

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.956

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА
ПО ОТЫСКАНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ
ИНТЕГРАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ**

© 2023 г. К. Б. Сабитов^{1,2,*}

¹ 450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики
с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия

² 453103 Стерлитамак, пр-т Ленина, 49, Стерлитамакский филиал
Уфимского университета науки и технологии, Россия

*e-mail: sabitov_fmj@mail.ru

Поступила в редакцию 07.01.2023 г.
Переработанный вариант 25.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Приводятся постановки обратных задач для уравнения Гельмгольца по отысканию его правой части с дополнительным интегральным условием типа Самарского–Ионкина и обоснование их корректности в смысле Адамара в классе регулярных решений. Единственность решений поставленных задач доказана на основании интегральных тождеств. Методами разделенных переменных и интегральных уравнений решения задач построены в явном виде. Библ. 19.

Ключевые слова: уравнение эллиптического типа, обратные задачи, интегральное условие, метод интегральных тождеств, единственность, существование, ряд, интегральное уравнение, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0044466923070141, **EDN:** VTCYGA

1. ВВЕДЕНИЕ

В области $D = \{(x, y) | 0 < x < l, 0 < y < \beta\}$ рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$\mathcal{L}u(x, y) \equiv u_{xx} + u_{yy} - b(x, y)u = F(x, y) = f(x)g(y), \quad (1)$$

где $b(x, y)$ – заданная в области D функция, и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти пару функций $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D), \quad (2)$$

$$f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l), \quad (3)$$

$$\mathcal{L}u(x, y) \equiv F(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (4)$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \beta, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, \beta) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

$$\int_0^\beta u(x, y)g(y)dy = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $h(0) = h(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, запись $f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$ означает, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(0, l)$ и интегрируема по модулю на $[0, l]$.

Задача 2. Найти функции $u(x, y)$ и $g(y)$, удовлетворяющие условиям (2), (4)–(6) и, кроме того,

$$g(y) \in C(0, \beta) \cap L(0, \beta), \quad (8)$$

$$\int_0^l u(x, y) f(x) dx = \chi(y), \quad 0 \leq y \leq \beta, \quad (9)$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$ и $\chi(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $h(0) = h(l) = \varphi(0) = \varphi(l) = 0$,

$$\int_0^l h(x) f(x) dx = \chi(\beta), \quad \int_0^l \varphi(x) f(x) dx = \chi(0). \quad (10)$$

Целью настоящей работы являются постановка обратных задач для эллиптического уравнения по определению его правой части в прямоугольной области и обоснование их корректности в классе классических решений. В известных монографиях [1–10] и других работах единственности решения обратных задач устанавливается исходя из построения явного решения прямой задачи с дальнейшим применением метода последовательных приближений или с применением теории прямых и обратных спектральных задач, или переходя к прямой задаче для более сложного дифференциального уравнения с нагруженными слагаемыми (см. [11]).

В настоящей статье, следуя работе [12], где впервые для эволюционных уравнений установлены теоремы единственности и устойчивости решений обратных задач определения правой части по финальному наблюдению, методом интегральных тождеств установлены теоремы единственности решения обратных задач 1 и 2 для уравнения (1) по определению правой части и в случае, когда $b(x, y) = \text{const}$, методами разделения переменных и интегральных уравнений Фредгольма решения поставленных задач построены в явном виде.

Отметим, что в [13] для операторного уравнения второго порядка

$$u''(t) - Au(t) = \Phi(t)p, \quad 0 < t < T, \quad (11)$$

что соответствует эллиптическому случаю, изучается обратная задача по определению пары $(u(t), p)$ по следующим граничным условиям:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u(T) = u_2, \quad (12)$$

где $u(t) \in C^2([0, T]; H)$, $p \in H$, H – банаховое пространство, A – оператор, который действует в H , линейен, замкнут и имеет плотную область определения $D(A)$, $\Phi(t)$ – известная функция. Здесь при условии, когда H – гильбертово, оператор A самосопряжен и положительно определен и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$, $\Phi(0) \neq 0$, и функция $\Phi(t)$ не меняет знака на $[0, T]$. Доказано, что обратная задача (11) и (12) имеет единственное решение в указанном выше классе.

