

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ УМЕРЕННО ДЛИННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ

© 2023 г. Х. Г. Умаров^{1,2,*}¹ 364061 Грозный, пр-т М. Эсамбаева, 13, АН Чеченской Республики, Россия² 364068 Грозный, ул. С. Кишиевой, 33, Чеченский государственный педагогический университет, Россия

*e-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.
Переработанный вариант 21.12.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения соболевского типа, моделирующего умеренно длинные продольные волны малой амплитуды в вязкоупругом стержне, исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций, заданных на всей числовой оси, для которых существуют пределы на бесконечности. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке. Библ. 11.

Ключевые слова: продольные волны в вязкоупругом стержне, нелинейные уравнения соболевского типа, глобальное решение, разрушения решения.

DOI: 10.31857/S0044466923070177, EDN: VTFKPL

ВВЕДЕНИЕ

Распространение умеренно длинных продольных волн малой амплитуды в вязкоупругом стержне с учетом дисперсии и диссипации моделируется [1, § 3.1, (3.1.16)], [2] нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных:

$$u_{tt} - \alpha u_{tx} + \beta u_{xx} - u_{txx} - u_{ttx} + \gamma u_{txxx} - \delta u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0, \quad (0.1)$$

$$(t, x) \in R_+^1 \times R^1, R_+^1 =]0, +\infty[, R^1 =]-\infty, +\infty[,$$

где $u = u(t, x)$ — продольная деформация; $u_y = \partial_y u = du/dy$ — символы дифференцирования по переменной y ; коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — неотрицательные постоянные. (Продольные волны называются умеренно длинными, если длина волны существенно больше характерного поперечного размера стержня.)

Неразрешенное относительно старшей временной производной уравнение (0.1) является уравнением соболевского типа с младшими в обобщенном смысле членами [3, гл. 2, § 2], получившимся из уравнения, выведенного в [2] и для которого рассмотрена задача Коши в [4], добавлением как старших: γu_{txxx} и δu_{xxxx} , так и младших: αu_{tx} и βu_{xx} , членов уравнения, что, как отмечается в [5], может существенно повлиять на разрешимость задачи Коши.

Задача Коши для уравнения (0.1) исследуется в пространстве $C[R^1]$ (см. [6, гл. VIII, § 1]) непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют оба предела при $x \rightarrow \pm\infty$ и норма которого $\|g_C\| = \sup_{x \in R^1} |g(x)|$, полагая, что начальные функции:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R^1, \quad (0.2)$$

и искомое классическое решение $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \bar{R}_+^1 \times R^1$, $\bar{R}_+^1 = [0, +\infty[$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C[R^1]$. (Под классическим решением понимается достаточно гладкая функ-

ция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка, и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.)

Пусть $C^{(k)}[R^1] = \{g(x) \in C[R^1]: g'(x), \dots, g^{(k)}(x) \in C[R^1]\}$, $k = 1, 2, \dots$, — подмножества дифференцируемых функций в пространстве $C[R^1]$. Напомним, что в пространстве $C[R^1]$ [6, гл. VIII, § 1], [7, § 2] дифференциальный оператор ∂_x с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}[R^1]$ порождает сжимающую сильно непрерывную группу $U(\tau; \partial_x)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 левых сдвигов: $U(\tau; \partial_x)g(x) = g(x + \tau)$, а оператор ∂_x^2 с областью определения $D(\partial_x^2) = C^{(2)}[R^1]$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t; \partial_x^2)$, $t \in \bar{R}_+^1$, класса C_0 : $U(t; \partial_x^2)g(x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x + \xi) d\xi$; причем для резольвент $R(\lambda; \partial_x) = (\lambda I - \partial_x)^{-1}$, $R(\lambda; \partial_x^2) = (\lambda I - \partial_x^2)^{-1}$ справедливы оценки $\|R(\lambda; \partial_x)\|, \|R(\lambda; \partial_x^2)\| \leq 1/\lambda$ при $\lambda > 0$.

Исследование задачи Коши (0.1), (0.2) проведем по следующей схеме: прежде чем приступить к установлению основных результатов статьи, убедимся, что постановка задачи Коши (0.1), (0.2) корректна и локальное по времени классическое решение ее существует. С этой целью 1) для соответствующего (0.1) линейного однородного уравнения, используя методы теории сильно непрерывных полугрупп операторов и косинус оператор-функций, найдем решение задачи Коши, отмечая используемые в дальнейшем оценки норм вспомогательных операторнозначных функций; и 2) для задачи Коши (0.1), (0.2) найдем временной отрезок $[0, t_1]$ существования и единственности классического решения и оценим норму в $C[R^1]$ этого локального решения. Далее, 3) предполагая, что классическое решение $u = u(t, x)$ уравнения (0.1) и его частная производная $u_t = u_t(t, x)$ для всех значений временной переменной на отрезке $t \in [0, t_1]$ по переменной x принадлежат пересечению пространства $C[R^1]$ с пространством Соболева $W_2^1(R^1)$:

$$u(t, x), u_t(t, x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1), \quad t \in [0, t_1]; \quad (0.3)$$

найдем условия существования глобального решения ($t \geq 0$), и разрушения на конечном временном отрезке решения задачи Коши (0.1), (0.2).

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (0.1):

$$(I - \partial_x^2)u_{tt} - (\alpha \partial_x + \partial_x^2 - \gamma \partial_x^3)u_t + (\beta \partial_x^2 - \delta \partial_x^4)u = 0. \quad (1.1)$$

Введем в уравнение (1.1) новую неизвестную функцию

$$v(t, x) = u(t, x) - u_{xx}(t, x), \quad (1.2)$$

полагая, что частные производные u_{xx} , u_{txx} непрерывны при $t \in \bar{R}_+^1$. Из замены (1.2), при условии, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}[R^1]$, можно единственным образом определить начальные значения функции $v = v(t, x)$: $v|_{t=0} = v_0(x) = \varphi(x) - \varphi''(x)$, $v_t|_{t=0} = v_1(x) = \psi(x) - \psi''(x)$, и, используя принадлежность положительной полуоси резольвентному множеству дифференциального оператора ∂_x^2 , выразить решение $u(t, x)$ уравнения (1.1) через новую неизвестную функцию $v(t, x)$:

$$u(t, x) = R(1; \partial_x^2)v(t, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} v(t, x + s) ds. \quad (1.3)$$

В результате замены (1.2) получим эквивалентное (1.1) интегродифференциальное уравнение

$$v_{tt} - Av_t + Bv = 0, \quad (1.4)$$

где $A = \gamma \partial_x - I + A_1$, $A_1 = A_{11} + A_{12}$, $A_{11} = c_1 R(1; \partial_x)$, $c_1 = \alpha - \gamma$, $A_{12} = c_2 R(1; \partial_x^2)$, $c_2 = 1 - c_1$, $D(A) = C^{(1)}[R^1]$; $B = \delta \partial_x^2 + B_1$, $B_1 = c_3 [-I + R(1; \partial_x^2)]$, $c_3 = \beta - \delta$, $D(B) = C^{(2)}[R^1]$.

