_j = (p_{j1}, p_{j2}, p_{j3})$ – значения соответствующих функций в узлах сетки, g_j, l_j – значения нормальной силы и двойственной переменной в контактных узлах, \mathbf{v}_j соответствуют векторам нормали в узлах сетки. Интегралы по Γ_c аппроксимировались с помощью квадратурной формулы трапеций в 2D случае, где w_j – коэффициенты квадратурной формулы.

Тот факт, что функцию $\theta(\mathbf{x})$ можно представить в виде суммы выпуклой дифференцируемой функции $g(\mathbf{x})$ и выпуклой блочно-сепарабельной функции $h(\mathbf{x})$, позволяет нам применить метод проксимального градиента для решения конечномерной задачи минимизации. Вследствие вы-

бранной геометрии задачи вектора нормали определяются как $\mathbf{v}_j = (0, 0, -1)$, поэтому $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j = -x_{j3}$ и $\mathbf{x}_j - (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j)\mathbf{v}_j = (x_{j1}, x_{j2}, 0)$. Для простоты обозначим $\mathbf{x}_{j\tau} = (x_{j1}, x_{j2})$, тогда $h(\mathbf{x})$ определяется как сумма евклидовых норм

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{P}} h_j(\mathbf{x}_{j\tau}), \quad h_j(\mathbf{x}_{j\tau}) = \mathcal{F}_j g_j w_j \|(x_{j1}, x_{j2})\|.$$

Проксимальный оператор для евклидовой нормы $\lambda \|\cdot\|$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{prox}_{\lambda \|\cdot\|}(\mathbf{v}) = \left(1 - \frac{\lambda}{\|\mathbf{v}\|}\right)^+ \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

В силу блочной сепарабельности функции $h(\mathbf{x})$ проксимальный оператор для нее будет определяться как

$$\mathbf{prox}_h(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{prox}_{h_j}(\mathbf{x}_{j\tau}), x_{j3}, \dots, \mathbf{x}_{|\mathcal{N}|}), \quad j \in \mathcal{P},$$

где $\mathbf{prox}_{h_j}(\mathbf{x}_{j\tau}) = \mathbf{prox}_{\lambda_j \|\cdot\|}(\mathbf{x}_{j\tau})$, $\lambda_j = \mathcal{F}_j g_j w_j$.

Ускоренная версия метода проксимального градиента будет иметь следующий вид: выбираем $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(-1)} \in \mathbb{R}^{3|\mathcal{N}|}$ и повторяем шаги для $i = 1, 2, 3, \dots$:

$$1. \mathbf{y} = \mathbf{x}^{(i-1)} + \frac{i-2}{i+1}(\mathbf{x}^{(i-1)} - \mathbf{x}^{(i-2)}),$$

$$2. \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{prox}_{\alpha h}(\mathbf{y} - \alpha \nabla g(\mathbf{y})).$$

Если шаг сдвига $\alpha \in (0, 1/L]$, где L – константа Липшица функции ∇g , то данный метод сходится со скоростью $O(1/i^2)$ [15], причем чем ближе стартовое значение к решению, тем быстрее метод сходится. Стоит отметить, что величину шага сдвига можно определять с помощью известного правила Армихо.

Для нахождения седловой точки используется дискретный аналог метода Удзавы (i)–(iii), после чего находится новое приближение с помощью метода последовательных приближений.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