В [14] изучена такая же обратная задача, где вместо $u(T) = u_2$ дополнительным условием является значение решения во внутренней точке интервала $(0, T)$. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи.

В [15], [16] изучена обратная задача для эллиптических уравнений по определению их правой части в более общей постановке, чем задача 1. Здесь в качестве дополнительного условия задан след решения прямой задачи на отрезке внутри прямоугольной области. В [15] для уравнения Пуассона доказаны теоремы существования и единственности при достаточно жестких ограничениях на заданные функции и прямоугольную область. В [16] для уравнения Гельмгольца показана справедливость альтернативы Фредгольма задачи типа 1. В указанных выше работах (и других) решения поставленных задач не построены в явном виде в классе функций (2) и (3).

Введение дополнительных интегральных условий в виде (7) и (9) типа Самарского–Ионкина (см. [17]) вместо финального условия позволяет установить напрямую единственность решения и построить решение в явном виде.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ 1 И 2

Теорема 1. Пусть $b(x, y) \in C(D) \cap L(D)$, $b(x, y) \geq 0$ в D и $g(y) \in C(0, \beta) \cap L(0, \beta)$ и $g(y) \neq 0$ на $(0, \beta)$. Тогда если существует решение обратной задачи (2)–(7), то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ и $f(x)$ – решение однородной задачи 1, где $\varphi(x) = h(x) = \psi(x) \equiv 0$. В области D рассмотрим тождество

$$u\mathcal{L}u \equiv (uu_x)_x + (uu_y)_y - u_x^2 - u_y^2 - b(x, y)u^2 = uf(x)g(y). \tag{13}$$

Проинтегрируем тождество (13) по области $D_{\varepsilon, \delta} = \{(x, y) | \varepsilon < x < l - \varepsilon, \delta < y < \beta - \delta\}$, где ε и δ – достаточно малые положительные постоянные. Затем, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$, получим

$$\int_D (u_x^2 + u_y^2 + b(x, y)u^2) dx dy = - \int_D uf(x)g(y) dx dy = - \int_0^l f(x) \left(\int_0^\beta u(x, y)g(y) dy \right) dx = 0. \tag{14}$$

Отсюда при условии $b(x, y) \geq 0$ в D следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D . Тогда из уравнения (1) при $g(y) \neq 0$ уже вытекает, что $f(x) \equiv 0$.

Теорема 2. Пусть $b(x, y) \in C(D) \cap L(D)$, $b(x, y) \geq 0$ в D и $f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$ и $f(x) \neq 0$ на $(0, l)$. Тогда если существует решение обратной задачи 2, то оно единственно.

Справедливость данного утверждения следует из равенства (14), где правая часть имеет вид

$$- \int_D uf(x)g(y) dy = - \int_0^\beta g(y) \left(\int_0^l u(x, y)f(x) dx \right) dy = 0.$$

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В дальнейшем установим теоремы существования решений задач 1 и 2, когда $b(x, y) = \text{const} = b \geq 0$. В постановках обратных задач 1 и 2 прямой задачей является задача Дирихле, т.е. задача (2), (4)–(6). В [18] методом разделения переменных доказана следующая

Теорема 3. Если $b(x, y) \equiv \text{const} = b \geq 0$, $\varphi(x)$, $h(x) \in C^3[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(l) = \varphi'(l) = 0$, $h(0) = h'(0) = h(l) = h'(l) = 0$, $F(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C_x^1(\bar{D})$, $F(0, y) = F(l, y) = 0$, $0 \leq y \leq \beta$, то существует единственное и устойчивое решение задачи (2), (4)–(6) и оно определяется формулой

