

УДК 517.977

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНОК МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОТОКОВ ЛЮДЕЙ¹⁾

© 2023 г. М. В. Зайцева^{1,*}, П. А. Точилин^{1,**}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, Россия

* e-mail: zaimarko@gmail.com

** e-mail: tochilin@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 23.01.2023 г.
Переработанный вариант 23.01.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Работа посвящена математическому моделированию потоков людей в помещении. За основу взята модификация дискретной макромоделей СТМ, построенная на гарантированных оценках. Для описанной модели предложено два способа приближенного вычисления множества достижимости — количества людей в каждой комнате в последующий момент времени. Строятся интервальные оценки и оценки в форме совокупностей двумерных проекций. Предложенные алгоритмы проиллюстрированы численными примерами. Библ. 14. Фиг. 3.

Ключевые слова: моделирование потоков людей, линейное программирование, множество достижимости, нелинейная динамика.

DOI: 10.31857/S0044466923070190, **EDN:** ZXXNGL

1. ВВЕДЕНИЕ

В математическом моделировании потоков людей можно выделить два основных подхода: микромоделирование и макромоделирование. В первом случае необходимо учитывать положение и скорость каждого элемента системы, во втором используются их усредненные характеристики.

Настоящая работа посвящена математическому моделированию движения групп людей в помещении на основе известной макромоделей СТМ (Cell Transmission Model) (см. [1], [2]), которая часто используется при математическом моделировании транспортных потоков и является дискретным аналогом гидродинамической модели LWR (Lighthill, Whitham, Richards) (см. [3]). Подробное описание и возможный метод калибровки для моделирования движения групп людей были предложены в [4]. Существуют и другие ее модификации, например, PedCTM (Pedestrian Cell Transmission Model) (см. [5]). Наряду с дискретными моделями рассматривают также непрерывные модели движения групп людей, построенные как обобщение одномерных транспортных моделей (см. [6]).

Недостатками указанных методов являются предположения об известном поведении людей или известной плотности их распределения в помещении. Поэтому предлагается использовать модификацию из [4] модели СТМ, основанную на гарантированных оценках количества людей в комнатах. Однако построение этих оценок также является непростой задачей. Данная работа посвящена двум методам аппроксимации множества достижимости в последующий момент времени на основе интервальных оценок и оценок двумерных проекций. В дальнейшем такие краткосрочные численные прогнозы могут быть полезны при выборе стратегии управления и при оценке ее качества. Особенно актуальны задачи оптимизации эвакуации людей из помещений (см. [7]), а также перераспределения потоков людей в общественном транспорте (см. [5], [8]). Построение оценок распределений людей в будущие моменты времени является важным элементом решения указанных задач.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

В настоящей статье предложены два метода численного прогноза в модели движения групп людей, описаны алгоритмы построения оценок множества достижимости, а также представлены численные результаты двух подходов.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Схема помещения

План помещения или его части представим в виде ориентированного графа $\Gamma = \{\mathcal{R}, \mathcal{T}\}$, где множество вершин $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ обозначает N комнат (это могут быть не только отдельные комнаты, но и части больших холлов и коридоров), множество ребер $\mathcal{T}$ — переходы между ними. Множество $\mathcal{T}$ состоит из элементов T_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, N\}$, T_{ij} обозначает переход между комнатами R_i и R_j , если он существует.

Каждой комнате R_i сопоставлены следующие характеристики:

- S_i — площадь i -й комнаты;
- C_i — максимальная вместимость (наибольшее количество человек, которое может одновременно находиться в i -й комнате);
- $n_i(t)$ — количество людей в комнате i в момент времени t .

Замечание 1. В рассматриваемой модели время t — дискретное.

Замечание 2. Величина $n_i(t)$ является усредненной по небольшому интервалу времени, поэтому функция $n_i(t)$ не обязательно является целочисленной, однако условие $n_i(t) \in [0, C_i]$ выполняется всегда.

Для комнаты R_i , связанной переходами с комнатами $R_{j_1}, \dots, R_{j_k}$, дополнительно вводится $\alpha^{(i)}(t) = (\alpha_0^{(i)}(t), \alpha_{j_1}^{(i)}(t), \dots, \alpha_{j_k}^{(i)}(t))$ — набор коэффициентов расщепления, где k — количество соседних комнат, в которые можно перейти из i -й. При этом $\alpha_s^{(i)}(t) \geq 0$, $s = 0, j_1, \dots, j_k$, и $\alpha_0^{(i)}(t) + \alpha_{j_1}^{(i)}(t) + \dots + \alpha_{j_k}^{(i)}(t) = 1 \ \forall t$. Коэффициент расщепления $\alpha_j^{(i)}(t)$ определяет долю людей, находящихся в комнате R_i в момент времени t , которые собираются перейти в комнату R_j . Коэффициент $\alpha_0^{(i)}(t)$ задает долю людей, которые собираются остаться в комнате R_i .

Каждому переходу T_{ij} сопоставлена тройка (v_{ij}, F_{ij}, w_{ij}) , где $v_{ij} \geq 0$, $F_{ij} \geq 0$, $w_{ij} \geq 0$ — коэффициенты, подобные коэффициентам фундаментальной диаграммы (см. [3]), определяющие зависимость потока людей $f_{ij}(t)$ от плотности $\rho_{ij}(t)$: $f_{ij}(t) = f_{ij}(\rho_{ij}(t))$, v_{ij} характеризует скорость свободного движения, w_{ij} — скорость распространения затора, F_{ij} — максимальную пропускную способность перехода между комнатами.

Коэффициенты v_{ij} , F_{ij} , w_{ij} в рассматриваемой задаче будем считать известными и постоянными. Оценку на их численные значения для каждого случая можно получить, например, с помощью способа, предложенного в [4], опирающегося на молекулярную модель взаимодействия из [9].

2.2. Пересчет числа людей в комнатах

Рассмотрим моменты времени $t = t_0, t_0 + \Delta t, \dots$ и уравнения пересчета количеств людей n_i в комнатах:

$$n_i(t + \Delta t) = n_i(t) + \Delta t \left(\sum_{T_{ji} \in \mathcal{T}} f_{ji}(t) - \sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} f_{ij}(t) \right) \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $f_{ij}(t)$ — поток людей на соединении T_{ij} в момент времени t , где шаг $\Delta t > 0$ фиксирован, является решением задачи оптимизации

$$\sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} f_{ij}(t) \rightarrow \max_{\{f_{ij}\}} \quad (2)$$

$$0 \leq f_{ij}(t) \leq F_{ij} - f_{ji}(t) \quad \forall i, j : T_{ij} \in \mathcal{T}, \quad (3)$$

$$f_{ij}(t) \leq \alpha_j^{(i)}(t) v_{ij} \frac{n_i(t)}{S_i} \quad \forall i, j : T_{ij} \in \mathcal{T}, \quad (4)$$

$$\sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} \frac{f_{ij}(t)}{w_{ij}} \leq \left(\frac{C_j - n_j(t)}{S_j} \right) \quad \forall j. \quad (5)$$

Неравенство (3) характеризует влияние противонаправленных потоков f_{ij} и f_{ji} друг на друга, (4) определяет количество желающих перейти из комнаты i в комнату j , неравенство (5) является ограничением на суммарный входящий поток в j -ю комнату. Максимизация потоков (2) соответствует тому принципу, что люди всегда будут занимать с максимально возможной скоростью все доступное им свободное место, если это соответствует желаемому направлению их движения.