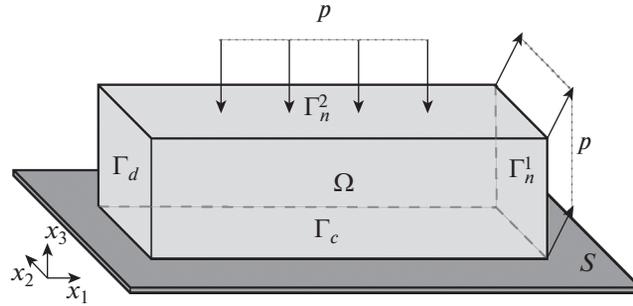
Рассмотрим следующий численный пример: тело $\Omega = (0, 3) \times (0, 1) \times (0, 1)$ (в м) выполнено из однородного упругого изотропного материала, характеризующегося модулем Юнга $E = 21.19 \times 10^4$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0.277$. Полагаем, что тело жестко закреплено на участке границы $\Gamma_d = \{0\} \times (0, 1) \times (0, 1)$ и контактирует с абсолютно жесткой опорой S на участке $\Gamma_c = (0, 3) \times (0, 1) \times \{0\}$. На оставшейся части границы Γ_n задаются поверхностные силы, $\Gamma_n = \Gamma_n^1 \cup \Gamma_n^2 \cup \Gamma_n^3$, $\Gamma_n^1 = \{3\} \times (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_n^2 = (0, 3) \times (0, 1) \times \{1\}$, $\Gamma_n^3 = (0, 3) \times \{0, 1\} \times (0, 1)$:

$$\mathbf{p} = (p_x^1, 0, p_z^1) \text{ на } \Gamma_n^1, \quad \mathbf{p} = (0, 0, p_z^2) \text{ на } \Gamma_n^2, \quad \mathbf{p} = (0, 0, 0) \text{ на } \Gamma_n^3,$$

где $p_x^1 = 10$ МПа, $p_z^1 = 20$ МПа, $p_z^2 = -30$ МПа (см. фиг. 1). Объемные силы брались $\mathbf{f} = (0, 0, 0)$, коэффициент трения $\mathcal{F} = 0.3$ и параметр алгоритма Удзавы $r = 10^8$ (для больших r алгоритм эффективней).

Тело разбивается на $3N_d \times N_d \times N_d$ 8-узловых кубических конечных элементов, где N_d варьируется для получения задач с разными размерами. Число степеней свободы для перемещений равно $n_p = 3(3N_d + 1)(N_d + 1)(N_d + 1)$, а количество двойственных переменных равно $n_d = (3N_d + 1)(N_d + 1)$. Матрица жесткости A была соответствующим образом модифицирована для применения граничных условий закрепления тела на Γ_d . Во всех рассматриваемых ниже численных экспериментах мы выбираем

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\|}{\|\mathbf{x}^{(i+1)}\|} < 10^{-8}$$



Фиг. 1. Геометрия области и нагрузка.

как критерий остановки для метода проксимального градиента. Для ускорения вычислений в качестве стартового значения в данном методе можно использовать вектор перемещений, полученный на предыдущем шаге метода Удзавы или $\mathbf{0}$, если шаг первый. Алгоритм Удзавы и метод последовательных приближений завершаются, если

$$\frac{\|\mathbf{l}^{(k+1)} - \mathbf{l}^{(k)}\|}{\|\mathbf{l}^{(k+1)}\|} < 10^{-6}, \quad \frac{\|\mathbf{g}^{(r+1)} - \mathbf{g}^{(r)}\|}{\|\mathbf{g}^{(r+1)}\|} < 10^{-6},$$