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)X_k(x), \tag{15}$$

где

$$u_k(y) = \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{1}{2\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} [F_{1k}(0) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + F_{2k}(\beta) \text{sh } \lambda_k y] - \frac{1}{2\lambda_k} (F_{1k}(y) + F_{2k}(y)), \tag{16}$$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l},$$

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \quad h_k = \int_0^l h(x) X_k(x) dx,$$

$$F_{1k}(y) = \int_y^\beta F_k(t) e^{-\lambda_k(t-y)} dt, \quad F_{2k}(y) = \int_0^y F_k(t) e^{-\lambda_k(y-t)} dt,$$

$$F_k(y) = \int_0^l F(x, y) X_k(x) dx, \quad \lambda_k^2 = \mu_k^2 + b.$$

В дальнейшем будем считать, что $\mu_k^2 + b > 0$ при всех $k \geq 1$, так как если $b < 0$, то, начиная с некоторого номера k_0 , все $\mu_k^2 + b > 0$.

При $F(x, y) = f(x)g(y)$ функции $F_{1k}(y)$ и $F_{2k}(y)$ принимают вид

$$F_{1k}(y) = f_k g_{1k}(y), \quad F_{2k}(y) = f_k g_{2k}(y),$$

$$g_{1k}(y) = \int_y^\beta g(t) e^{-\lambda_k(t-y)} dt, \quad g_{2k}(y) = \int_0^y g(t) e^{-\lambda_k(y-t)} dt, \quad (17)$$

$$f_k = \int_0^l f(x) X_k(x) dx.$$

Теперь функцию (15) удовлетворим нелокальному условию (7):

$$\int_0^\beta \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x) g(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \int_0^\beta g(y) u_k(y) dy = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x), \quad (18)$$

где

$$\psi_k = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx.$$

Тогда из равенства (18) получим равенство для нахождения коэффициентов f_k :

$$\int_0^\beta g(y) u_k(y) dy = \psi_k, \quad (19)$$

где функция (16) с учетом (17) примет вид

$$u_k(y) = \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{f_k}{2\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} (g_{1k}(0) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + g_{2k}(\beta) \text{sh } \lambda_k y) -$$

$$- \frac{f_k}{2\lambda_k} (g_{1k}(y) + g_{2k}(y)). \quad (20)$$

Используя формулу (20), вычислим интеграл

$$\int_0^\beta g(y) u_k(y) dy = \frac{\varphi_k}{\text{sh } \lambda_k \beta} \int_0^\beta g(y) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) dy + \frac{h_k}{\text{sh } \lambda_k \beta} \int_0^\beta g(y) \text{sh } \lambda_k y dy +$$

$$+ \frac{f_k}{2\lambda_k} \left[\frac{g_{1k}(0)}{\text{sh } \lambda_k \beta} \int_0^\beta g(y) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) dy + \frac{g_{2k}(\beta)}{\text{sh } \lambda_k \beta} \int_0^\beta g(y) \text{sh } \lambda_k y dy - \int_0^\beta g(y) [g_{1k}(y) + g_{2k}(y)] dy \right]. \quad (21)$$

Если $g(y) \equiv 1$, то равенство (21) принимает вид

$$\int_0^\beta u_k(y) dy = \varphi_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} +$$

$$+ \frac{f_k}{2\lambda_k} \left[g_{1k}(0) \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + g_{2k}(\beta) \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} - \frac{2}{\lambda_k} \left(\beta - \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k} \right) \right] =$$

$$= \varphi_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{f_k}{\lambda_k^2} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k} \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k} - \beta \right] =$$

$$= \varphi_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{ch } \lambda_k \beta - 1}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{f_k}{\lambda_k^2} \left[\frac{2(\text{ch } \lambda_k \beta - 1)}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k \beta} - \beta \right] =$$

$$= (\varphi_k + h_k) \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} + \frac{f_k}{\lambda_k^2} \left(\frac{2}{\lambda_k} \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{1 + e^{-\lambda_k \beta}} - \beta \right). \quad (22)$$