Оператор A получен возмущением ограниченным оператором A_1 производящего оператора $\gamma \partial_x - I$ сильно непрерывной группы $U(\tau; \gamma \partial_x - I)g(x) = e^{-\tau}g(x + \gamma\tau)$ класса C_0 , поэтому (см. [7, § 8]) он порождает группу $U(\tau; A)g(x) = e^{-\tau}U(\tau; A_1)g(x + \gamma\tau)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , для которой справедлива оценка нормы

$$\|U(t; A)\| \leq e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \|A_1\|^k \leq e^{c_4 t}, \quad c_4 = |c_1| + |c_2|, \quad t \in \bar{R}_+^1. \quad (1.5)$$

В уравнении (1.4) произведем замену неизвестной функции

$$w(t, x) = U(-t/2; A)v(t, x), \quad (1.6)$$

тогда можно единственным образом определить начальные значения функции $w(t, x)$: $w|_{t=0} = w_0(x) = v_0(x)$, $w_t|_{t=0} = w_1(x) = -Av_0(x)/2 + v_1(x)$, и выразить решение $v(t, x)$ уравнения (1.4) через новую неизвестную функцию $w(t, x)$:

$$v(t, x) = U(t/2; A)w(t, x). \quad (1.7)$$

В результате замены (1.6) получим эквивалентное (1.4) интегродифференциальное уравнение

$$w_{tt} = Qw, \quad (1.8)$$

в котором операторный коэффициент $Q = A^2/4 - B = (\gamma^2/4 - \delta)\partial_x^2 - \gamma/2\partial_x + P$, здесь $4P = (1 - 2\gamma c_1 + 4c_3)I + 2(\gamma - c_1)R(1; \partial_x) - 2((1 + \gamma)c_2 + 2c_3)R(1; \partial_x^2) + c_1^2 R^2(1; \partial_x) + 2c_1 c_2 R(1; \partial_x)R(1; \partial_x^2) + c_2^2 R^2(1; \partial_x^2)$ — ограниченный оператор: $D(P) = C[R^1]$, притом $D(Q) = C^{(2)}[R^1]$.

Предполагая выполнение условия $\gamma^2 > 4\delta$, уравнение (1.8) можно переписать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = QW, \quad (1.9)$$

где $Q = Q_0 + Q_1$: $Q_0 = (c_5/2\partial_x - \gamma/(2c_5))I$, $c_5 = \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}$, $D(Q_0) = C^{(2)}[R^1]$; $Q_1 = P - \gamma^2/(4c_5^2)I$, $D(Q_1) = C[R^1]$, а $W = W(t) : t \rightarrow w(t, x)$ — искомая вектор-функция, определенная для $t \in \bar{R}_+^1$ и со значениями в пространстве $C[R^1]$.

Начальные условия для уравнения (1.9) в $C[R^1]$ переписутся в виде

$$W|_{t=0} = \Phi, \quad W_t|_{t=0} = \Psi, \quad (1.10)$$

где $\Phi = w_0(x)$, $\Psi = w_1(x)$ — элементы пространства $C[R^1]$.

Оператор $Q_{00} = (c_5/2)\partial_x - \gamma/(2c_5)I$ порождает в пространстве $C[R^1]$ группу $U(\tau; Q_{00})g(x) = e^{-\gamma\tau/(2c_5)}g(x + c_5\tau/2)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , поэтому квадрат этого оператора, т.е. оператор Q_0 , является [7, § 1.5] производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; Q_0)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , для которой справедливо представление

$$C(\tau; Q_0)g(x) = \frac{1}{2}[U(\tau; Q_0) + U(-\tau; Q_0)]g(x) = \frac{1}{2}\left[e^{-\gamma\tau/(2c_5)}g\left(x + \frac{c_5}{2}\tau\right) + e^{\gamma\tau/(2c_5)}g\left(x - \frac{c_5}{2}\tau\right)\right]$$

и оценка нормы $\|C(t; Q_0)\| \leq \text{ch}(\gamma t/(2c_5))$, $t \in \bar{R}_+^1$.

Ограниченный оператор Q_1 порождает [7, § 4.2] косинус оператор-функцию $C(\tau; Q_1)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , для которой справедливы представление $C(\tau; Q_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} Q_1^k$, в котором степен-

ной ряд сходится равномерно по $\tau \in R^1$ на каждом конечном отрезке, и оценка нормы $\|C(t; Q_1)\| \leq \text{ch}(c_6 t)$, $t \in \bar{R}_+^1$, где $c_6^2 = |\gamma - c_1|/2 + (c_1 + c_2)^2/4 + |(1 + \gamma)c_2/2 + c_3| + |c_3 - \gamma c_1/2 - \gamma^2/(4c_5^2) + 1/4|$.

Возмущение ограниченным оператором Q_1 сохраняет способность оператора Q_0 порождать косинус оператор-функцию класса C_0 [7, § 8.2], поэтому оператор Q является производящим оператором косинус оператор-функции класса C_0 , для которой на элементах $g(x) \in D(Q) = C^{(2)}[R^1]$ и для всех $\tau \in R^1$ справедливо представление

$$C(\tau; Q)g(x) = C(\tau; Q_0)g(x) + \frac{\tau^2}{2} \int_0^1 j_1(\tau\sqrt{1-s^2}, Q_0) C(\tau s; Q_1)g(x) ds, \quad (1.11)$$

где $j_1(\tau, Q_0)g(x) = (4/\pi) \int_0^1 \sqrt{1-r^2} C(\tau r; Q_0)g(x) dr$.

Для нормы косинус оператор-функции (1.11), используя табличные интегралы, выводим цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned} \|C(t; Q)\| &\leq \text{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{2c_5 t}{\gamma} \int_0^1 \left(\frac{\gamma t \sqrt{1-s^2}}{2c_5}\right) \text{ch}(c_6 ts) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \\ &= \text{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{\pi c_5 t}{\gamma} I_{1/2}((c_7 + c_6)t) I_{1/2}((c_7 - c_6)t) = \text{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{\pi c_5^2 t}{\gamma^2} \text{sh}((c_7 + c_6)t) \text{sh}((c_7 - c_6)t) \leq \quad (1.12) \\ &\leq \text{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{2c_5^2 t}{\gamma^2} \text{ch}(2c_7 t) = h_1(t), \quad c_7 = \sqrt{c_6^2 + \frac{\gamma^2}{4c_5^2}}, \quad t \in \bar{R}_+^1. \end{aligned}$$

С косинус оператор-функцией (1.11) связана [7, § 1.4] синус оператор-функция:

$$S(\tau; Q)g(x) = \int_0^\tau C(\xi; Q)g(x) d\xi, \quad g(x) \in C[R^1], \quad (1.13)$$

и линейное многообразие $C_1[R^1] = \{g(x) \in C[R^1] : C(\tau; Q)g(x) \in C^{(1)}(R^1; C[R^1])\}$, т.е. подмножество $C_1[R^1] \subset C[R^1]$ состоит из тех функций из $C[R^1]$, для которых функция $C(\tau; Q)g(x) : R^1 \rightarrow C[R^1]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной τ . Очевидно, что $D(Q) \subset C_1[R^1]$.