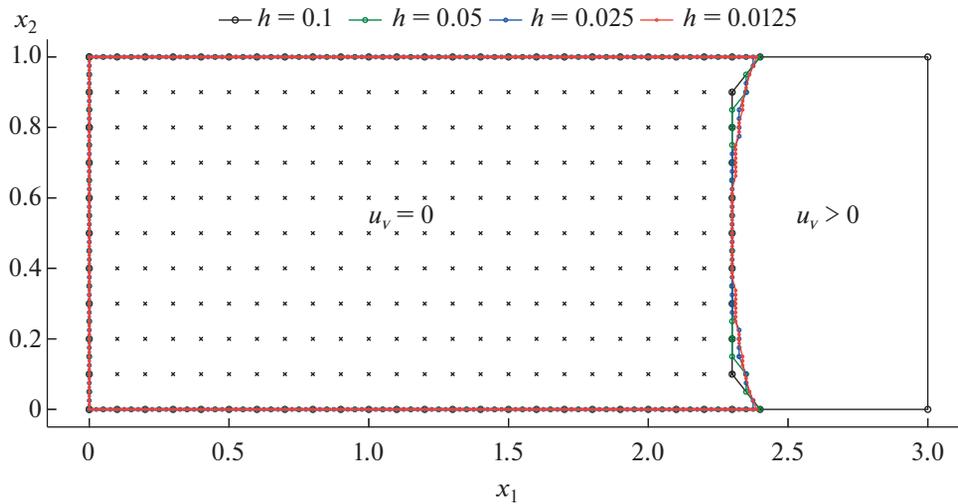
где $\mathbf{l}^{(k)}, \mathbf{g}^{(r)} \in \mathbb{R}^{n_d}$ – векторы, компонентами которых являются значения двойственной переменной и заданной нормальной силы в контактных узлах, а $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму. В качестве стартовых используем $\mathbf{l}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Все эксперименты реализованы на Python с использованием библиотеки scikit-fem ver. 7.0.0 [16] для дискретизации с помощью метода конечных элементов. Для выполнения быстрых операций с векторами и разреженными матрицами использовались библиотеки SciPy, Numpy и CuPy для вычислений с ускорением на GPU. Расчет производился на сервере IBM Power Systems S822LC (8335-GTB), в основе которого два процессора IBM POWER8 с рабочей частотой 4.023 ГГц и два GPU-ускорителя NVIDIA Tesla P100.

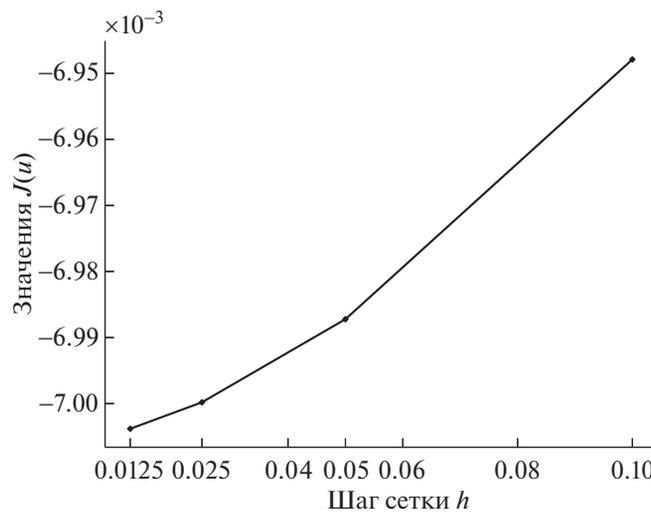
В табл. 1 представлены результаты для различных значений n_p и n_d . Здесь “Итер. по \mathbf{g} ” – число итераций метода последовательных приближений, “Итер. по \mathbf{l} ” – среднее число итераций метода Удзавы для решения вспомогательной задачи с заданным трением, “Итер. по \mathbf{x} ” – количество итераций метода проксимального градиента на первом шаге метода Удзавы (вычислительно наиболее затратный), “Время, с” – время вычислений, указанное в секундах. Можно видеть, что количество “Итер. по \mathbf{l} ”, “Итер. по \mathbf{x} ” немного увеличивается с увеличением количества прямых и двойственных переменных, что иллюстрирует стабильное поведение алгоритмов при уменьшении шага сетки. Причем число итераций метода последовательных приближений не меняется для всех размеров сетки и в данном примере равно 8. Расчеты показывают, что количество “Итер. по \mathbf{g} ” растет с увеличением значения коэффициента трения.