Замечание 3. В случае соединения T_{ij} с возможным двусторонним движением будем считать, что $F_{ij} = F_{ji}$.

2.3. Решение задачи оптимизации

С учетом ограничений на противонаправленный поток (3) и суммарный входящий поток (5) задача линейного программирования (2)–(5) должна быть рассмотрена сразу для всех комнат одновременно, т.е. в общем случае ее нельзя разбить на несколько подзадач, относящихся к отдельным комнатам. Это значительно усложняет вычисления, а также существенно отличает рассматриваемую математическую модель от аналогичной транспортной модели, где потоки на перекрестках можно рассчитывать независимо.

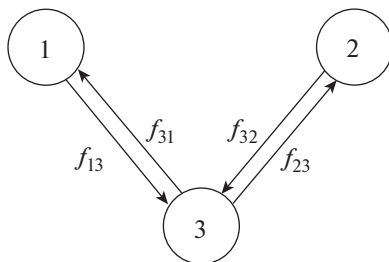
Кроме того, решение может не быть единственным — это соответствует неопределенности в распределении потоков. Если в какой-либо комнате имеет место давка (неравенство (5) превращается в равенство), то, вообще говоря, существует бесконечное количество вариантов того, как при этом распределятся входящие в эту комнату потоки. Одним из выходов в этой ситуации является предположение о том, что входящие потоки должны быть пропорциональны спросу на свободное место в комнате со стороны соседних комнат (т.е. поток пропорционален размеру толпы на входе) или максимальным пропускным способностям (аналогично подходу из [10] для транспортной модели). Это приводит к необходимости вводить дополнительные параметры — коэффициенты приоритетов — и усложнять задачу оптимизации. В настоящей работе мы не будем использовать такой подход, а будем интерпретировать неоднозначность в определении потоков как неопределенность.

Пример. Рассмотрим три комнаты, причем комнаты с номерами 1 и 2 соединены с комнатой 3, но не соединены между собой (фиг. 1).

Пусть $S_i = S$, $C_i = C$, $i = 1, 2, 3$, для каждого перехода T_{ij} : $v_{ij} = v$, $F_{ij} = F$, $w_{ij} = w$, и в некоторый момент t : $\alpha_3^{(1)}(t) = \alpha_3^{(2)}(t) = 1$, $\alpha_1^{(3)}(t) = \alpha_2^{(3)}(t) = 1/2$, $n_1(t) = n_2(t) = n_3(t) = C/2$. Пусть также $v > 2w$. Требуется определить потоки $f_{13}(t)$, $f_{23}(t)$, $f_{31}(t)$, $f_{32}(t)$.

Решая задачу оптимизации (2)–(5), получим, что $f_{13} + f_{23} + f_{31} + f_{32} \rightarrow \max$ при условиях

$$f_{13} + f_{31} \leq F, \quad f_{23} + f_{32} \leq F, \quad f_{13} + f_{23} \leq \frac{wC}{2S}, \quad f_{31} \leq \frac{wC}{2S}, \quad f_{32} \leq \frac{wC}{2S}. \quad (6)$$



Фиг. 1. Схема помещения из примера.

Пусть $2F \leq wC/(2S)$. Тогда последние три неравенства в (6) являются следствием первых двух, а значит, максимальный суммарный поток равен $2F$, и максимум достигается в любой точке $(f_{13}, f_{31}, f_{23}, f_{32})$, для которой $f_{13} \in [0, F]$, $f_{23} \in [0, F]$, $f_{13} + f_{31} = F$, $f_{23} + f_{32} = F$.

Пусть теперь $wC/S \leq F$. Тогда, наоборот, первые два неравенства (6) с учетом неотрицательности потоков являются следствием из последних трех, а потому максимальный суммарный поток равен $3wC/(2S)$, и максимум достигается в любой точке $(f_{13}, f_{31}, f_{23}, f_{32})$, для которой $f_{13} \geq 0$, $f_{23} \geq 0$, $f_{13} + f_{23} = wC/(2S)$, $f_{31} = wC/(2S)$, $f_{32} = wC/(2S)$. Видим, что в двух разобранных случаях решение задачи оптимизации является неединственным.

Вне зависимости от предположений о распределении потоков в конфликтных ситуациях будем считать, что в каждый момент времени количество людей в той или иной комнате точно не известно. Можно построить оценку, используя особенности рассматриваемой математической модели, а также поступающие результаты измерений — неточную информацию о текущем количестве людей в некоторых комнатах, например, в результате обработки изображений с камер видеонаблюдения.

3. ОЦЕНИВАНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ

Предполагается, что задано некоторое начальное множество $\mathcal{X}(t_0)$ возможных значений переменных $n_i(t_0)$, $i = 1, \dots, N$. Множеством достижимости $\tilde{\mathcal{X}}(t)$ (см. [11]) в некоторый момент времени $t \geq t_0$ называется множество, содержащее все векторы $\bar{n}(t) \in \mathbb{R}^N$, которые могут быть получены в качестве решений задач (1)–(5) для некоторого начального условия $\bar{n}(t_0) \in \mathcal{X}(t_0)$. Поиск точного множества достижимости $\tilde{\mathcal{X}}(t)$ для нелинейной системы является сложной задачей, поэтому будем искать $\mathcal{X}(t)$ — внешнюю оценку множества достижимости в некоторый момент времени $t \geq t_0$. На основании этой оценки можно будет судить о сложившейся ситуации, предсказывать места возможного возникновения давки и, в частности, анализировать качество предлагаемой стратегии управления. Далее будут описаны два разных вида таких множеств, задающих внешние оценки.

Основной идеей, использованной в указанных ниже алгоритмах, является разделение большой задачи линейного программирования (2)–(5) на множество более простых подзадач, относящихся к парам связанных между собой комнат, что позволяет легко интерпретировать получающиеся при решении соотношения геометрически.

3.1. Интервальные оценки

Предположим, что задано начальное множество $\mathcal{X}(t_0)$ возможных значений $n_i(t_0)$ во всех комнатах, являющееся декартовым произведением интервалов:

$$\mathcal{X}(t_0) = \{[n_{i,-}(t_0), n_{i,+}(t_0)], i = 1, \dots, N\},$$

где $0 \leq n_{i,-}(t_0) \leq n_{i,+}(t_0) \leq C_i$ — заданные величины. Необходимо найти внешнюю оценку множества $\mathcal{X}(t)$ в некоторый момент времени $t > t_0$ также в виде декартового произведения интервалов:

$$\mathcal{X}(t) = \{[n_{i,-}(t), n_{i,+}(t)], i = 1, \dots, N\}.$$

Для любой траектории системы (1), для которой $n_i(t_0) \in [n_{i,-}(t_0), n_{i,+}(t_0)]$, $i = 1, \dots, N$, обязательно должно быть выполнено условие $n_i(t) \in [n_{i,-}(t), n_{i,+}(t)]$, $i = 1, \dots, N$ (подробнее о применении интервальных оценок для множества достижимости см. [12], [13]).