Из соотношений (1.13) и (1.12) для $t \in \bar{R}_+^1$ выводим оценку нормы синус оператор-функции:

$$\|S(t; Q)\| \leq \frac{2c_5}{\gamma} \text{sh}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{c_5^2}{2\gamma^2 c_7^2} (1 + 2c_7 t \text{sh}(2c_7 t)) = h_2(t). \quad (1.14)$$

Задача Коши (1.9), (1.10) равномерно корректна [7, § 1.4] только тогда, когда оператор Q является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; Q)$, $\tau \in R^1$, класса C_0 , при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (1.9), (1.10) дается формулой

$$W(t) = C(t; Q)\Phi + S(t; Q)\Psi, \quad t \in \bar{R}_+^1,$$

для любых $\Phi \in D(Q)$ и $\Psi \in C_1[R^1]$.

Теперь, производя обратные замены (1.7) и (1.3), находим решение задачи Коши для уравнения (1.1):

$$u(t, x) = U(t/2; A)\{C(t; Q)\varphi(x) + S(t; Q)[\psi(x) - A\varphi(x)/2]\}. \quad (1.15)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Пусть выполняется условие $\gamma^2 > 4\delta$ и пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ вместе с производными до четвертого порядка включительно принадлежат пространству $C[R^1]$: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(4)}[R^1]$, тогда задача Коши для линейного однородного уравнения (1.1) равномерно корректна, классическое решение дается формулой (1.15) и для него в пространстве $C[R^1]$ при $t \in \bar{R}_+^1$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq e^{c_4 t/2} \left[h_1(t) \sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| + h_2(t) \left(\sup_{x \in R^1} |\psi(x)| + \gamma \sup_{x \in R^1} |\varphi'(x)| + (|c_1| + |c_2| + 1) \sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \right) \right],$$

в которой функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ из (1.12) и (1.14) соответственно.

Замечание 1. От начальной функции $\psi(x)$ требуем заведомо большую гладкость, чем нужно для существования решения задачи Коши для уравнения (1.9), чтобы не заниматься описанием подмножества $C_1[R^1]$ пространства $C[R^1]$.

Замечание 2. Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (1.9), (1.10) принадлежит $C^{(2)}(\bar{R}_+^1; C[R^1])$ и для него $QW(t) \in C(\bar{R}_+^1; C[R^1])$, поэтому решение $u(t, x) = (I - \partial_x^2)^{-1} U(t/2; A) w(t, x)$ уравнения (1.1) принадлежит $C^{2,4}(\bar{R}_+^1, R^1)$.

2. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Применим к обеим частям уравнения (0.1) линейный ограниченный оператор $R(1; \partial_x^2)$, тогда получим эквивалентное (0.1) нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$u_{tt} - Au_t + Bu + [R(1; \partial_x^2) - I]f(u) = 0, \quad (2.1)$$

в котором операторные коэффициенты A , B такие же, как и в уравнении (1.4), а $f(\cdot)$ — оператор суперпозиции: $f(g) = (g(x))^2$, $g(x) \in C[R^1]$.

Уравнение (2.1) заменой $u(t, x) = U(t/2; A)w(t, x)$ преобразуется к абстрактному полулинейному уравнению

$$W_{tt} = QW + F(t, U(t/2; A)W), \quad (2.2)$$

при этом оператор Q такой же, как и в уравнении (1.9), а $F(t, \cdot)$ — заданный нелинейный оператор:

$$F(t, g) = U(-t/2; A)[I - R(1; \partial_x^2)]f(g). \quad (2.3)$$

При $t \in \bar{R}_+^1$ справедлива оценка нормы оператора $F(t, \cdot)$ в пространстве $C[R^1]$:

$$\|F(t, g)\|_C \leq 2e^{(c_4+1)t/2} \|g\|_C^2. \quad (2.4)$$

Ограниченность линейных операторов $U(-t/2; A)$ и $R(1; \partial_x^2)$ и непрерывная дифференцируемость оператора суперпозиции $f(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций обеспечивают непрерывную дифференцируемость по Фреше оператора (2.3) в пространстве $C[R^1]$ и поэтому оператор $F(t, \cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Следовательно, найдется промежуток $[0, t_0[$, в котором абстрактная задача Коши (2.2), (1.10) для любых $\Phi \in D(Q)$ и $\Psi \in C_1[R^1]$ имеет [8, § 3] единственное обобщенное решение $W = W(t)$, т.е. единственное непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения

$$W(t) = C(t; Q)\Phi + S(t; Q)\Psi + \int_0^t S(t-\tau; Q)F(\tau, U(\tau/2; A)W)d\tau. \quad (2.5)$$

Оценивая норму левой части уравнения (2.5) через норму ее правой части с учетом оценок (1.5), (1.12), (1.14), (2.4) и (0.3), выводим интегральное неравенство

$$\|W(t)\|_C \leq h_1(t)\|\Phi\|_C + h_2(t)\|\Psi\|_C + 2 \int_0^t h_2(t-\tau) e^{(c_4+1)\tau/2} \|W(\tau)\|_C^2 d\tau,$$

где $\|\Psi\|_C = \sup_{x \in R^1} |w_1| = 2^{-1} \left[(1+c_4)\|\Phi\|_C + \gamma \sup_{x \in R^1} |\varphi'(x) - \varphi'''(x)| \right] + \sup_{x \in R^1} |\psi(x) - \psi''(x)|$ и $\|\Phi\|_C = \sup_{x \in R^1} |w_0| = \sup_{x \in R^1} |\varphi(x) - \varphi''(x)|$.