Таблица 1. Количество итераций и время решения для различных сеток

N_d	n_p	n_d	Итер. по \mathbf{x}	Итер. по \mathbf{l}	Итер. по \mathbf{g}	Время, с
10	11 253	341	17 663	5	8	130.22
20	80 703	1281	19 548	10	8	530.85
40	610 203	4961	27 917	14	8	4570.73
80	4 743 603	19 521	45 145	17	8	71 066.04



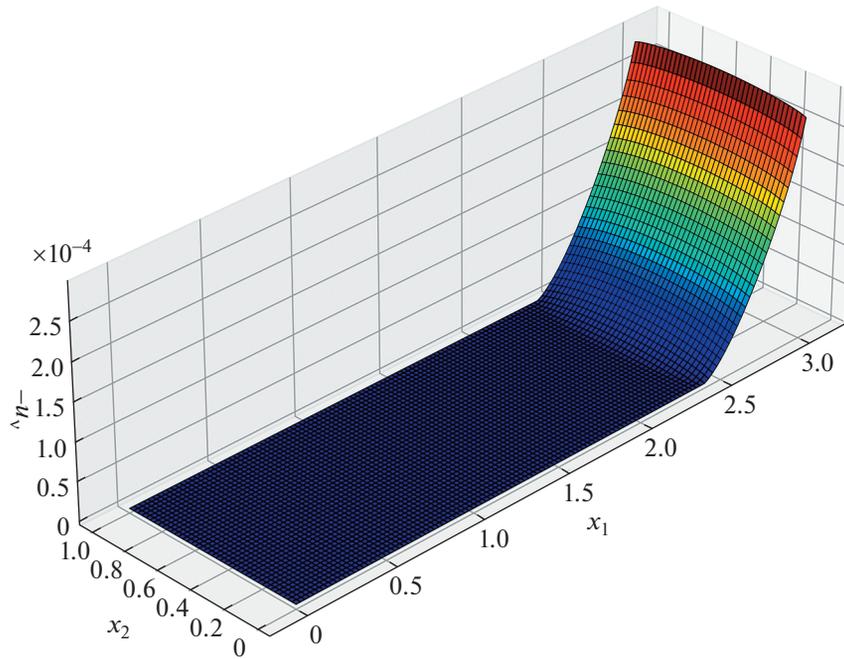
Фиг. 2. Зона сцепления на Γ_c .



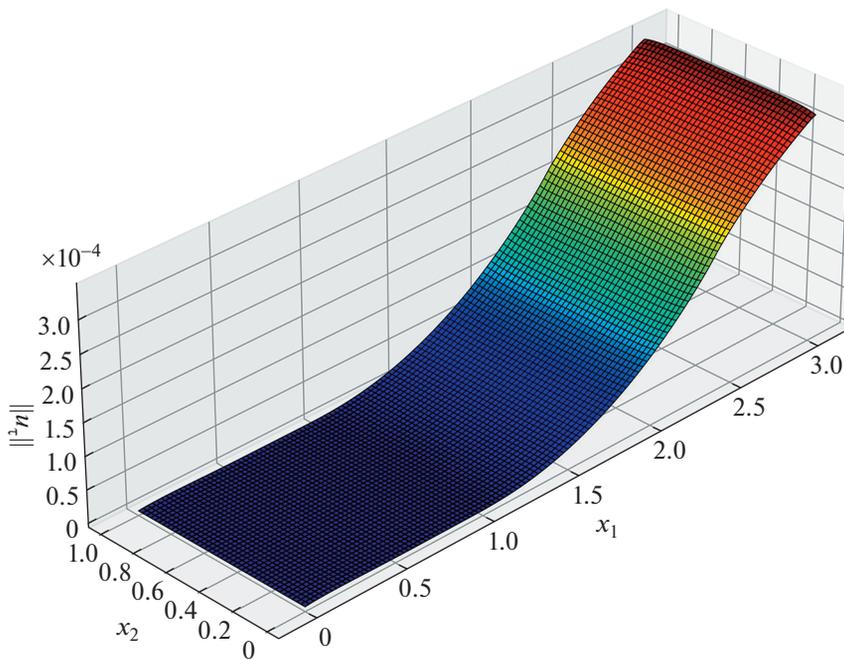
Фиг. 3. Значения функционала $J(\mathbf{u})$.