Фиксируем произвольный момент времени $t \geq t_0$, и будем считать, что множество $\mathcal{X}(t)$ уже найдено. Найдем множество $\mathcal{X}(t + \Delta t)$ в следующий момент времени. Для этого сперва необходимо вычислить потоки $f_{ij}(t)$ или же множество их значений $\{f_{ij}(t)\}$, учитывая неединственность решения задачи и неопределенность в состоянии системы. Далее опишем алгоритм построения множеств возможных значений $f_{ij}(t)$.

1. Будем использовать вспомогательные переменные σ_{ij} для всех $i, j: T_{ij} \in \mathcal{T}$. Изначально положим $\sigma_{ij} = 0 \forall i, j$. Переменная σ_{ij} имеет смысл минимального суммарного входящего потока в комнату j из комнат $k \neq i, T_{kj} \in \mathcal{T}$.

Для каждой пары $i, j, T_{ij} \in \mathcal{T}$, необходимо определить множество $\mathcal{F}_{ij} \subset \mathbb{R}_+^2$, содержащее все возможные пары величин f_{ij} и f_{ji} . Далее всюду предполагается, что для любой пары индексов i, j множества $\mathcal{F}_{ij}$ и $\mathcal{F}_{ji}$ отличаются друг от друга лишь перестановкой компонент входящих в них векторов.

Изначально положим

$$\mathcal{F}_{ij} = \{(f_{ij}, f_{ji}) : 0 \leq f_{ij} \leq F_{ij} - f_{ji}, 0 \leq f_{ji} \leq F_{ji} - f_{ij}\}. \quad (7)$$

Зафиксируем некоторое значение параметра $\Theta \in \mathbb{N}$, а также положим $\theta = 1$. Параметр θ будет соответствовать номеру итерации основного цикла алгоритма, а Θ — максимальное количество таких итераций.

2. Необходимо уточнить множества $\mathcal{F}_{ij}$ так, чтобы были выполнены неравенства² (4), (5) с учетом вспомогательной переменной σ_{ij} :

$$f_{ij} \leq \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i}, \quad f_{ji} \leq \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j}, \quad (8)$$

$$f_{ij} \leq w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} \right) - \sigma_{ij}, \quad f_{ji} \leq w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} \right) - \sigma_{ji}, \quad (9)$$

для каких-либо значений $(n_i, n_j) \in [n_{i,-}, n_{i,+}] \times [n_{j,-}, n_{j,+}]$.

Сначала отдельно рассмотрим пару неравенств

$$f_{ij} \leq \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i}, \quad f_{ji} \leq w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} \right) - \sigma_{ji}.$$

При каждом фиксированном значении n_i они определяют на плоскости (f_{ij}, f_{ji}) , где $f_{ij} \geq 0, f_{ji} \geq 0$ — некоторый прямоугольник. Так как точное значение n_i неизвестно, то построим объединение всех таких прямоугольников при $n_i \in [n_{i,-}, n_{i,+}]$. Верхняя правая вершина таких прямоугольников будет находиться на прямой

$$\frac{f_{ij} S_i}{\alpha_j^{(i)} v_{ij}} = C_i - \frac{(f_{ji} + \sigma_{ji}) S_i}{w_{ji}} \Leftrightarrow f_{ji} + \frac{w_{ji}}{\alpha_j^{(i)} v_{ij}} f_{ij} = \frac{w_{ji} C_i}{S_i} - \sigma_{ji}.$$

Таким образом, искомое объединение прямоугольников $\hat{\mathcal{F}}_{ij}$ задается неравенствами

$$\left\{ (f_{ij}, f_{ji}) : f_{ij} \leq \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_{i,+}}{S_i}, f_{ji} \leq w_{ji} \left(\frac{C_i - n_{i,-}}{S_i} \right) - \sigma_{ji}, f_{ji} + \frac{w_{ji}}{\alpha_j^{(i)} v_{ij}} f_{ij} \leq \frac{w_{ji} C_i}{S_i} - \sigma_{ji} \right\}.$$

Тогда уточненное множество $\mathcal{F}_{ij}$ можно представить в виде пересечения трех множеств

$$\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{F}_{ij} \cap \hat{\mathcal{F}}_{ij} \cap \hat{\mathcal{F}}_{ji}$$

(формула для множества $\hat{\mathcal{F}}_{ij}$ отличается от $\hat{\mathcal{F}}_{ji}$ перестановкой индексов).

3. Предположим, что вычисления из предыдущего пункта проделаны для фиксированного j и всех k таких, что $T_{kj} \in \mathcal{T}$, т.е. известны множества $\mathcal{F}_{kj}$.

Множество $\mathcal{F}_{ij}$ может быть избыточным, так как содержит малые величины f_{ij}, f_{ji} , которые заведомо не являются решением задачи максимизации (2). Поэтому определим нижние границы

² Всюду в формулах для краткости опущена зависимость функций $f_{ij}, f_{ji}, \alpha_j^{(i)}$ от переменной t .

на эти величины, учитывая, что движущиеся люди всегда по максимуму заполняют все доступное им свободное место. Допустимые значения потоков f_{ij} и f_{ji} задаются неравенствами

$$0 \leq f_{ij} \leq w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} - \sum_{\substack{k \neq i, \\ T_{kj} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{kj}}{w_{kj}} \right), \quad 0 \leq f_{ji} \leq w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} - \sum_{\substack{m \neq j, \\ T_{mi} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{mi}}{w_{mi}} \right), \quad (10)$$

$$f_{ij} + f_{ji} \leq F_{ij}, \quad f_{ij} \leq \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i}, \quad f_{ji} \leq \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j}. \quad (11)$$

(а) Пусть в переходе между комнатами i и j допустимо движение в противоположных направлениях. Предположим, что нам известны величины $n_i, n_j, \bar{f}_{kj}, \bar{f}_{mi}$, где

$$\bar{f}_{kj} = \sum_{\substack{k \neq i, \\ T_{kj} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{kj}}{w_{kj}} \quad \text{и} \quad \bar{f}_{mi} = \sum_{\substack{m \neq j, \\ T_{mi} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{mi}}{w_{mi}}.$$

Рассмотрим задачу линейного программирования $f_{ij} + f_{ji} \rightarrow \max$ при условиях (10), (11). Если неравенство

$$\min \left\{ \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i}, w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} - \bar{f}_{kj} \right) \right\} + \min \left\{ \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j}, w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} - \bar{f}_{mi} \right) \right\} \leq F_{ij} \quad (12)$$

выполнено, то решение этой задачи единственно. Найдем первую компоненту максимизатора

$$f_{ij}^*(n_i, n_j, \bar{f}_{kj}, \bar{f}_{mi}) = \min \left\{ \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i}, w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} - \bar{f}_{kj} \right) \right\}.$$

Если же указанное выше неравенство не выполнено, то решения задачи образуют отрезок прямой $f_{ij} + f_{ji} = F_{ij}$. В качестве компоненты максимизатора $f_{ij}^*(n_i, n_j, \bar{f}_{kj}, \bar{f}_{mi})$ возьмем ту точку этого отрезка, которая соответствует наименьшему значению f_{ij} :

$$f_{ij}^*(n_i, n_j, \bar{f}_{kj}, \bar{f}_{mi}) = F_{ij} - \min \left\{ \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j}, w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} - \bar{f}_{mi} \right) \right\}.$$