Пусть $h_3(t) = h_1(t)\|\Phi\|_C + h_2(t)\|\Psi\|_C$ и $c_8 = 2 \max_{\tau \in [0,t], t \in [0,t_0]} h_2(t-\tau) e^{(c_4+1)\tau/2}$, перепишем интегральное неравенство в виде

$$\|W(t)\|_C \leq h_3(t) + c_8 \int_0^t \|W(\tau)\|_C^2 d\tau. \quad (2.6)$$

Из неравенства (2.6) выводим [9, §1.3] оценку нормы в пространстве $C[R^1]$ обобщенного решения уравнения (2.2):

$$\|W(t)\|_C \leq h_3(t) \left(1 - c_8 \int_0^t h_3(\tau) d\tau \right)^{-1} = h_4(t),$$

на отрезке $t \in [0, t_1]$, где

$$t_1 = \sup_{t \in [0, t_0]} \left\{ \int_0^t h_3(\tau) d\tau < 1/c_8 \right\}.$$

Найденное обобщенное решение $W(t)$, $t \in [0, t_1]$, будет классическим решением абстрактной задачи Коши (2.2), (1.10), если оно дважды непрерывно дифференцируемо, что является следствием [8] непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора $F(t, \cdot)$, при условии принадлежности начальных данных Φ и Ψ соответственно множествам $D(Q)$ и $C_1[R^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Пусть выполняется условие $\gamma^2 > 4\delta$ и пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(4)}[R^1]$, тогда на временном отрезке $[0, t_1]$ существует единственное классическое решение $u = u(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) в пространстве $C[R^1]$, для которого справедлива оценка

$$\sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq e^{c_4 t/2} h_4(t) = h_5(t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (2.7)$$

В дальнейших рассмотрениях локальное по временной переменной классическое решение $u = u(t, x)$ уравнения (0.1) принадлежит не только пространству $C[R^1]$, но и пространству Соболева $W_2^1(R^1)$ на отрезке $[0, t_1]$. (Напомним, что скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(R^1)$ функций с интегрируемым квадратом обозначаются соответственно через $(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) dx$ и $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ и что для функций $g(x)$, принадлежащих пересечению пространства непрерывных ограниченных функций $C(R^1)$ с пространством Соболева $W_2^1(R^1)$, справедлива оценка $\|g\|_C \leq \|g\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [(g(x))^2 + (g'(x))^2] dx \right)^{1/2}$, причем, если $g(x) \in C^{(2)}(R^1)$, то [10] предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ равен нулю.)

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Теорема 3. Пусть параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и начальные функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(4)}[R^1] \cap W_2^1(R^1)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha > 1, \quad \gamma > 1 + \delta, \quad \gamma^2 > 4\delta;$$

$$\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 \geq 2(\psi, \varphi') + 2(\psi', \varphi''),$$

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \frac{\delta}{\gamma-1} (\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2) a_1 \geq \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2 + \frac{2\delta}{\gamma-1} [(\psi, \varphi') + (\psi', \varphi'')] a_1,$$

где $a_1 = 1 + e^{3t_1/(\gamma-1)}$, тогда из существования классического решения $u = u(t, x)$, удовлетворяющего условию $u(t, x), u_t(t, x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$ на отрезке $t \in [0, t_1]$, следует существование единственного глобального классического решения задачи Коши (0.1), (0.2), для которого в пространстве $C[R^1]$ справедлива оценка

$$\|u\|_C = \sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq ae^{bt}, \quad a, b = \text{const}, \quad t \in \bar{R}_+^1.$$

(Постоянные a, b , зависящие от параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и начальных функций $\varphi(x), \psi(x)$, определяются в ходе доказательства теоремы.)

Доказательство. Введем в рассмотрение функционал

$$y(t) = (u, u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx = \|u\|_{W_2^1}^2, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.1)$$

Применяя к значениям производной функционала (3.1): $y'(t) = 2(u, u_t) + 2(u_x, u_{tx})$, и ее квадрата: $[y'(t)]^2$, неравенство Коши—Буняковского: $|(u, \psi)| \leq \|u\|_2 \|\psi\|_2$, и обозначая через

$$z(t) = (u_t, u_t) + (u_{tx}, u_{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2) dx = \|u_t\|_{W_2^1}^2, \quad t \in [0, t_1], \quad (3.2)$$

еще один функционал, связанный с уравнением (0.1), выводим вспомогательные оценки:

$$y'(t) \leq y(t) + z(t), \quad (3.3)$$

и

$$[y'(t)]^2 \leq 4y(t)z(t). \quad (3.4)$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u_t = u_t(t, x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_t\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 - \beta \|u_x\|_2^2 - \delta \|u_{xx}\|_2^2) + \|u_{tx}\|_2^2 - 2(uu_x, u_{tx}) = 0,$$

откуда, интегрируя по отрезку $[0, t]$ и обозначая $E_1 = \|\psi\|_{W_2^1}^2 - \beta \|\varphi'\|_2^2 - \delta \|\varphi''\|_2^2$, имеем

$$z(t) + 2 \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau = E_1 + \beta \|u_x\|_2^2 + \delta \|u_{xx}\|_2^2 + 4 \int_0^t (uu_x, u_{tx}) d\tau. \quad (3.5)$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, оценим абсолютную величину интеграла в правой части (3.5):

$$2 \left| \int_0^t (uu_x, u_{tx}) d\tau \right| \leq \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 u_x^2 dx + \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau \leq$$

(применяя оценку (2.7) решения $u = u(t, x)$ на временном отрезке $[0, t_1]$)

$$\leq \int_0^t h_5^2(\tau) \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau \leq$$

(обозначая $\max_{\tau \in [0, t_1]} h_5^2(\tau) = c_9^2$)

$$\leq c_9^2 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau.$$

Таким образом,

$$2 \int_0^t (uu_x, u_{tx}) d\tau \leq c_9^2 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.6)$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u_x = u_x(t, x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u_{xx}\|_2^2) = (u_t, u_x) + (u_{tx}, u_{xx}) + (u_{ttx}, u_{xxx}) + 2(uu_x, u_{xx})$$

откуда, интегрируя по отрезку $[0, t]$, имеем

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u_{xx}\|_2^2 &= \alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 + 2 \int_0^t (u_{tt}, u_x) d\tau + \\ &+ 2 \int_0^t (u_{ttx}, u_{xx}) d\tau + 2 \int_0^t (u_{tx}, u_{xx}) d\tau + 4 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Первые два интеграла в правой части равенства (3.7) можно вычислить и затем оценить, применяя неравенство Коши—Буняковского:

1) используя равенство $(u_{tt}, u_x) = (u_t, u_x)_t - (u_t, u_{tx})$, имеем цепочку равенств и неравенств

$$2 \int_0^t (u_{tt}, u_x) d\tau = 2(u_t, u_x) - 2(\psi, \varphi') - \int_0^t u_\tau^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} d\tau \leq 2\|u_t\|_2 \|u_x\|_2 - 2(\psi, \varphi') \leq \|u_t\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 - 2(\psi, \varphi'); \quad (3.8)$$

2) аналогично, используя равенство $(u_{ttx}, u_{xx}) = (u_{tx}, u_{xx})_t - (u_{tx}, u_{txx})$, получаем цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (u_{ttx}, u_{xx}) d\tau &= 2(u_{tx}, u_{xx}) - 2(\psi', \varphi'') - \int_0^t u_{tx}^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} d\tau \leq 2\|u_{tx}\|_2 \|u_{xx}\|_2 - 2(\psi', \varphi'') \leq \\ &\leq \|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 - 2(\psi', \varphi''). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для третьего интеграла в правой части равенства (3.7), имеем

$$2 \int_0^t (u_{tx}, u_{xx}) d\tau \leq \int_0^t (\|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2) d\tau \leq \int_0^t z(\tau) d\tau + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (3.10)$$