Численные решения при уменьшении шага сетки $h = 1/N_d$ сравнивались по значениям функционала потенциальной энергии $J(\mathbf{u})$ и зоне сцепления тела с абсолютно жесткой опорой на Γ_c . На фиг. 2 видно, что множества точек, в которых происходит контакт ($u_v = 0$), расположены близко друг к другу и стабилизируются при уменьшении h . На фиг. 3 мы наблюдаем сходимость значений функционала потенциальной энергии $J(u)$. На фиг. 4 и 5 представлены графики функций $-u_v$, $\|\mathbf{u}_\tau\|$ на Γ_c . Можно наблюдать, что выполнение условия непроникания тела в опору, так как $-u_v \geq 0$.

График силы трения $\mathcal{F}[\sigma_v(\mathbf{u})]$ представлен на фиг. 6. В зоне сцепления сила трения больше нуля, причем при приближении к границам Γ_c нормальное напряжение возрастает. Результирующие деформации тела с увеличивающимся коэффициентом $\chi + 500\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и напряжениями по Мизесу показаны на фиг. 7.



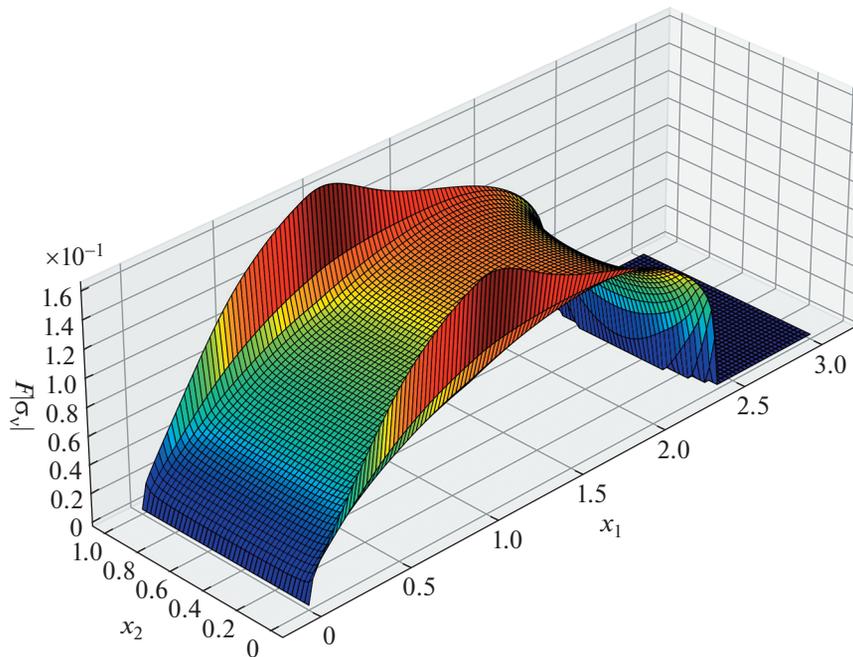
Фиг. 4. Нормальные перемещения на Γ_c .



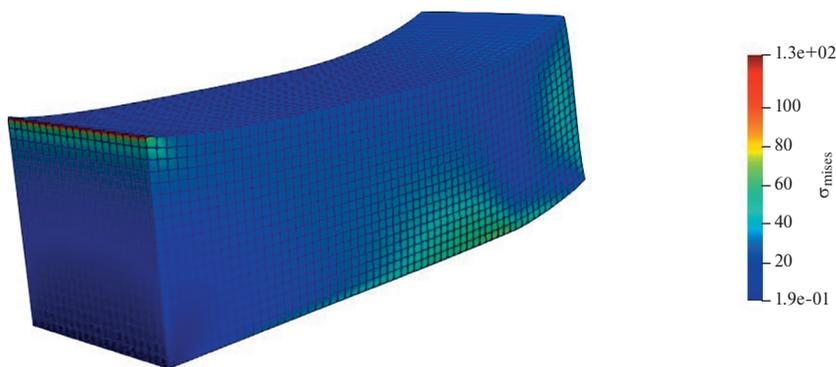
Фиг. 5. Евклидова норма тангенциальных перемещений на Γ_c .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был рассмотрен численный алгоритм решения 3D контактной задачи с кулоновским трением. Алгоритм основан на модифицированной схеме двойственности, позволяющей эффективно решать вспомогательные задачи с заданным трением совместно с методом последовательных приближений. Использование модифицированных функционалов Лагранжа поз-



Фиг. 6. Сила трения на Γ_c .