С учетом вычисленного интеграла (22) равенство (19) примет вид

$$\frac{f_k}{\lambda_k^2} \left(\frac{2}{\lambda_k} \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{1 + e^{-\lambda_k \beta}} - \beta \right) = \psi_k - (\varphi_k + h_k) \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})}. \tag{23}$$

Отсюда находим неизвестные коэффициенты

$$f_k = \frac{\lambda_k^2}{\Delta_k(\beta)} \left[\psi_k - (\varphi_k + h_k) \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} \right], \tag{24}$$

где

$$\Delta_k(\beta) = \frac{2}{\lambda_k} \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{1 + e^{-\lambda_k \beta}} - \beta. \tag{25}$$

В силу теоремы единственности выражение (25) не равно нулю при всех $k \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $\varphi(x) \equiv h(x) = \psi(x) \equiv 0$. Тогда все $\varphi_k = h_k = \psi_k \equiv 0$. Если при некотором $k = m \in \mathbb{N}$ выражение $\Delta_m(\beta) = 0$, то из равенства (23) следует, что f_m — произвольная постоянная, вообще говоря, не равная нулю. Тогда обратная задача 1 с нулевыми граничными условиями при $g(y) = 1$ имеет ненулевое решение

$$f(x) = f_m \sin \frac{\pi m}{l} x,$$

$$u(x, y) = \frac{f_m}{2\lambda_m^2} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_m \beta}}{\text{sh } \lambda_m \beta} (\text{sh } \lambda_m (\beta - y) + \text{sh } \lambda_m y) + e^{-\lambda_m (\beta - y)} + e^{-\lambda_m y} - 2 \right] \sin \frac{\pi m}{l} x.$$

Далее, найденные значения f_k по формуле (24) подставим в (20). Тогда имеем

$$u_k(y) = \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k (\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{\lambda_k}{2\Delta_k(\beta)} \left[\psi_k - (\varphi_k + h_k) \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} \right] \times \tag{26}$$

$$\times \left[g_{1k}(0) \frac{\text{sh } \lambda_k (\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + g_{2k}(\beta) \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} - g_{1k}(y) - g_{2k}(y) \right].$$

Поскольку при $g(y) = 1$

$$g_{1k}(0) = g_{2k}(\beta) = \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\lambda_k}, \quad g_{1k}(y) = \frac{1 - e^{-\lambda_k (\beta - y)}}{\lambda_k}, \quad g_{2k}(y) = \frac{1 - e^{-\lambda_k y}}{\lambda_k},$$

то равенство (26) примет вид

$$u_k(y) = \varphi_k \left[\frac{\text{sh } \lambda_k (\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} - \frac{\omega_k(y)}{\Delta_k(\beta) \lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} \right] + h_k \left[\frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} - \frac{\omega_k(y)}{2\Delta_k(\beta) \lambda_k (1 + e^{-\lambda_k \beta})} \right] + \psi_k \frac{\omega_k(y)}{\Delta_k(\beta)}, \tag{27}$$

где

$$\omega_k(y) = \frac{1 - e^{-\lambda_k \beta}}{\text{sh } \lambda_k \beta} (\text{sh } \lambda_k (\beta - y) + \text{sh } \lambda_k y) + e^{-\lambda_k (\beta - y)} + e^{-\lambda_k y} - 2. \tag{28}$$

При этом функция $\omega_k(y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega_k(0) = \omega_k(\beta) = 0, \quad \int_0^\beta \omega_k(y) dy = 2\Delta(\beta), \quad \omega_k''(y) = \lambda_k^2 (\omega_k(y) + 2).$$

Теперь решение обратной задачи 1 определяется рядами

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x), \tag{29}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \tag{30}$$

где $u_k(y)$ и f_k определены соответственно формулами (27) и (24).

Для коэффициентов $u_k(y)$ и f_k справедливы следующие оценки.