Теперь учтем, что параметры $n_i, n_j, \bar{f}_{kj}, \bar{f}_{mi}$ являются компонентами неопределенности. Следовательно, для потока f_{ij} справедлива оценка

$$f_{ij} \geq r_{ij} = \max \left\{ 0, \min \left\{ f_{ij}^*(n_i, n_j, \bar{f}_{kj}, \bar{f}_{mi}) : n_i \in [n_{i,-}, n_{i,+}], n_j \in [n_{j,-}, n_{j,+}], \right. \right. \\ \left. \left. f_{kj} \in \text{Pr}_1 \mathcal{F}_{kj}, f_{mi} \in \text{Pr}_1 \mathcal{F}_{mi}, \forall k \neq i, m \neq j \right\} \right\},$$

где $\text{Pr}_1 \mathcal{F}_{kj} = \{f_{kj}\}$. Используя геометрическую интерпретацию указанной выше задачи линейного программирования, легко установить, что минимум f_{ij}^* будет достигаться при $n_j = n_{j,+}$, $n_i = n_{i,-}$, $f_{kj} = f_{kj,\max}$, $f_{mi} = f_{mi,\min}$. Здесь $f_{kj,\max} = \max \{f_{kj} : (f_{kj}, f_{jk}) \in \mathcal{F}_{kj}\}$, $f_{mi,\min} = \min \{f_{mi} : (f_{mi}, f_{im}) \in \mathcal{F}_{mi}\}$.

Аналогичную оценку можно выписать и для потока f_{ji} . Величина r_{ij} имеет смысл гарантированного ресурса свободного места в ячейке j , который может быть использован людьми, идущими из ячейки i .

(б) Рассмотрим частный случай, когда в переходе между комнатами i и j движение является односторонним (из i -й комнаты в j -ю). Тогда $r_{ji} = 0$, а для r_{ij} можно получить более простую формулу:

$$r_{ij} = 0 \vee \min \left\{ \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_{i,-}}{S_i}, F_{ij}, w_{ij} \left(\left(\frac{C_j - n_{j,+}}{S_j} \right) - \sum_{\substack{k \neq i, \\ T_{kj} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{kj,\max}}{w_{kj}} \right) \right\}.$$

Если $r_{ij} > 0$, то модифицируем множество $\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{F}_{ij} \cap \{(f_{ij}, f_{ji}) : f_{ij} \geq r_{ij}\}$.

Указанные модификации множеств $\mathcal{F}_{ij}$ проведем для всех возможных пар индексов i, j .

4. Если в п. 3 было изменено множество $\mathcal{F}_{kj}$ для некоторых значений индексов k, j (т.е. увеличена нижняя граница возможного потока f_{kj}), то пересчитаем значение σ_{ij} для фиксированного j и разных $i \neq k$. А именно,

$$\sigma_{ij} = w_{ij} \sum_{\substack{k \neq i, \\ T_{kj} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{kj,\min}}{w_{kj}} > 0. \quad (13)$$

5. Если в п. 4 были изменены значения σ_{ij} хотя бы для одной пары индексов i, j , и при этом $\theta < \Theta$, то значение θ увеличивается на 1, и алгоритм снова переходит к п. 2. Иначе алгоритм завершает работу, на выходе — совокупность множеств $\mathcal{F}_{ij}$.

Для полученных множеств справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть f_{ij}^* — какое-либо решение задачи оптимизации (2)–(5) в момент времени t при условии, что истинное состояние системы находится в некоторой точке множества $\mathcal{X}(t)$. Тогда $f_{ij}^* \in \mathcal{F}_{ij} \forall i, j$.

Теорема 2. Пусть комнаты с номерами i, j являются частью системы связанных комнат с односторонним движением без разветвлений, т.е.

$$\alpha_j^{(i)} = 1, \quad \alpha_i^{(j)} = 0, \quad \alpha_j^{(k)} = 0 \quad \forall k \neq i.$$

Тогда множество $\mathcal{F}_{ij}$ совпадет со множеством допустимых потоков f_{ij} , рассчитанным на основании интервальных оценок при моделировании транспортного потока (см. [14]):

$$f_{ij} \in \left[\max \left\{ 0, \min \left\{ v_{ij} \frac{n_{i,-}}{S_i}, F_{ij}, w_{ij} \frac{C_j - n_{j,+}}{S_j} \right\} \right\}, \min \left\{ v_{ij} \frac{n_{i,+}}{S_i}, F_{ij}, w_{ij} \frac{C_j - n_{j,-}}{S_j} \right\} \right]. \quad (14)$$

Доказательство. Найдем допустимые значения f_{ij}, f_{ji} с помощью приведенного алгоритма. В пунктах 1 и 2 получаем

$$f_{ji} = 0, \quad 0 \leq f_{ij} \leq \min \left\{ F_{ij}, \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_{i,+}}{S_i}, w_{ij} \frac{C_j - n_{j,-}}{S_j} \right\}, \quad \sigma_{ij} = 0.$$

Далее, в п. 3 алгоритма

$$r_{ij} = \max \left\{ 0, \min \left\{ \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_{i,-}}{S_i}, F_{ij}, w_{ij} \left(\frac{C_j - n_{j,+}}{S_j} \right) \right\} \right\}, \quad f_{ij} \geq r_{ij}.$$

В п. 4 получим $\sigma_{ij} = 0$, а потому на дальнейших итерациях работы алгоритма (при $\theta > 1$) уточнение верхней оценки для f_{ij} не проводится. Объединяя полученные неравенства и учитывая $\alpha_j^{(i)} = 1$, получим (14). Теорема доказана.

В итоге на основании оценки потоков можно аппроксимировать множества достижимости

$$\mathcal{X}(t + \Delta t) = \{[n_{i,-}(t + \Delta t), n_{i,+}(t + \Delta t)], i = 1, \dots, N\},$$

$$n_{i,-}(t + \Delta t) = \max \left\{ 0, n_{i,-}(t) + \Delta t \sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} \min \{ f_{ji} - f_{ij} : (f_{ij}, f_{ji}) \in \mathcal{F}_{ij} \} \right\},$$

$$n_{i,+}(t + \Delta t) = \min \left\{ C_i, n_{i,+}(t) + \Delta t \sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} \max \{ f_{ji} - f_{ij} : (f_{ij}, f_{ji}) \in \mathcal{F}_{ij} \} \right\}.$$

Замечание 4. Рассмотрим частный случай, когда $w_{ij} = w \ \forall i, j$, и для некоторого номера i выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{j: T_{ji} \in \mathcal{T}} \min \left\{ \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_{j,-}}{S_j}, f_{ji} - f_{ji, \max} \right\} \geq w \frac{C_i - n_{i,-}}{S_i}.$$

Тогда для реальных потоков неравенство (5) обязательно должно обратиться в равенство (это условие затора на входах в комнату с номером i). Значит, суммарный входящий поток будет не меньше, чем $w(C_i - n_{i,-})/S_i$, т.е.

$$n_{i,-}(t + \Delta t) := \max \left\{ n_{i,-}(t + \Delta t), n_{i,-}(t) + \Delta t \left(w \frac{C_i - n_{i,-}}{S_i} - \sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} f_{ij, \max} \right) \right\},$$

где в правой части $n_{i,-}(t + \Delta t)$ — ранее полученная оценка. Эта формула в отдельных случаях позволяет улучшить оценку снизу на величину n_i .