Наконец, оценивая четвертый интеграл в правой части равенства (3.7), получаем

$$2 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau \leq \int_0^t (\|uu_x\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2) d\tau \leq c_9^2 \int_0^t y(\tau) d\tau + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (3.11)$$

С учетом полученных оценок из равенства (3.7) выводим

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) \|u_x\|_2^2 + (\gamma - 1) \|u_{xx}\|_2^2 &\leq \alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 - 2(\psi, \varphi') - 2(\psi', \varphi'') + \\ &+ z(t) + \int_0^t z(\tau) d\tau + 2c_9^2 \int_0^t y(\tau) d\tau + 3 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Откуда, полагая $\alpha > 1$ и $\gamma_1 = \gamma - 1 > 0$, и обозначая $c_{10} = \gamma_1^{-1} (\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 - 2(\psi, \varphi') - 2(\psi', \varphi''))$, $H_1(t) = \gamma_1^{-1} \left(z(t) + \int_0^t z(\tau) d\tau + 2c_9^2 \int_0^t y(\tau) d\tau \right)$, следует интегральное неравенство

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq c_{10} + H_1(t) + 3\gamma_1^{-1} \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.12)$$

Из неравенства (3.12) при выполнении условия $c_{10} \geq 0$, т.е. $\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 \geq 2(\psi, \varphi') + 2(\psi', \varphi'')$, согласно лемме Гронуолла [9, § 1.1] следует оценка

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|_2^2 &\leq c_{10} + H_1(t) + 3\gamma_1^{-1} \int_0^t [c_{10} + H_1(\tau)] e^{3\gamma_1^{-1}(t-\tau)} d\tau \leq \\ &\leq c_{10} + H_1(t) + c_{10} e^{3\gamma_1^{-1}t} + 3\gamma_1^{-1} e^{3\gamma_1^{-1}t} \int_0^t H_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Интегрируя по частям, оценим на отрезке $[0, t_1]$ интеграл в правой части последнего неравенства

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_0^t H_1(\tau) d\tau &= \int_0^t z(\tau) d\tau + \tau \int_0^\tau z(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau z(\tau) d\tau + 2c_9^2 \left(\tau \int_0^\tau y(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau y(\tau) d\tau \right) = \\ &\leq (1 + t_1) \int_0^t z(s) ds + 2c_9^2 t_1 \int_0^t y(s) ds. \end{aligned}$$

С учетом последнего неравенства и обозначая $a_2 = \gamma_1^{-1} e^{3\gamma_1^{-1}t_1}$, $c_{11} = c_{10}(1 + \gamma_1 a_2)$, $c_{12} = \gamma_1^{-1}(1 + 3(1 + t_1)a_2)$, $c_{13} = 2\gamma_1^{-1}c_9^2(1 + 3t_1a_2)$ оценка (3.13) на отрезке $[0, t_1]$ примет вид

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq c_{11} + \gamma_1^{-1} z(t) + c_{12} \int_0^t z(\tau) d\tau + c_{13} \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.14)$$

Применяя полученные оценки (3.6), (3.14) к равенству (3.5), имеем

$$\gamma_1^{-1} (\gamma - \delta - 1) z(t) \leq E_1 + c_{11}\delta + \beta y(t) + (c_{13}\delta + 2c_9^2) \int_0^t y(\tau) d\tau + (c_{12}\delta + 2) \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Полагая $\gamma > 1 + \delta$ и $E_1 + c_{11}\delta \geq 0$, т.е. $\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \gamma_1^{-1}\delta(\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2)(1 + \gamma_1 a_2) \geq \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2 + 2\gamma_1^{-1}\delta[(\psi, \varphi') + (\psi', \varphi'')](1 + \gamma_1 a_2)$, и обозначая $c_{14} = \gamma_1/(\gamma_1 - \delta)$, $c_{15} = c_{14}(E_1 + c_{11}\delta)$, $c_{16} = c_{14}\beta$, $c_{17} = c_{14}(c_{13}\delta + 2c_9^2)$, $c_{18} = c_{14}(c_{12}\delta + 2)$, $H_2(t) = c_{15} + c_{16}y(t) + c_{17} \int_0^t y(\tau) d\tau$, из соотношения (3.15) выводим интегральное неравенство

$$z(t) \leq H_2(t) + c_{18} \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Отсюда по лемме Гронуолла следует неравенство на отрезке $[0, t_1]$

$$z(t) \leq H_2(t) + c_{18} \int_0^t H_2(\tau) e^{c_{18}(t-\tau)} d\tau \leq H_2(t) + a_3 \int_0^t H_2(\tau) d\tau, \quad (3.16)$$

где обозначено $a_3 = c_{18}e^{c_{18}t_1}$.

Интегрируя по частям, оценим при $t \in [0, t_1]$ интеграл в правой части (3.16):

$$\int_0^t H_2(\tau) d\tau \leq c_{15}t_1 + c_{16} \int_0^t y(\tau) d\tau + c_{17} \left(\tau \int_0^\tau y(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau y(\tau) d\tau \right) \leq c_{15}t_1 + (c_{16} + c_{17}t_1) \int_0^t y(\tau) d\tau. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.16) и обозначая $c_{19} = c_{15}(1 + t_1 a_3)$, $c_{20} = c_{17} + (c_{16} + c_{17}t_1)a_3$, получаем

$$z(t) \leq c_{19} + c_{16}y(t) + c_{20} \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.18)$$

Интегрируя обе части неравенства (3.5) и учитывая неравенство (3.18), получаем интегральное неравенство

$$y(t) \leq c_{21} + c_{22} \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad (3.19)$$

где обозначено $c_{21} = y(0) + c_{19}t_1$, $c_{22} = (1 + c_{16} + c_{20}t_1)$.

Из неравенства (3.19) в силу леммы Гронуолла следует оценка

$$y(t) \leq c_{21}e^{c_{22}t}, \quad t \geq 0,$$

и, значит, классическое решение $u = u(t, x)$ при $t \geq 0$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$ и поэтому справедлива оценка

$$\|u\|_C = \sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq \|u\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{c_{21}} e^{c_{22}t/2}, \quad t \in \bar{R}_+^1,$$

обеспечивающая существование глобального решения задачи Коши (0.1), (0.2).

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 3 классическое решение $u = u(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) удовлетворяет требованиям (0.3): $u(t, x)$, $u_t(t, x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$, для всех $t \geq 0$.

4. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Предполагая выполнение требования (0.3): u , $u_t \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$, $t \in [0, t_1]$, рассмотрим условия разрушения решения $u = u(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) на некотором временном отрезке $[0, t_2] \subseteq [0, t_1]$, другими словами, получим достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала $y(t) = \|u(t, \cdot)\|_{W_2^1}^2$ на отрезке $[0, t_2]$. Отрезок $[0, t_2]$ выбираем так, чтобы на нем выполнялось неравенство $y(t) > 0$, которое следует из начального условия

$$y(0) = \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0. \quad (4.1)$$

Теорема 4. Пусть параметры α , β , γ , δ и начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(4)}[R^1] \cap W_2^1(R^1)$ удовлетворяют условиям $\gamma > \delta + 2$, $\gamma^2 > 4\delta$,

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2 + 2(\varphi, (\varphi')^2) > (\varphi', \alpha\psi + \psi') + \gamma(\varphi'', \psi'),$$

$$(1 + \alpha)\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi''\|_2^2 \geq 2(\psi, \varphi'' + \varphi' - \varphi) + 2(\psi', \varphi'),$$

$$\begin{aligned}
 & (\gamma - 2) \|\Psi\|_{W_2^1}^2 + a_5 \delta \left[(\alpha + 1) \|\Phi'\|_2^2 + \gamma \|\Phi''\|_2^2 \right] > \\
 & > (\gamma - 2) \left(\beta \|\Phi'\|_2^2 + \delta \|\Phi''\|_2^2 \right) + a_5 \delta [2(\Psi, \Phi'' + \Phi' - \Phi) + 2(\Psi', \Phi'')], \\
 & (\Phi, \Psi) + (\Phi', \Psi') > \frac{1}{2} a_7 \|\Phi\|_{W_2^1}^2 > 0,
 \end{aligned}$$

тогда время t_0 существования решения не может быть сколь угодно большим: решение разрушается за конечное время T_0 и для времени существования решения справедлива оценка сверху

$$t_0 < T_0 = \frac{1}{c_{35}} \|\Phi\|_{W_2^1}^{-2\varrho},$$

при этом для функционала $y(t)$ имеет место оценка снизу

$$y(t) \geq \left(\|\Phi\|_{W_2^1}^{-2\varrho} - c_{35} t \right)^{-1/\varrho} e^{a_6 t / \varrho}.$$

(Фигурирующие в формулировке теоремы постоянные a_5 , a_6 , a_7 , ϱ и c_{35} определяются в ходе доказательства теоремы и зависят от параметров α , β , γ , δ и начальных функций $\Phi(x)$, $\Psi(x)$.)

Доказательство. Вычислим производную второго порядка функционала (3.1) и выразим ее значение через функционал (3.2):

$$\frac{1}{2} y''(t) + (u_{xx}, u_{tt}) - (u, u_{tt}) = z(t). \quad (4.2)$$

Учитывая уравнение (0.1) и интегрируя по частям, преобразуем третье слагаемое в левой части равенства (4.2)

$$(u, u_{tt}) = -\alpha(u_x, u_t) + \beta \|u_x\|_2^2 - (u_x, u_{tx}) + (u_{xx}, u_{tt}) - \gamma(u_{xx}, u_{tx}) + \delta \|u_{xx}\|_2^2 + 2(u, u_x^2). \quad (4.3)$$

Из равенств (4.2) и (4.3) следует представление

$$z(t) + \beta \|u_x\|_2^2 + \delta \|u_{xx}\|_2^2 = \frac{1}{2} y''(t) + \alpha(u_x, u_t) + (u_x, u_{tx}) + \gamma(u_{xx}, u_{tx}) - 2(u, u_x^2), \quad (4.4)$$

из которого, в частности, можно найти значение

$$\frac{1}{2} y''(0) = \|\Psi\|_{W_2^1}^2 + \beta \|\Phi'\|_2^2 + \delta \|\Phi''\|_2^2 + 2(\Phi, (\Phi')^2) - (\Phi', \alpha\Phi + \Psi') - \gamma(\Phi'', \Psi').$$

Потребуем, чтобы в дополнение к условию (4.1) выполнялись требования $y'(0) > 0$ и $y''(0) > 0$, т.е. $(\Phi, \Psi) + (\Phi', \Psi') > 0$ и $\|\Psi\|_{W_2^1}^2 + \beta \|\Phi'\|_2^2 + \delta \|\Phi''\|_2^2 + 2(\Phi, (\Phi')^2) > \alpha(\Phi', \Psi) + (\Phi', \Psi') + \gamma(\Phi'', \Psi')$, тогда найдется отрезок $[0, t_3] \subseteq [0, t_2]$ на котором для функционала (3.1) справедливы неравенства

$$y(t) > 0, \quad y'(t) \geq 0 \quad \text{и} \quad y''(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_3]. \quad (4.5)$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u = u(t, x)$ и проинтегрируем полученное равенство по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$(u_{tt}, u) + \alpha(u_t, u_x) - \beta \|u_x\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_2^2 - (u_{tt}, u_{xx}) + \gamma(u_{tx}, u_{xx}) - \delta \|u_{xx}\|_2^2 - 2(u, u_x^2) = 0,$$

откуда, интегрируя обе части по отрезку $[0, t]$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|u_x\|_2^2 + \int_0^t (u_{tt}, u) d\tau + \alpha \int_0^t (u_t, u_x) d\tau + \gamma \int_0^t (u_{tx}, u_{xx}) d\tau = \\
 & = \frac{1}{2} \|\Phi'\|_2^2 + \beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \delta \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \int_0^t (u_{tt}, u_{xx}) d\tau + 2 \int_0^t (u, u_x^2) d\tau.
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Применяя соотношения $(u_{\tau\tau}, u) = (u_\tau, u)_\tau - \|u_\tau\|_2^2$ и $(u_{\tau\tau}, u_{xx}) = (u_\tau, u_{xx})_\tau + \|u_{\tau x}\|_2^2$, вычислим соответственно первый интеграл в левой части и третий интеграл в правой части равенства (4.6):

$$\int_0^t (u_{\tau\tau}, u) d\tau = \int_0^t (u_\tau, u)_\tau d\tau - \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau = (u_t, u) - (\psi, \varphi) - \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau$$

и

$$\int_0^t (u_{\tau\tau}, u_{xx}) d\tau = \int_0^t (u_\tau, u_{xx})_\tau d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau = (u_t, u_{xx}) - (\psi, \varphi'') + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau.$$

Используя полученные равенства, перепишем (4.6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_x\|_2^2 &= \frac{1}{2} \|\varphi'\|_2^2 + (\psi, \varphi) - (\psi, \varphi'') - (u_t, u) - \alpha \int_0^t (u_\tau, u_x) d\tau - \gamma \int_0^t (u_{\tau x}, u_{xx}) d\tau + \\ &+ \beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \delta \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + (u_t, u_{xx}) + \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 2 \int_0^t (u, u_x^2) d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Складывая равенство (4.7) с равенством (3.7), переписанным в виде

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u_{xx}\|_2^2 &= \alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 - 2(\psi, \varphi') - 2(\psi', \varphi'') + \\ &+ 2(u_t, u_x) + 2(u_{tx}, u_{xx}) + 4 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} (\alpha + 1) \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u_{xx}\|_2^2 &= E_2 + 2(u_t, u_{xx} + u_x - u) + 2(u_{tx}, u_{xx}) + 2\beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \\ &+ 2\delta \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + 2 \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + 2 \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 4 \int_0^t (u, u_x^2) d\tau + 4 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau - \\ &- 2\alpha \int_0^t (u_\tau, u_x) d\tau - 2\gamma \int_0^t (u_{\tau x}, u_{xx}) d\tau, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $E_2 = (1 + \alpha) \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 + 2(\psi, \varphi - \varphi' - \varphi'') - 2(\psi', \varphi'')$.