Лемма 1. При любом $y \in [0, \beta]$ имеют место оценки

$$|u_k(y)| \leq C_1 (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|), \tag{31}$$

$$|u_k''(y)| \leq C_2 \lambda_k^2 (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|), \tag{32}$$

$$|f_k(y)| \leq C_3 \lambda_k^2 (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|),$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость этих оценок непосредственно следует из формул (27) и (24) в силу ограниченности выражений (25) и (28):

$$0 < C_4 < |\Delta_k(\beta)| \leq C_5, \quad |\omega_k(y)| \leq C_6.$$

На основании леммы 1 ряд (29) и его производные до второго порядка включительно на замкнутой области \bar{D} и ряд (30) на $[0, l]$ мажорируются числовым рядом

$$C_7 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|). \tag{33}$$

Теорема 4. Если $b(x, y) \equiv \text{const} = b \geq 0$, $\varphi(x), h(x), \psi(x) \in C^3[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0$, $h(0) = h''(0) = h(l) = h''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi''(0) = \psi(l) = \psi''(l) = 0$, $g(y) \equiv 1$, то существует единственное решение обратной задачи (2)–(7) и оно определяется суммами рядов (29) и (30) при этом $u(x, y) \in C^2(\bar{D})$ и $f(x) \in C[0, l]$.

Доказательство. В силу наложенных на функции $\varphi(x)$, $h(x)$ и $\psi(x)$ условий коэффициенты φ_k , h_k и ψ_k их разложения в ряд Фурье по системе $X_k(x)$ на сегменте $[0, l]$ можно представить в виде

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad h_k = \frac{h_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(3)}}{\mu_k^3},$$

где

$$\varphi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'''(x) \cos \mu_k x dx, \quad h_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h'''(x) \cos \mu_k x dx,$$

$$\psi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'''(x) \cos \mu_k x dx,$$

при этом справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2 \leq \|\varphi'''\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |h_k^{(3)}|^2 \leq \|h'''\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(3)}|^2 \leq \|\psi'''\|_{L_2(0,l)}^2.$$

Тогда числовой ряд (33) мажорируется сходящимся рядом

$$C_8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(3)}| + |h_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}|).$$

В силу этого ряды (29) и (30) сходятся абсолютно и равномерно на \bar{D} и $[0, l]$ соответственно, при этом ряд (29) допускает почленное дифференцирование дважды по x и y в \bar{D} . Покажем, что эти ряды удовлетворяют уравнению (4):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x, y) &\equiv u_{xx} + u_{yy} - bu = -\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^2 u_k(y) X_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k''(y) X_k(x) - b \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y) X_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[u_k''(y) - (\mu_k^2 + b) u_k(y) \right] X_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k X_k(x) = f(x), \end{aligned}$$

так как на основании формулы (20)

$$u_k''(y) - (\mu_k^2 + b)u_k(y) = f_k.$$

Устойчивость решения задачи 1 от заданных функций $\varphi(x)$, $h(x)$ и $\psi(x)$ устанавливается следующим утверждением.

Теорема 5. Для решения задачи (2)–(7) при $b(x, y) \equiv \text{const} = b \geq 0$ имеют место оценки

$$\|u(x, y)\|_{L_2(0,l)} \leq C_9 (\|\varphi\|_{L_2(0,l)} + \|h\|_{L_2(0,l)} + \|\psi\|_{L_2(0,l)}), \quad 0 \leq y \leq \beta, \tag{34}$$

$$\|f(x)\|_{L_2(0,l)} \leq C_{10} (\|\varphi''\|_{L_2(0,l)} + \|h''\|_{L_2(0,l)} + \|\psi''\|_{L_2(0,l)}), \tag{35}$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} \leq C_{11} (\|\varphi'\|_{C[0,l]} + \|h'\|_{C[0,l]} + \|\psi'\|_{C[0,l]}), \tag{36}$$

$$\|f(x)\|_{C[0,l]} \leq C_{12} (\|\varphi'''\|_{C[0,l]} + \|h'''\|_{C[0,l]} + \|\psi'''\|_{C[0,l]}). \tag{37}$$

Доказательство. В силу оценки (31) на основании формулы (29) имеем

$$\|u(x, y)\|_{L_2(0,l)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(y) \leq 3C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^2 + h_k^2 + \psi_k^2) \leq 3C_1^2 (\|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|h\|_{L_2(0,l)}^2 + \|\psi\|_{L_2(0,l)}^2).$$

Отсюда следует оценка (34).