3.2. Оценки двумерных проекций

Из приведенных выше уравнений видно, что потоки f_{ij} и f_{ji} одновременно зависят от двух фазовых переменных: n_i и n_j . В случае интервальных оценок эти переменные аппроксимируются с помощью двух независимых отрезков — одномерных проекций множества достижимости. Однако, если их заменить на двумерные, можно получить более качественные оценки.

Теперь рассмотрим оценки множества достижимости вида

$$\mathcal{X}(t) = \{ \mathcal{N}_{ij}(t), i, j = 1, \dots, N : T_{ij} \in \mathcal{T} \},$$

где $\mathcal{N}_{ij}(t) \subset [0, C_i] \times [0, C_j]$ — некоторое компактное множество, содержащее возможные значения пары переменных $(n_i(t), n_j(t))$. Будем далее считать, что множество $\mathcal{N}_{ij}(t)$ является выпуклым многоугольником, задаваемым совокупностью своих вершин $g^{(ij,1)}(t), \dots, g^{(ij,m)}(t)$, где $m = m(t, i, j) \in \mathbb{N}$.

Далее приведем алгоритм построения оценки возможных значений потоков $f_{ij}(t)$ при условии, что в некоторый произвольный момент времени $t \geq t_0$ заданы множества $\mathcal{N}_{ij}(t)$ указанного выше вида.

1. Как и в случае интервальных оценок, будем использовать вспомогательные переменные σ_{ij} для всех $i, j, T_{ij} \in \mathcal{T}$. Изначально положим $\sigma_{ij} = 0 \ \forall i, j$.

Для каждой пары $i, j, T_{ij} \in \mathcal{T}$, необходимо определить множество $\mathcal{F}_{ij} \subset \mathbb{R}_+^2$, содержащее все возможные пары величин f_{ij} и f_{ji} . Множества $\mathcal{F}_{ij}$ и $\mathcal{F}_{ji}$ отличаются друг от друга лишь перестановкой компонент входящих в них векторов.

Изначально определим множества $\mathcal{F}_{ij}$ аналогично формуле (7).

Зафиксируем некоторое значение параметра $\Theta \in \mathbb{N}$, а также положим $\theta = 1$.

2. Необходимо уточнить множества $\mathcal{F}_{ij}$ так, чтобы были выполнены неравенства (8), (9) для какой-либо пары значений $(n_i, n_j) \in \mathcal{N}_{ij}(t)$. Пусть

$$\hat{\mathcal{F}}_{ij} = \bigcup_{(n_i, n_j) \in \mathcal{N}_{ij}(t)} \left\{ (f_{ij}, f_{ji})^T : 0 \leq f_{ij} \leq \min \left\{ \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i}, w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} \right) - \sigma_{ij} \right\}, \right. \\ \left. 0 \leq f_{ji} \leq \min \left\{ \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j}, w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} \right) - \sigma_{ji} \right\} \right\}. \quad (15)$$

Тогда уточненное множество $\mathcal{F}_{ij}$ можно представить в виде $\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{F}_{ij} \cap \hat{\mathcal{F}}_{ij} \cap \hat{\mathcal{F}}_{ji}$. Покажем, как можно построить выпуклые многоугольники, оценивающие сверху множества $\hat{\mathcal{F}}_{ij}$. Введем обозначения для двух вспомогательных прямых на плоскости:

$$H_1 = \left\{ (n_i, n_j)^T : \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i} = w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} \right) - \sigma_{ij} \right\}, \\ H_2 = \left\{ (n_i, n_j)^T : \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j} = w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} \right) - \sigma_{ji} \right\}.$$

Эти прямые разбивают $\mathcal{N}_{ij}(t)$ на несколько многоугольных частей (не более четырех), в каждой из которых оба минимума из (15) раскрываются однозначно. Вершины k -й такой части обозначим через $z^{(k),1}, \dots, z^{(k),s_k}$. Рассмотрим опорную функцию³ ко множеству $\mathcal{F}_{ij}$ в направлении $l \in \mathbb{R}^2$:

$$\rho(l | \hat{\mathcal{F}}_{ij}) = \sup_{(n_i, n_j) \in \mathcal{N}_{ij}(t)} \left\{ \max \left\{ 0, l_1 \min \left\{ \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i}, w_{ij} \frac{C_j - n_j}{S_j} - \sigma_{ij} \right\} \right\} + \right. \\ \left. + \max \left\{ 0, l_2 \min \left\{ \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j}, w_{ji} \frac{C_i - n_i}{S_i} - \sigma_{ji} \right\} \right\} \right\}. \quad (16)$$

Здесь нужно учесть, что если какая-то из упомянутых выше четырех частей множества $\mathcal{N}_{ij}(t)$ пуста, то соответствующий максимум по ее вершинам отсутствует. Таким образом, $\hat{\mathcal{F}}_{ij}$ представляет собой многоугольник, являющийся выпуклой оболочкой точек

$$(0, 0)^T, \quad \left(\alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{z_1^{(1),s}}{S_i}, \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{z_2^{(1),s}}{S_j} \right)^T, \quad \left(\alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{z_1^{(2),s}}{S_i}, w_{ji} \frac{C_i - z_1^{(2),s}}{S_i} - \sigma_{ji} \right)^T, \\ \left(w_{ij} \frac{C_j - z_2^{(3),s}}{S_j} - \sigma_{ij}, \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{z_2^{(3),s}}{S_j} \right)^T, \quad \left(w_{ij} \frac{C_j - z_2^{(4),s}}{S_j} - \sigma_{ij}, w_{ji} \frac{C_i - z_1^{(4),s}}{S_i} - \sigma_{ji} \right)^T, \\ \left(0, \max_s \left\{ \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{z_2^{(1),s}}{S_j}, w_{ji} \frac{C_i - z_1^{(2),s}}{S_i} - \sigma_{ji}, \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{z_2^{(3),s}}{S_j}, w_{ji} \frac{C_i - z_1^{(4),s}}{S_i} - \sigma_{ji} \right\} \right)^T, \\ \left(\max_s \left\{ \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{z_1^{(1),s}}{S_i}, \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{z_1^{(2),s}}{S_i}, w_{ij} \frac{C_j - z_2^{(3),s}}{S_j} - \sigma_{ij}, w_{ij} \frac{C_j - z_2^{(4),s}}{S_j} - \sigma_{ij} \right\}, 0 \right)^T,$$

где s — вершины соответствующего многоугольника с номером $k = 1, 2, 3, 4$.

3. Предположим, что известны множества $\mathcal{F}_{kj}$. Уточним множество $\mathcal{F}_{ij}$ аналогично тому, как это было сделано в случае с интервальными оценками.

(а) Пусть в переходе между комнатами i и j допустимо движение в двух противоположных направлениях. Определим величины

$$f_{kj,\max} = \max \{ f_{kj} : (f_{kj}, f_{jk})^T \in \mathcal{F}_{kj} \}, \quad f_{mi,\min} = \min \{ f_{mi} : (f_{mi}, f_{im})^T \in \mathcal{F}_{mi} \}.$$

³ Опорная функция для некоторого компакта X в направлении l определяется соотношением $\rho(l | X) = \sup_{x \in X} \langle l, x \rangle$.