Применяя неравенство Коши–Буняковского и оценки

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (uu_x, u_{xx}) d\tau &\leq \int_0^t (\|uu_x\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2) d\tau \leq \int_0^t \left(\sup_{x \in R^1} |u(\tau, x)| \right)^2 d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \leq \\ &\leq c_9^2 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \end{aligned}$$

и

$$\int_0^t (u, u_x^2) d\tau \leq \int_0^t \sup_{x \in R^1} |u(\tau, x)| d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \leq \int_0^t h_5(\tau) \|u_x\|_2^2 d\tau \leq c_9 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau,$$

увеличим правую часть равенства (4.8)

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + (\gamma - 2) \|u_{xx}\|_2^2 &\leq E_2 + y(t) + 3z(t) + (\alpha + \gamma + 2) \int_0^t z(\tau) d\tau + \\ &+ (\alpha + 2\beta + 4c_9 + 2c_9^2) \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + (\gamma + 2\delta + 1) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Пусть выполнены следующие условия $\gamma_2 = \gamma - 2 > 0$ и $E_2 \geq 0$, тогда, обозначая $c_{23} = \max\{(\alpha + 2\beta + 4c_9 + 2c_9^2)/\alpha, (\gamma + 2\delta + 1)/\gamma_2\}$, и $H_3(t) = E_2 + y(t) + 3z(t) + (\alpha + \gamma + 2) \int_0^t z(\tau) d\tau$ приходим к интегральному неравенству

$$\alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma_2 \|u_{xx}\|_2^2 \leq H_3(t) + c_{23} \int_0^t [\alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma_2 \|u_{xx}\|_2^2] d\tau.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла, интегрируя по частям и обозначая $a_4 = c_{23}e^{c_{23}t_1}$, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma_2 \|u_{xx}\|_2^2 &\leq H_3(t) + a_4 \int_0^t H_3(\tau) d\tau \leq (1 + t_1 a_4) E_2 + y(t) + a_4 \int_0^t y(\tau) d\tau + 3z(t) + \\ &+ (\alpha + \gamma + 2 + 3a_4) \int_0^t z(\tau) d\tau + a_4 (\alpha + \gamma + 2) \left[\tau \int_0^\tau z(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau z(\tau) d\tau \right] \leq \\ &\leq (1 + t_1 a_4) E_2 + y(t) + a_4 \int_0^t y(\tau) d\tau + 3z(t) + ((\alpha + \gamma + 2)(1 + t_1 a_4) + 3a_4) \int_0^t z(\tau) d\tau \end{aligned}$$

и, следовательно, обозначая $c_{24} = (1 + t_1 a_4) E_2 / \gamma_2$, $c_{25} = ((\alpha + \gamma + 2)(1 + t_1 a_4) + 3a_4) / \gamma_2$, имеем

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq c_{24} + \frac{y(t)}{\gamma_2} + \frac{a_4}{\gamma_2} \int_0^t y(\tau) d\tau + \frac{z(t)}{\gamma_2} + c_{25} \int_0^t z(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_3]. \quad (4.10)$$

Далее сложим соответствующие части равенств (4.4) и (3.5), предварительно умножив обе части равенства (3.5) на пока неопределенное положительное число ε :

$$\begin{aligned} (\varepsilon + 2) z(t) + 2\varepsilon \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau &= 4\varepsilon \int_0^t (uu_x, u_{tx}) d\tau + \varepsilon E_1 + (\varepsilon - 2) (\beta \|u_x\|_2^2 + \delta \|u_{xx}\|_2^2) + \\ &+ y''(t) + 2\alpha (u_x, u_t) + 2(u_x, u_{tx}) + 2\gamma (u_{xx}, u_{tx}) - 4(u, u_x^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и оценки (3.6) и $(u, u_x^2) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u| u_x^2 dx \leq \sup_{x \in R^1} |u| \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \leq c_9 \|u_x\|_2^2$, увеличим правую часть равенства (4.11):

$$\begin{aligned} (\varepsilon + 2) z(t) + 2\varepsilon \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau &\leq 2\varepsilon c_9^2 \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + 2\varepsilon \int_0^t \|u_{tx}\|_2^2 d\tau + \varepsilon E_1 + y''(t) + 4c_9 \|u_x\|_2^2 + \\ &+ (\varepsilon - 2) (\beta \|u_x\|_2^2 + \delta \|u_{xx}\|_2^2) + \alpha (\|u_x\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) + \|u_x\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma (\|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2). \end{aligned}$$

Откуда, применяя неравенства $\|u_t\|_2^2 \leq z(t)$, $\|u_{tx}\|_2^2 \leq z(t)$, $\|u_x\|_2^2 \leq y(t)$, приводя подобные и обозначая $c_{26} = \alpha + (\varepsilon - 2)\beta + 4c_9 + 1$, $c_{27} = \gamma + (\varepsilon - 2)\delta$, выводим

$$(\varepsilon - \alpha - \gamma + 1) z(t) \leq \varepsilon E_1 + y''(t) + c_{26} y(t) + 2\varepsilon c_9^2 \int_0^t y(\tau) d\tau + c_{27} \|u_{xx}\|_2^2. \quad (4.12)$$

Используя неравенство (4.10), увеличим правую часть (4.12):

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon - \alpha - \gamma - \frac{c_{27}}{\gamma_2} + 1 \right) z(t) &\leq \varepsilon E_1 + c_{24} c_{27} + y''(t) + \left(c_{26} + \frac{c_{27}}{\gamma_2} \right) y(t) + \\ &+ \left(\frac{a_4 c_{27}}{\gamma_2} + 2\varepsilon c_9^2 \right) \int_0^t y(\tau) d\tau + c_{25} c_{27} \int_0^t z(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\gamma - \delta - 2 > 0$ и

$$\varepsilon - \alpha - \gamma - \frac{c_{27}}{\gamma_2} + 1 > 0, \quad (4.13)$$

т.е.

$$\varepsilon > \frac{(\alpha + \gamma)(\gamma - 2) - 2\delta + 2}{\gamma - \delta - 2}, \quad (4.14)$$