Пусть (x, y) – произвольная точка из области \bar{D} . Тогда из формулы (29) с учетом оценки (31) будем иметь

$$|u(x, y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|). \tag{38}$$

Далее, используя представления

$$\varphi_k = \frac{\Phi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad h_k = \frac{h_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \psi_k = \frac{\Psi_k^{(1)}}{\mu_k},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'(x) \cos \mu_k x dx, & h_k^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h'(x) \cos \mu_k x dx, \\ \Psi_k^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'(x) \cos \mu_k x dx, \end{aligned}$$

и неравенство Коши–Буняковского из (38), получим

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \tilde{C}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} |\Phi_k^{(1)}| + \frac{1}{k} |h_k^{(1)}| + \frac{1}{k} |\Psi_k^{(1)}| \right) \leq \\ &\leq \tilde{C}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Phi_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Psi_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \right] \leq \\ &\leq \tilde{C}_2 (\|\varphi'\|_{L_2(0,l)} + \|h'\|_{L_2(0,l)} + \|\psi'\|_{L_2(0,l)}) \leq C_{11} (\|\varphi'\|_{C[0,l]} + \|h'\|_{C[0,l]} + \|\psi'\|_{C[0,l]}), \end{aligned}$$

где \tilde{C}_i – здесь и далее положительные постоянные. Тем самым установлена справедливость оценки (36).

Аналогично доказываются оценки (35) и (37).

Если $g(y) \neq 1$, то в условиях теоремы 1 функция $g(y) \neq 0$ на $(0, \beta)$. Поэтому при $g(y) \in C[0, \beta]$ можно считать, что $g(y) \geq g_0 = \text{const} > 0$. В этом случае функции $g_{1k}(y)$ и $g_{2k}(y)$ можно представить в виде

$$g_{1k}(y) = g(\xi) \int_y^\beta e^{-\lambda_k(t-y)} dt = g(\xi) \frac{1 - e^{-\lambda_k(\beta-y)}}{\lambda_k},$$

$$g_{2k}(y) = g(\eta) \int_0^y e^{-\lambda_k(y-t)} dt = g(\eta) \frac{1 - e^{-\lambda_k y}}{\lambda_k},$$

где $y < \xi < \beta$, $0 < \eta < y$. Тогда аналогично устанавливается справедливость теорем 4 и 5.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

Далее докажем существование и устойчивость решения задачи 2. Решение задачи Дирихле (15) удовлетворим нелокальному условию (9). В результате получим

$$\int_0^l u(x, y) f(x) dx = \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) f_k = \chi(y). \quad (39)$$

В равенство (39) подставим выражение (20). Предварительно его преобразуем к виду

$$u_k(y) = \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \frac{f_k}{2\lambda_k} \int_0^\beta g(t) E_k(t, y) dt, \quad (40)$$

где

$$E_k(t, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda_k t} \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + e^{-\lambda_k(\beta-t)} \text{sh } \lambda_k y - e^{-\lambda_k(y-t)}}{\text{sh } \lambda_k \beta}, & 0 \leq t \leq y, \\ \frac{e^{-\lambda_k t} \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + e^{-\lambda_k(\beta-t)} \text{sh } \lambda_k y - e^{-\lambda_k(t-y)}}{\text{sh } \lambda_k \beta}, & t \geq y. \end{cases}$$

Тогда равенство (39) принимает вид

$$\int_0^\beta g(t) H(t, y) dt = d(y), \quad (41)$$

где

$$H(t, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^2}{2\lambda_k} E_k(t, y),$$

$$d(y) = \chi(y) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + \varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} \right),$$

т.е. относительно неизвестной функции $g(y)$ получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода (41), которое трудно разрешимо.