Рассмотрим разные варианты раскрытия минимумов в левой части (12) и найдем минимальные значения величины f_{ij}^* . Пусть N_1 — это та часть множества $\mathcal{N}_{ij}(t)$, для которой выполнено неравенство

$$\min \left\{ w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} - \sum_{\substack{k \neq i, \\ T_{kj} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{kj, \max}}{w_{kj}} \right), \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i} \right\} + \min \left\{ w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} - \sum_{\substack{m \neq j, \\ T_{mi} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{mi, \min}}{w_{mi}} \right), \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j} \right\} \leq F_{ij},$$

и $N_2 = \mathcal{N}_{ij}(t) \setminus N_1$. Подсчитаем следующие величины:

$$F_1 = \min_{(n_i, n_j) \in N_1} \left\{ \min \left\{ w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} - \sum_{\substack{k \neq i, \\ T_{kj} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{kj, \max}}{w_{kj}} \right), \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i} \right\} \right\},$$

$$F_2 = F_{ij} - \max_{(n_i, n_j) \in N_2} \left\{ \min \left\{ w_{ji} \left(\frac{C_i - n_i}{S_i} - \sum_{\substack{m \neq j, \\ T_{mi} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{mi, \min}}{w_{mi}} \right), \alpha_i^{(j)} v_{ji} \frac{n_j}{S_j} \right\} \right\}.$$

Теперь определим величину

$$r_{ij} = 0 \vee \min \{F_1, F_2\}.$$

Как и в предыдущем разделе, эта величина имеет смысл максимального гарантированного ресурса свободного места в комнате j , который будет использован людьми из комнаты i .

(б) Рассмотрим частный случай, когда в переходе между комнатами i и j движение является односторонним, из i -й в j -ю. Тогда $r_{ji} = 0$,

$$r_{ij} = 0 \vee \min_{(n_i, n_j) \in \mathcal{N}_{ij}(t)} \left\{ \min \left\{ \alpha_j^{(i)} v_{ij} \frac{n_i}{S_i}, F_{ij}, w_{ij} \left(\frac{C_j - n_j}{S_j} - \sum_{\substack{k \neq i, \\ T_{kj} \in \mathcal{T}}} \frac{f_{kj, \max}}{w_{kj}} \right) \right\} \right\}.$$

Если $r_{ij} > 0$, то модифицируем множество $\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{F}_{ij} \cap \{(f_{ij}, f_{ji}) : f_{ij} \geq r_{ij}\}$. Аналогичные модификации $\mathcal{F}_{ij}$ проведем для всех возможных пар i, j .

4. Если в п. 3 было изменено множество $\mathcal{F}_{kj}$ для некоторых значений индексов k, j , то пересчитаем значение σ_{ij} для фиксированного j и разных $i \neq k$ по формуле (13).

5. Если в п. 4 были изменены значения σ_{ij} хотя бы для одной пары индексов i, j , и при этом $\theta < \Theta$, то значение θ увеличивается на 1, и алгоритм снова переходит к п. 2. Иначе алгоритм завершает работу, на выходе — совокупность множеств $\mathcal{F}_{ij}$.

На основании оценки потоков можно аппроксимировать множества достижимости в момент времени $t + \Delta t$. При этом для потоков между двумя соседними комнатами i и j будем использовать оценку в виде многоугольника $\mathcal{F}_{ij}$, а для внешних (относительно i -й и j -й комнат) — интервальную оценку. В итоге получаем

$$\mathcal{X}(t + \Delta t) = \{\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t), i, j = 1, \dots, N : T_{ij} \in \mathcal{T}\},$$

$$\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t) = (\mathcal{N}_{ij}(t) + \Delta t (C \mathcal{F}_{ij} + f_{ij, \text{ext}}(t))) \cap ([0, C_i] \times [0, C_j]), \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f_{ij, \text{ext}}(t) = [f_{ji, \text{ext}, -}, f_{ji, \text{ext}, +}] \times [f_{ij, \text{ext}, -}, f_{ij, \text{ext}, +}],$$

$$f_{ji, \text{ext}, -} = \sum_{k \neq j: T_{ki} \in \mathcal{T}} \min_{(f_{ki}, f_{ik})^T \in \mathcal{F}_{ki}} \{f_{ki} - f_{ik}\}, \quad f_{ji, \text{ext}, +} = \sum_{k \neq j: T_{ki} \in \mathcal{T}} \max_{(f_{ki}, f_{ik})^T \in \mathcal{F}_{ki}} \{f_{ki} - f_{ik}\}.$$

Так как линейная комбинация выпуклых многоугольников является выпуклым многоугольником, то множество $\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t)$ — выпуклый многоугольник. Его вершины можно найти из приведенных выше формул, зная вершины $\mathcal{N}_{ij}(t)$ и $\mathcal{F}_{ij}$.

Замечание 5. Полученные оценки можно улучшить за счет сопоставления между собой полученных множеств, соответствующих соседним парам комнат (т.е. множеств вида $\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t)$ и $\mathcal{N}_{ik}(t + \Delta t)$). Для каждой пары i, j положим

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t) &:= \mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t) \cap ([n_{ij,\text{ext},-}, n_{ij,\text{ext},+}] \times [n_{ji,\text{ext},-}, n_{ji,\text{ext},+}]), \\ n_{ij,\text{ext},-} &= \max_{k \neq j, T_{ik} \in \mathcal{T}} \min \{n_i : (n_i, n_k) \in \mathcal{N}_{ik}(t + \Delta t)\}, \\ n_{ij,\text{ext},+} &= \min_{k \neq j, T_{ik} \in \mathcal{T}} \max \{n_i : (n_i, n_k) \in \mathcal{N}_{ik}(t + \Delta t)\}.\end{aligned}$$

Данную процедуру можно проводить до тех пор, пока на каждой итерации хотя бы одна из оценок $\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t)$ изменяется (уточняется).

3.3. Количество вершин в многоугольных оценках $\mathcal{N}_{ij}(t)$

В описанном алгоритме построения оценок множества достижимости в форме выпуклых многоугольников может иметь место эффект увеличения с течением времени количеств вершин, задающих многоугольники $\mathcal{N}_{ij}(t)$. Это может привести к значительному росту вычислительной сложности при больших значениях $t > t_0$. Для решения этой проблемы можно на отдельных шагах алгоритма после подсчета очередного набора оценок $\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t)$ дополнительно огрублять их, уменьшая количество используемых вершин.

Пусть $v \in \mathbb{N}$ — фиксированное число, задающее максимально допустимое количество вершин многоугольника, $g^{(ij,1)}, \dots, g^{(ij,m)}$ — вершины многоугольника $\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t)$. Пусть $m > v$, опишем алгоритм удаления вершины (индексы ij опущены для краткости).