и обозначая $c_{28} = \varepsilon - \alpha - \gamma - \gamma_2^{-1} c_{27} + 1$, $c_{29} = (\varepsilon E_1 + c_{24} c_{27}) c_{28}^{-1}$, $c_{30} = (c_{26} + \gamma_2^{-1} c_{27}) c_{28}^{-1}$, $c_{31} = (2\varepsilon c_9^2 + \gamma_2^{-1} a_4 c_{27}) c_{28}^{-1}$, $c_{32} = c_{25} c_{27} c_{28}^{-1}$, $H_4(t) = c_{29} + c_{30} y(t) + c_{28}^{-1} y''(t) + c_{31} \int_0^t y(\tau) d\tau$, придем к интегральному неравенству на отрезке $[0, t_3]$

$$z(t) \leq H_4(t) + c_{32} \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (4.15)$$

Для того чтобы выполнялось неравенство $H_4(t) \geq 0$, достаточно потребовать, учитывая (4.5) и (4.14), выполнение неравенства $c_{29} \geq 0$, т.е. $\varepsilon[\gamma_2 E_1 + \delta a_5 E_2] \geq (2\delta - \gamma) a_5 E_2$, где $a_5 = 1 + t_1 a_4$, поэтому при выполнении условия $\gamma_2 E_1 + \delta a_5 E_2 > 0$ или в подробной записи $\gamma_2 \|\psi\|_{W_2^1}^2 + a_5 \delta [(\alpha + 1) \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2] > \gamma_2 (\beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2) + a_5 \delta [2(\psi, \varphi'' + \varphi' - \varphi) + 2(\psi', \varphi'')]$, получается оценка снизу параметра ε :

$$\varepsilon \geq \frac{(2\delta - \gamma) a_5 E_2}{\gamma_2 E_1 + \delta a_5 E_2}. \quad (4.16)$$

Теперь, из неравенства (4.15), применяя лемму Гронуолла, выводим оценку

$$z(t) \leq H_4(t) + c_{32} e^{c_{32} t} \int_0^t H_4(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_3].$$

Отсюда, интегрируя по частям, обозначая $a_6 = c_{32} e^{c_{32} t_1}$ и используя неравенство $\int_0^t y(\tau) d\tau = \tau y(\tau)|_0^t - \int_0^t \tau y'(\tau) d\tau \leq t y(t) \leq t_1 y(t)$, выводим

$$z(t) \leq c_{29} (1 + t_1 a_6) + c_{30} y(t) + c_{28}^{-1} y''(t) + a_6 c_{28}^{-1} y'(t) + t_1 (c_{31} + a_6 (c_{30} + t_1 c_{31})) y(t).$$

Таким образом, обозначая $c_{33} = c_{28} c_{29} (1 + a_6 t_1)$ и $c_{34} = c_{28} t_1 (c_{31} + a_6 (c_{30} + t_1 c_{31}))$, имеем

$$c_{28} z(t) \leq c_{33} + c_{34} y(t) + a_6 y'(t) + y''(t), \quad t \in [0, t_3]. \quad (4.17)$$

Уменьшим левую часть неравенства (4.17), применив оценку (3.4):

$$y(t) y''(t) - \frac{c_{28}}{4} [y'(t)]^2 + a_6 y'(t) y(t) + c_{34} y^2(t) + c_{33} y(t) \geq 0. \quad (4.18)$$

Потребуем, чтобы коэффициент при квадрате производной в (4.18) удовлетворял условию $c_{28}/4 > 1$, что подразумевает автоматическое выполнение условия (4.13) и, значит,

$$\varepsilon > \frac{(3 + \alpha + \gamma) \gamma_2 + \gamma - 2\delta}{\gamma_2 - \delta}. \quad (4.19)$$

Теперь, рассматривая одновременно оценки (4.16) и (4.19), приходим к определению ранее неопределенного числа ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 > \max \left\{ \frac{(3 + \alpha + \gamma) \gamma_2 + \gamma - 2\delta}{\gamma_2 - \delta}, \frac{(2\delta - \gamma) a_5 E_2}{\gamma_2 E_1 + \delta a_5 E_2} \right\}, \quad (4.20)$$

при этом дальнейшие рассуждения проводим, полагая во всех соотношениях, в которых фигурирует число ε , его равным ε_0 .

Далее, увеличим левую часть неравенства (4.18), потребовав выполнение оценки

$$c_{33} + c_{34}y(t) \leq \omega y(t), \quad t \in [0, t_3], \quad (4.21)$$

где ω — пока неопределенное положительное число. Тогда из (4.5) и (4.21) с необходимостью следует

$$\omega = \omega_0 \geq c_{34} + c_{33} \|\varphi\|_{W_2^1}^{-2}. \quad (4.22)$$

При выполнении условий (4.20) и (4.22) дифференциальное неравенство (4.18) примет вид

$$y(t)y''(t) - (\varrho + 1)[y'(t)]^2 + a_6 y(t)y'(t) + \omega_0 y^2(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_3], \quad (4.23)$$

где $\varrho = c_{28}/4 - 1 > 0$.

Применяя к неравенству (4.23) результат, приведенный в монографии [11, Приложение, § 2, уравнение (2.9), Теорема 2], заключаем, что если в дополнение к ранее приведенным условиям потребовать выполнения условия $y'(0) > a_7 y(0)$, $a_7 = a_6/\varrho + \sqrt{\omega_0/\varrho}$, т.е. $(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi') > \frac{1}{2} a_7 \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0$, тогда время t_0 существования решения не может быть сколь угодно большим: $t_0 < T_0 = c_{35}^{-1} \|\varphi\|_{W_2^1}^{-2\varrho}$, где $c_{35} = \varrho (y(0))^{-1-\varrho} \left[(y'(0) - y(0)a_6/\varrho)^2 - (y(0))^2 \omega_0/\varrho \right] > 0$, т.е.

$$c_{35} = \varrho \|\varphi\|_{W_2^1}^{-2(\varrho+1)} \left[\left(2(\varphi, \psi) + 2(\varphi', \psi') - \frac{a_6}{\varrho} \|\varphi\|_{W_2^1}^2 \right)^2 - \frac{\omega_0}{\varrho} \|\varphi\|_{W_2^1}^4 \right] > 0,$$

причем для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу $y(t) \geq e^{a_6 t/\varrho} \left(\|\varphi\|_{W_2^1}^{-2\varrho} - c_{35} t \right)^{-1/\varrho}$, и, значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильичев А.Т. Устойчивость локализованных волн в нелинейно-упругих стержнях. М.: Физматлит, 2009. С. 159.
2. Куликовский А.Г., Гвоздовская Н.И. О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды // Тр. МИАН. 1998. Т. 223. С. 63–73.
3. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998. С. 436.
4. Умаров Х.Г. Задача Коши для уравнения нелинейных длинных продольных волн в вязкоупругом стержне // Сиб. матем. журнал. 2021. Т. 62. № 1. С. 198–209.
5. Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.
6. Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part I: General Theory. N.Y.: Interscience, 1958. xiv + 858 p. = Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 895.
7. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Серия Матем. анализ. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990. С. 87–202.
8. Travis C.C., Webb G.F. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
9. Dragomir S.S. Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002. 193 p.
10. Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
11. Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Физический факультет МГУ, 2014. С. 364.