В силу наложенных условий относительно функций $\varphi(x)$, $h(x)$ и $f(x)$ в теореме 3 при исследовании прямой задачи Дирихле ядро $H(t, y)$ и правая часть $d(y)$ уравнения (39) дважды непрерывно дифференцируемы по y в областях определения.

Попытаемся получить относительно $g(y)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Для этого дважды продифференцируем равенство (20):

$$u_k''(y) = \lambda_k^2 \left(\varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} \right) + \frac{\lambda_k f_k}{2 \text{sh } \lambda_k \beta} (g_{1k}(0) \text{sh } \lambda_k(\beta - y) + g_{2k}(\beta) \text{sh } \lambda_k y) - \frac{f_k}{2 \lambda_k} [-2 \lambda_k g(y) + \lambda_k^2 (g_{1k}(y) + g_{2k}(y))] = \lambda_k^2 u_k(y) + f_k g(y). \tag{42}$$

Тогда из равенства (39) с учетом (42) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k''(y) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^2 f_k u_k(y) + f_k^2 g(y)] = \chi''(y).$$

Отсюда с учетом (40) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 g(y) + \int_0^{\beta} K(t, y) g(t) dt = \chi''(y) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k \left(\varphi_k \frac{\text{sh } \lambda_k(\beta - y)}{\text{sh } \lambda_k \beta} + h_k \frac{\text{sh } \lambda_k y}{\text{sh } \lambda_k \beta} \right) = d''(y), \tag{43}$$

где

$$K(t, y) = \frac{\partial^2 H(t, y)}{\partial y^2} = \infty \sum_{k=1} \frac{\lambda_k f_k^2}{2} E_k(t, y).$$

По условию теоремы 2 функция $f(x) \neq 0$ на $(0, l)$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \int_0^l f^2(x) dx = \|f\|_{L_2}^2 > 0.$$

Следовательно, интегральное уравнение (43) является уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Тогда поскольку в силу теоремы единственности 2 соответствующее однородное интегральное уравнение

$$g(y) + \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2} \int_0^l K(t, y) g(t) dt = 0$$

имеет только нулевое решение, то по альтернативе Фредгольма (см. [19], с. 479) интегральное уравнение (43) имеет единственное и непрерывное на $[0, \beta]$ решение.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 6. Если функции $b(x, y) \equiv \text{const} = b \geq 0$ и $\varphi(x)$, $h(x)$ удовлетворяют теореме 3, функция $\chi(y) \in C^2[0, \beta]$, $f(x) \in C^1[0, l]$, $f(0) = f(l) = 0$, и выполнены условия (10), то существует единственное решение обратной задачи 2, при этом функция $g(y)$ определяется как решение интегрального уравнения (43), затем функция $u(x, y)$ – по формуле (15) как решение задачи Дирихле.

Теперь докажем следующее утверждение об устойчивости решения задачи 2.

Теорема 7. Для решения задачи 2 при $b(x, y) \equiv \text{const} = b \geq 0$ справедливы оценки

$$\|g(y)\|_{C[0, \beta]} \leq C_{13} (\|\varphi''\|_{C[0, l]} + \|h''\|_{C[0, l]} + \|\chi''\|_{C[0, \beta]}), \tag{44}$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} \leq C_{14} (\|\varphi\|_{C^2[0, l]} + \|h''\|_{C^2[0, l]} + \|\chi''\|_{C[0, \beta]}). \tag{45}$$

Доказательство. Решение интегрального уравнения (43) можно построить через резольвенту $R(y, t, \lambda)$ ядра $K(y, t)$ по формуле

$$g(y) = \bar{d}(y) + \lambda \int_0^{\beta} R(y, t, \lambda) \bar{d}(t) dt, \quad \lambda = \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2}, \quad \bar{d}(y) = \frac{d''(y)}{\|f\|_{L_2}^2}. \tag{46}$$

Поскольку λ не является характеристическим числом ядра $K(y, t)$, то резольвента $R(y, t, \lambda)$ при любом $\lambda > 0$ является непрерывной на квадрате $[0, \beta] \times [0, \beta]$ (см. [19], с. 460–469), поэтому она ограничена.