1. Для каждой стороны $[g^{(k)}, g^{(k+1)}]$ (индексацию следует брать по модулю m) вычисляется $\tilde{g}^k$ — точка пересечения лучей $[g^{(k-1)}, g^{(k)}]$ и $[g^{(k+2)}, g^{(k+1)}]$.
2. Для всех треугольников с вершинами вида $\tilde{g}^k, g^{(k)}, g^{(k+1)}$ вычисляются площади.
3. Находим сторону $[\bar{g}^{(k)}, \bar{g}^{(k+1)}]$, на которой располагается треугольник наименьшей площади.
4. Пару вершин $\bar{g}^{(k)}, \bar{g}^{(k+1)}$ в многоугольной оценке заменяем на найденную точку $\tilde{g}^k$.

Указанный алгоритм применяется до тех пор, пока количество вершин не станет равным заданному числу v . На выходе получаем многоугольник $\tilde{\mathcal{N}}_{ij}(t + \Delta t)$ с $m = v$ вершинами. Легко видеть, что $\mathcal{N}_{ij}(t + \Delta t) \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_{ij}(t + \Delta t)$.

4. УЧЕТ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в некоторый момент времени t появляется неточная информация (оценка) о количестве людей в комнате i . Например, это могут быть результаты обработки изображений, полученных с видеокамер. С точки зрения рассматриваемой математической модели можно использовать уравнение измерения

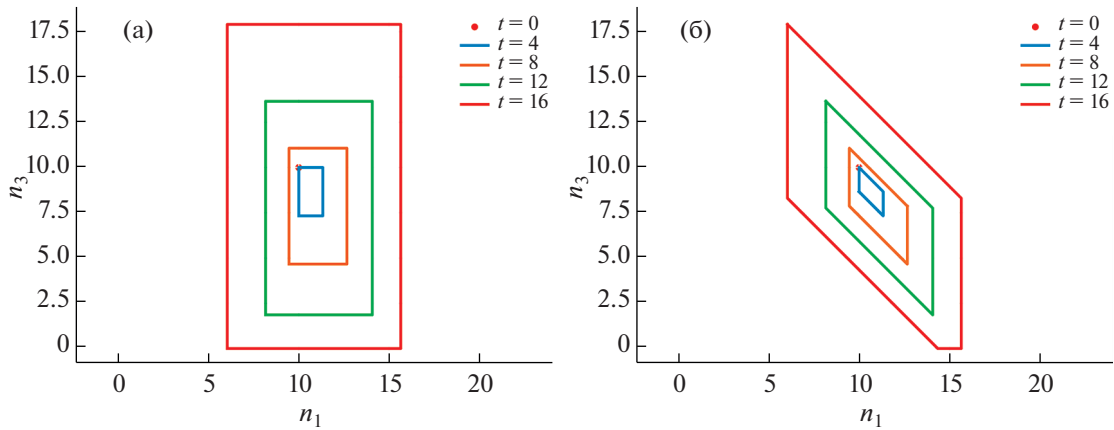
$$y_i(t) = n_i(t) + \xi_i(t). \quad (17)$$

Здесь $\xi_i(t)$ — помеха измерения, относительно которой известны ограничения $|\xi_i(t)| \leq \Xi$, где константа Ξ считается заданной и не зависит от номера комнаты или момента времени. Таким образом, $n_i(t) \in [y_i(t) - \Xi, y_i(t) + \Xi]$.

Поступившие результаты измерений могут быть использованы для уточнения текущей оценки величины $n_i(t)$. В случае с интервальными оценками такое уточнение выглядит следующим образом:

$$\tilde{n}_i(t) \in [\tilde{n}_{i,-}(t), \tilde{n}_{i,+}(t)] = [n_{i,-}(t), n_{i,+}(t)] \cap [y_i(t) - \Xi, y_i(t) + \Xi].$$

Будем считать, что результаты измерений не противоречат математической модели, и потому полученное пересечение отрезков не пусто.



Фиг. 2. Эволюция проекции оценки множества достижимости на плоскость (n_1, n_3) : (а) — интервальные оценки, (б) — двумерные проекции.

В случае с оценками двумерных проекций множества достижимости результаты измерений могут быть использованы следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{ij}(t) = \mathcal{N}_{ij}(t) \cap ([y_i(t) - \Xi, y_i(t) + \Xi] \times \mathbb{R}) \quad \forall i, j : T_{ij} \in \mathcal{T}.$$

Заметим, что в отдельных случаях результаты измерения количества людей в комнате с номером i могут быть также использованы для уточнения оценок величин $n_j(t)$, соответствующих соседним комнатам. Например, если используются интервальные оценки и известны оценки $\mathcal{F}_{ij}$ потоков, то

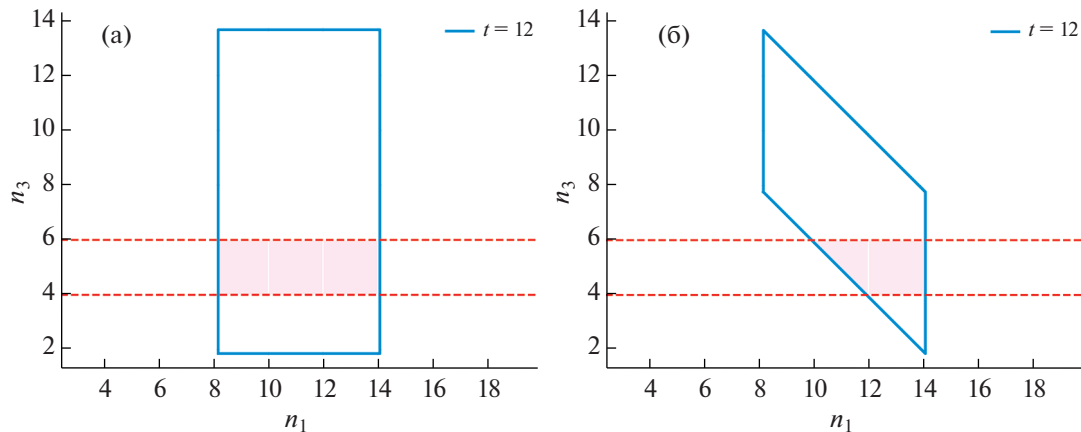
$$\begin{aligned} \tilde{n}_{j,-}(t) &= \max \left\{ n_{j,-}(t), n_{j,-}(t - \Delta t) + \Delta t \sum_{T_{jk} \in \mathcal{T}, k \neq i} \min \{ f_{kj} - f_{jk} : (f_{jk}, f_{kj}) \in \mathcal{F}_{jk} \} + s_{ij,-} \right\}, \\ \tilde{n}_{j,+}(t) &= \min \left\{ n_{j,+}(t), n_{j,+}(t - \Delta t) + \Delta t \sum_{T_{jk} \in \mathcal{T}, k \neq i} \max \{ f_{kj} - f_{jk} : (f_{jk}, f_{kj}) \in \mathcal{F}_{jk} \} + s_{ij,+} \right\}, \\ s_{ij,-} &= \tilde{n}_{i,-}(t) - n_{i,+}(t - \Delta t) + \Delta t \sum_{T_{ik} \in \mathcal{T}, k \neq j} \min \{ f_{ki} - f_{ik} : (f_{ik}, f_{ki}) \in \mathcal{F}_{ik} \}, \\ s_{ij,+} &= \tilde{n}_{i,+}(t) - n_{i,-}(t - \Delta t) + \Delta t \sum_{T_{ik} \in \mathcal{T}, k \neq j} \max \{ f_{ki} - f_{ik} : (f_{ik}, f_{ki}) \in \mathcal{F}_{ik} \}. \end{aligned}$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ ПРОГРАММЫ

Для численной иллюстрации двух алгоритмов возьмем ранее приведенный пример, граф которого изображен на фиг. 1. Пусть $n = 10$, $S = 15$, $C = 20$, $v = 1.2$, $w = 0.5$, $F = 3$, параметры $\alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)} = 1$, $\alpha_1^{(3)} = \alpha_2^{(3)} = 1/2$ считаем не зависящими от времени.