Фиг. 7. Результирующие деформации тела Ω .

воляет доказать сходимость метода последовательных приближений к неподвижной точке отображения Φ , которое каждому g ставится в соответствие функционал $-\sigma_v(\mathbf{u}(g))$. Дифференциальные свойства модифицированного двойственного функционала позволяют реализовать эффективный градиентный метод решения двойственной задачи. После дискретизации задачи был применен ускоренный вариант метода проксимального градиента для решения задачи минимизации кусочно-квадратичного функционала. Для иллюстрации работы алгоритма представлены численные эксперименты.

Для выполнения расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП “Центр данных ДВО РАН” [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hlavaček I., Haslinger Ya., Nečas I., Lovišek Ya.* Numerical solution of variational inequalities. New York: Springer-Verlag, 1988.
2. *Kikuchi N., Oden J.T.* Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. Philadelphia: SIAM, 1988.

3. *Namm R., Tsoy G.* A modified duality scheme for solving a 3D elastic problem with a crack // *Commun. Comput. Inf. Sci.* 2019. V. 1090. P. 536–547.
4. *Намм Р.В., Цой Г.И.* Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2017. Т. 20. № 1. С. 47–58.
5. *Namm R., Tsoy G.* Modified duality methods for solving an elastic crack problem with Coulomb friction on the crack faces // *Open Comput. Sci.* 2020. V. 10. № 1. P. 276–282.
6. *Вихтенко Э.М., Намм Р.В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 12. С. 2023–2036.
7. *Namm R., Tsoy G., Vikhtenko E., Woo G.* Variational method for solving contact problem of elasticity // *CEUR Workshop Proc.* 2021. V. 2930. P. 98–105.
8. *Вихтенко Э.М., Максимова Н.Н., Намм Р.В.* Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2014. Т. 17. № 1. С. 43–52.
9. *Haslinger J., Kučera R., Dostal Z.* An algorithm for the numerical realization of 3D contact problems with Coulomb friction // *J. Comput. Appl. Math.* 2004. V. 164–165. P. 387–408.
10. *Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J.* Variational and quasi-variational inequalities in mechanics. Dordrecht: Springer, 2007.
11. *Haslinger J., Kučera R., Vlach O., Baniotopoulos C.C.* Approximation and numerical realization of 3D quasistatic contact problems with Coulomb friction // *Math. Comput. Simul.* 2012. V. 82. P. 1936–1951.
12. *Glowinski R.* Numerical methods for nonlinear variational problems. New York: Springer, 1984.
13. *Trémoières R., Lions J.-L., Glowinski R.* Numerical analysis of variational inequalities. Amsterdam: North-Holland, 1981.
14. *Namm R.V., Tsoy G.I.* Solution of the static contact problem with Coulomb friction between an elastic body and a rigid foundation // *J. Comput. Appl. Math.* 2023. V. 419. P. 114725.
15. *Beck A., Teboulle M.* A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems // *SIAM J. Imaging Sciences.* 2009. V. 2. P. 183–202.
16. *Gustafsson T., McBain G.D.* scikit-fem: A Python package for finite element assembly // *J. Open Source Softw.* 2020. V. 5. № 5. P. 2369.
17. *Сорокин А.А., Макогонов С.В., Королев С.П.* Информационная инфраструктура для коллективной работы ученых Дальнего Востока России // *Научно-техническая информация. Серия 1: Организация и методика информационной работы.* 2017. № 12. С. 14–16.