Предварительно при любом $y \in [0, \beta]$ с учетом представлений

$$f_k = \frac{1}{\mu_k} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f'(x) \cos \mu_k x dx = \frac{1}{\mu_k} f_k^{(1)},$$

$$\varphi_k = -\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^l \varphi''(x) X_k(x) dx = -\frac{1}{\mu_k^2} \varphi_k^{(2)},$$

$$h_k = -\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^l h''(x) X_k(x) dx = -\frac{1}{\mu_k^2} h_k^{(2)}$$

оценим функцию

$$|d''(y)| \leq |\chi''(y)| + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k| (|\varphi_k| + |h_k|) \leq |\chi''(y)| + \tilde{C}_3 \sum_{k=1}^{\infty} k (|\varphi_k| + |h_k|) x \leq$$

$$\leq |\chi''(y)| + \tilde{C}_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(2)}| + |h_k^{(2)}|) \leq |\chi''(y)| + \tilde{C}_5 (\|\varphi''\|_{L_2(0,l)} + \|h''\|_{L_2(0,l)}) \leq$$

$$\leq \tilde{C}_6 (\|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}).$$
(47)

Тогда из формулы (46) с учетом (47) имеем

$$|g(y)| \leq \tilde{C}_7 (\|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}).$$

Отсюда вытекает оценка (44).

Пусть $(x, y) \in \bar{D}$. Тогда из формул (15) и (20) будем иметь

$$|u(x, y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k| + |h_k| + \frac{f_k}{2\lambda_k} (|g_{1k}(0)| + |g_{2k}(\beta)| + |g_{1k}(y) + g_{2k}(y)|) \right] \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k| + |h_k| + \frac{|f_k|}{2\lambda_k^2} \|g(y)\|_{C[0,\beta]} \right] \leq \tilde{C}_8 (\|\varphi'\|_{L_2(0,l)} + \|h'\|_{L_2(0,l)} + \|g(y)\|_{C[0,\beta]}) \leq$$

$$\leq \tilde{C}_9 (\|\varphi'\|_{C[0,l]} + \|h'\|_{C[0,l]} + \|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}),$$

из которой уже получим оценку (45).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука СО, 1972. 164 с.
2. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. 88 с.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.
6. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. New-York: Springer, 2006. 358 p.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с. (изд. 2).
8. Дмитриев В.И. Обратные задачи геофизики. М.: Макс Пресс, 2012. 340 с.
9. Ягола А.Г., Янфей Ван, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. 216 с.
10. Ягола А.Г., Кочиков И.В., Курамышина Г.М., Пентин Ю.А. Обратные задачи колебательной спектроскопии. М.: Изд-во "Курс", 2017. 336 с. (изд. 2).
11. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 4. С. 694–716.
12. Romanov V., Hasanov A. Uniqueness and stability analysis of final data inverse source problems for evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2022. V. 30. № 3. P. 425–446.

13. *Орловский Д.Г.* Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 6. С. 1000–1009.
14. *Орловский Д.Г.* Обратная задача Дирихле для уравнения эллиптического типа // Дифференц. ур-ния. 2008. Т. 44. № 1. С. 119–128.
15. *Соловьев В.В.* Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 5. С. 862–871.
16. *Соловьев В.В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 8. С. 1365–1377.
17. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. ур-ния. 2010. Т. 46. № 10. С. 1468–1478.
18. *Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В.* К вопросу о корректности обратных задач для неоднородного уравнения Гельмгольца // Вестник Сам. гос. тех. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 269–292.
19. *Сабитов К.Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высш. школа, 2005. 671 с.