Построим оценку множества достижимости $\mathcal{X}(t)$ двумя способами с шагом $\Delta t = 4$ из начального состояния в момент времени $t_0 = 0$, при котором точно известно начальное количество людей в каждой комнате $n_{i,-} = n_{i,+} = 10$, $i = 1, 2, 3$. Далее достаточно рассмотреть ситуацию в переходе T_{13} (T_{31}), в соседнем переходе T_{23} ситуация будет в точности повторяться из-за симметричности схемы помещения и начальных условий.

Пересчитывая количества людей в комнатах $n_i(t)$ с помощью интервальных оценок потоков, получаем набор отрезков $\{[n_{i,-}(t), n_{i,+}(t)]\}$, $t > 0$. Для удобного сравнения двух подходов изобразим декартово произведение отрезков $\{[n_{i,-}(t), n_{i,+}(t)]\}$ и $\{[n_{3,-}(t), n_{3,+}(t)]\}$ на плоскости (n_1, n_3) (фиг. 2а).



Фиг. 3. Учет результата измерения $y_3(t)$ в момент времени $t = 12$: (а) — интервальные оценки, (б) — двумерные проекции.

Уточним множества возможных потоков до пересчета $n_{i,-}$, $n_{i,+}$ в момент времени $t = 4$. Так как выполняется $wC/S \leq F$, в результате работы первого алгоритма получаем оценку $\mathcal{F}_{13} = \{(f_{13}, f_{31}) : 0 \leq f_{13} \leq 1/3, f_{31} = 1/3\}$ (множество $\mathcal{F}_{31}$ отличается от $\mathcal{F}_{13}$ перестановкой компонент). Далее, так как $\min\{f_{31} - f_{13}\} = \max\{f_{13} - f_{31}\} = 0$, $n_{1,-}$ не уменьшается, а $n_{3,+}$ не увеличивается. Это соответствует тому, что при рассматриваемых параметрах модели из третьей комнаты в первую переходит больше человек, чем в противоположном направлении. В следующие моменты времени такая ситуация не наблюдается, так как значение n_i известно неточно, поэтому нижняя граница $n_{1,-}$ начнет уменьшаться, а верхняя $n_{3,+}$ увеличиваться.

Применение двумерных проекций в данном случае позволяет одновременно учитывать увеличение и уменьшение значения потоков в двух комнатах. Это можно интерпретировать следующим образом: при пересчете значений n_i мы сразу же учитываем то, что если, например, увеличилось n_1 , то при этом обязательно должно уменьшиться n_3 , оно в данном случае никак не может остаться неизменным, так как в комнату 1 нет других входящих переходов, кроме T_{31} . Таким образом, получается более сложная оценка в виде выпуклого многоугольника $\mathcal{N}_{13}$ (фиг. 2б). Заметим, что одномерные проекции $[n_{1,-}, n_{1,+}]$ и $[n_{3,-}, n_{3,+}]$ множества $\mathcal{N}_{13}$ совпадают с интервальной оценкой, построенной с помощью первого метода.

Наиболее осязаемое различие между двумя подходами можно заметить в случае учета результатов измерений. Пусть в момент времени $t = 12$ поступило измерение $y_3(t) = 5$, $\Xi = 1$. Очевидно, что в случае интервальных оценок такая ситуация уточняет только значения $[\tilde{n}_{3,-}, \tilde{n}_{3,+}] = [4, 6]$, на текущую оценку количества людей в соседних комнатах она никак не повлияет (фиг. 3а): $[\tilde{n}_{1,-}, \tilde{n}_{1,+}] = [8.17, 14.07]$.

Напротив, в случае двумерных оценок уточнение может затрагивать значения в соседней комнате. Для данного примера проекция множества $\tilde{\mathcal{N}}_{13}$ улучшается по сравнению с интервальными оценками, построенными с помощью первого метода (фиг. 3б): $[\tilde{n}_{1,-}, \tilde{n}_{1,+}] = [9.93, 14.07]$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача оценивания числа людей в каждой комнате для модифицированной модели СТМ, описывающей перемещение потоков людей внутри помещения. Предложено два способа оценки множеств достижимости задачи: с помощью одномерных интервальных оценок и двумерных проекций. Работа двух алгоритмов проиллюстрирована численными примерами, показано преимущество второго способа оценивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Daganzo C.F.* The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory // *Transp. Res. B.* 1994. V. 28B. № 4. P. 269–287.
2. *Daganzo C.F.* The cell transmission model, part II: network traffic // *Transp. Res. B.* 1995. V. 29B. № 2. P. 79–93.
3. *Piccoli B., Garavello M.* Traffic flow on networks. American institute of mathematical sciences. Springfield, 2006.
4. *Зайцева М.В., Точилин П.А.* Управление потоками людей в здании во время эвакуации // *Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика.* 2020. № 4. С. 3–17.
5. *Hänseler F.S., Bierlaire M., Farooq B., Mühlematter T.* A macroscopic loading model for time-varying pedestrian flows in public walking areas // *Transp. Res. B.* 2014. V. 69. P. 60–80.
6. *Kachroo P., Al-nasur S.J., Wadoo S.A., Shende A.* Pedestrian dynamics. Feedback control of crowd evacuation. Springer, 2008.
7. *Акопов А.С., Бекларян Л.А.* Агентная модель поведения толпы при чрезвычайных ситуациях // *Автомат. и телемех.* 2015. Вып. 10. С. 131–143.
8. *Samson B.P.V., Aldanese IV C.R., Chan D.M.C., San Pascual J.J.S., Sido M.V.A.P.* Crowd dynamics and control in high-volume metro rail stations // *Proced. Comput. Sci.* 2007. V. 108. P. 195–204.
9. *Helbing D., Farcas I., Vicsek T.* Simulating dynamical features of escape panic // *Nature.* 2000. V. 407. P. 487–490.
10. *Tampere C.M.J., Corthout R., Catrysse D., Immers L.H.* A generic class of first order node models for dynamic macroscopic simulation of traffic flows // *Trans. Rep. B.* 2011. № 45. P. 289–309.
11. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes. Birkhäuser, 2014.
12. *Корнушенко Е.К.* Интервальные по координатным оценкам для множества достижимых состояний линейной стационарной системы // *Автомат. и телемех.* 1980. Вып. 5. С. 12–22.
13. *Tang W., Wang Z., Wang Y., Raissi T., Shen Y.* Interval estimation methods for discrete-time linear time-invariant systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2019. V. 64. № 11. P. 4717–4724.
14. *Куржанский А.Б., Куржанский А.А., Варайя П.* Роль макро моделирования в активном управлении транспортной сетью // *Тр. МФТИ.* 2010. Т. 2. № 4. С. 100–118.